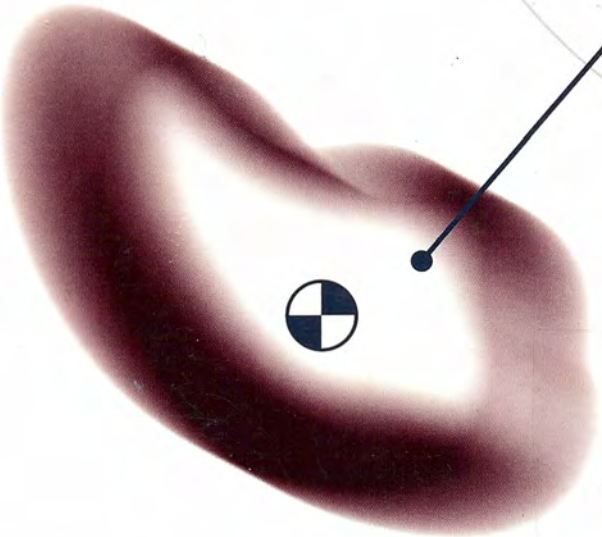
Mecánica para Ingenieros

DINÁMICA

J.L. MERIAM - L.G. KRAIGE

3ª EDICIÓN



EDITORIAL REVERTÉ, S.A.

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

FACTORES DE CONVERSIÓN DE LAS U. S. CUSTOMARY UNITS EN UNIDADES SI

Para convertir	En	Multiplicar por
(*Aceleración*)		
pie/segundo^2 (ft/sec^2)	metro/segundo^2 (m/s^2)	$3{,}048 \times 10^{-1}$*
pulgada/segundo^2 (in./sec^2)	metro/segundo^2 (m/s^2)	$2{,}54 \times 10^{-2}$*
(*Área*)		
pie^2 (ft^2)	metro^2 (m^2)	$9{,}2903 \times 10^{-2}$
pulgada^2 (in.^{2})	metro^2 (m^2)	$6{,}4516 \times 10^{-4}$*
(*Densidad*)		
libra masa/pulgada^3 (lbm/in.^{3})	kilogramo/metro^3 (kg/m^3)	$2{,}7680 \times 10^{4}$
libra masa/pie^3 (lbm/fi^3)	kilogramo/metro^3 (kg/m^3)	$1{,}6018 \times 10$
(*Fuerza*)		
kip (1000 lb)	newton (N)	$4{,}4482 \times 10^{3}$
libra fuerza (lb)	newton (N)	4,4482
(*Longitud*)		
pie (ft)	metro (m)	$3{,}048 \times 10^{-1}$*
pulgada (in.)	metro (m)	$2{,}54 \times 10^{-2}$*
milla (mi), (U. S. statute)	metro (m)	$1{,}6093 \times 10^{3}$
milla (mi), (náutica internacional)	metro (m)	$1{,}852 \times 10^{3}$*
(*Masa*)		
libra masa (lbm)	kilogramo (kg)	$4{,}5359 \times 10^{-1}$
slug (lb-sec^2/ft)	kilogramo (kg)	$1{,}4594 \times 10$
tonelada (2000 lbm)	kilogramo (kg)	$9{,}0718 \times 10^{2}$
(*Momento de fuerza*)		
libra-pie (lb-ft)	newton-metro (N · m)	1,3558
libra-pulgada (lb-in.)	newton-metro (N · m)	0,1129 8
(*Momento de inercia, área*)		
pulgada^4	metro^4 (m^4)	$41{,}623 \times 10^{-5}$
(*Momento de inercia, masa*)		
libra, pie, segundo^2	kilogramo-metro^2 (kg · m^2)	1,3558
(*Cantidad de movimiento, lineal*)		
libra-segundo (lb-sec)	kilogramo-metro/segundo (kg · m/s)	4,4482
(*Cantidad de movimiento, angular*)		
libra-pie-segundo	newton-metro-segundo (kg · m^2/s)	1,3558
(*Potencia*)		
pie-libra/minuto (ft-lb/min)	watt (W)	$2{,}2597 \times 10^{-2}$
caballo de vapor (550 ft-lb/sec)	watt (W)	$7{,}4570 \times 10^{2}$
(*Presión, carga*)		
atmósfera (estándar) (14,7 lb/in.^{2})	newton/metro^2 (N/m^2 o Pa)	$1{,}0133 \times 10^{5}$
libra/pie^2 (lb/ft^2)	newton/metro^2 (N/m^2 o Pa)	$4{,}7880 \times 10$
libra/pulgada^2 (lb/in.^{2} o psi)	newton/metro^2 (N/m^2 o Pa)	$6{,}8948 \times 10^{3}$
(*Constante del resorte*)		
libra/pulgada (lb/in.)	newton/metro (N/m)	$1{,}7513 \times 10^{2}$
(*Velocidad*)		
pie/segundo (ft/sec)	metro/segundo (m/s)	$3{,}048 \times 10^{-1}$*
nudo (náutico mi/hr)	metro/segundo (m/s)	$5{,}1444 \times 10^{-1}$
milla/hora (mi/hr)	metro/segundo (m/s)	$4{,}4704 \times 10^{-1}$*
milla/hora (mi/hr)	kilómetro/hora (km/h)	1,6093
(*Volumen*)		
pie^3 (ft^3)	metro^3 (m^3)	$2{,}8317 \times 10^{-2}$
pulgada^3 (in.^{3})	metro^3 (m^3)	$1{,}6387 \times 10^{-5}$
(*Trabajo, energía*)		
Unidad térmica inglesa (BTU)	joule (J)	$1{,}0551 \times 10^{3}$
pie-libra fuerza (ft-lb)	joule (J)	1,3558
kilowatt-hora (kw-hr)	joule (J)	$3{,}60 \times 10^{6}$*

* Valor exacto.

http://gratislibrospdf.com/

UNIDADES SI UTILIZADAS EN MECÁNICA

Magnitud	Unidad	Símbolo SI
(*Unidades básicas*)		
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
(*Unidades derivadas*)		
Aceleración, lineal	metro/segundo^2	m/s^2
Aceleración, angular	radián/segundo^2	rad/s^2
Área	metro^2	m^2
Densidad	kilogramo/metro^2	kg/m^3
Fuerza	newton	N (= kg · m/s^2)
Frecuencia	hertz	Hz (= 1/s)
Impulso, lineal	newton-segundo	N · s
Impulso, angular	newton-metro-segundo	N · m · s
Momento de fuerza	newton-metro	N · m
Momento de inercia, área	metro^4	m^4
Momento de inercia, masa	kilogramo-metro^2	kg · m^2
Cantidad de movimiento, lineal	kilogramo-metro/segundo	kg · m/s (= N · s)
Cantidad de movimiento, angular	kilogramo-metro^2/segundo	kg · m^2/s (= N · m · s)
Potencia	watt	W (= J/s = N · m/s)
Presión, carga	pascal	Pa (= N/m^2)
Producto de inercia, área	metro^4	m^4
Producto de inercia, masa	kilogramo-metro^2	kg · m^2
Constante del resorte	newton/metro	N/m
Velocidad, lineal	metro/segundo	m/s
Velocidad, angular	radián/segundo	rad/s
Volumen	metro^3	m^3
Trabajo, energía	joule	J (= N · m)
(*Unidades suplementarias y otras unidades aceptables*)		
Distancia (navegación)	milla náutica	(= 1,852 km)
Masa	tonelada (métrica)	t (= 1000 kg)
Ángulo plano	grados (decimal)	°
Ángulo plano	radián	–
Velocidad	nudo	(1,852 km/h)
Tiempo	día	d
Tiempo	hora	h
Tiempo	minuto	min

PREFIJOS DE LAS UNIDADES SI

Factor de multiplicación	Prefijo	Símbolo
1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1 000 000 000 = 10^{9}	giga	G
1 000 000 = 10^{6}	mega	M
1000 = 10^{3}	kilo	k
100 = 10^{2}	hecto	h
10 = 10	deca	da
0,1 = 10^{-1}	deci	d
0,01 = 10^{-2}	centi	c
0,001 = 10^{-3}	mili	m
0,000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p

ALGUNAS REGLAS IMPORTANTES PARA ESCRIBIR MAGNITUDES MÉTRICAS

1. (a) Utilizar los prefijos para mantener los valores numéricos dentro del intervalo 0,1 a 1000.
   (b) Evitar el uso de los prefijos hecto, deca, deci y centi, excepto en los casos de ciertas áreas y volúmenes en los que los números serían confusos.
   (c) En las combinaciones de unidades, utilizar prefijos solamente en el numerador. La única excepción es la unidad básica kilogramo. (*Ejemplo*: se escribe kN/m, no N/mm; J/kg, no mJ/g.)
   (d) No utilizar prefijos dobles. (*Ejemplo*: se escribe GN, no kMN.)

2. Escritura de unidades
   (a) Utilizar un punto para la multiplicación de unidades. (*Ejemplo*: se escribe N · m, no Nm.)
   (b) No utilizar barras inclinadas dobles. (*Ejemplo*: se escribe N/m^2, no N/m/m.)
   (c) Los exponentes se refieren a toda la unidad. (*Ejemplo*: mm^2 significa (mm)^2.)

3. Agrupamiento de números
   Utilizar un espacio en lugar de un punto para separar los números en grupos de tres cifras, contando a partir de la coma decimal y en ambas direcciones. (*Ejemplo*: 4 607 321,048 72.) En los números de cuatro cifras el espacio se puede omitir. (*Ejemplo*: 4296 ó 0,0476.)

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

Mecánica para Ingenieros

DINÁMICA

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

Mecánica para Ingenieros

DINÁMICA

3ª EDICION

J.L. MERIAM

University of California
Santa Barbara

L.G. KRAIGE

Virginia Polytechnic Institute and
State University

EDITORIAL REVERTÉ, S.A.

Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

http://gratislibrospdf.com/

Título de la obra original:
Engineering Mechanics. Dynamics. Volume two. Third Edition

Edición original en lengua inglesa publicada por:
John Wiley & Sons, Inc., New York, U.S.A.

Copyright © John Wiley & Sons, Inc.

Versión española por:
Dr. José Vilardell
Universidad Politécnica de Cataluña

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
E-mail: reverte@reverte.com
Internet: http://www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Edición en español

© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1998

REIMPRESIÓN: Septiembre de 2002

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN: 84 - 291 - 4280 - 0 Obra completa
ISBN: 84 - 291 - 4259 - 2 Volumen II

Depósito Legal: B-38223-2002

Impreso por LIBERDÚPLEX, S.L.
Constitución 19, interior (Can Batlló)
08014 BARCELONA

http://gratislibrospdf.com/

Prólogo

No es posible ponderar las innovaciones y contribuciones introducidas por el Dr. James L. Meriam en el campo de la Mecánica Técnica, ya que sin duda su influencia sobre la enseñanza de esta disciplina ha sido superior a la de cualquier otra persona durante el último cuarto de siglo. En 1951, sus primeros libros reconstruyeron literalmente la enseñanza de esta materia y se convirtieron en los textos definitivos durante los decenios siguientes. Sus textos, organizados con lógica, se leían fácilmente y estaban dirigidos al estudiante de ingeniería medio con una gran profusión de estimulantes ejemplos, basados en problemas de auténtica ingeniería estupendamente ilustrados. Aquellos libros pasaron a ser modelos para otros textos de Mecánica Técnica desde los años 1950 hasta ahora.

El Dr. Meriam comenzó sus trabajos en Mecánica aplicada en la Universidad de Yale, donde se graduó en Ingeniería y se doctoró en Ingeniería y Física. No tardó en adquirir experiencia industrial en Pratt and Whitney Aircraft y en General Electric Company, lo cual sirvió de estímulo para sus primeras contribuciones a la mecánica mediante estudios sobre tensiones internas tanto analíticos como experimentales. Durante la II Guerra Mundial sirvió en los guardacostas.

Durante veintiún años el Dr. Meriam fue miembro de la Universidad de California-Berkeley, donde prestó sus servicios como profesor de Mecánica para ingenieros, Decano Ayudante de Estudios Superiores y Presidente de la División de Mecánica y Proyectos. En 1963 fue Decano de Ingeniería de la Universidad de Duke, donde dedicó todas sus energías al desarrollo de la Escuela de Ingeniería de la misma. Fiel a sus deseos de dedicarse nuevamente de lleno a la enseñanza, en 1972 aceptó el nombramiento de profesor de Mecánica Técnica de la Universidad Politécnica Estatal de California, de donde se retiró en 1980. Durante los diez años siguientes ejerció de profesor visitante en la Universidad de California, Santa Bárbara, retirándose por segunda vez en 1990. El Dr. Meriam ha dado siempre gran énfasis a la enseñanza, característica que ha sido reconocida por sus alumnos en todos los lugares donde la ha practicado. En Berkeley fue el primero en recibir, en 1963, el premio Outstanding Faculty que la sociedad Tau Beta Pi otorga principalmente por la excelencia en la enseñanza. En 1978 la Asociación Americana para la Enseñanza de la Ingeniería le

http://gratislibrospdf.com/

concedió el premio Distinguished Educator por sus sobresalientes servicios a la enseñanza de la Mecánica Técnica.

El profesor Meriam fue el primer autor que mostró claramente cómo emplear el método de los trabajos virtuales para resolver cierto tipo de problemas de Estática en su mayoría despreciados por autores anteriores. Por lo que respecta a la Dinámica, clarificó notablemente la exposición del movimiento plano y en ediciones posteriores la Cinemática y la Cinética tridimensionales recibieron el mismo tratamiento. Es, además, el profesor Meriam uno de los primeros promotores del Sistema Internacional de Unidades y las versiones de este sistema en sus libros *Estática* y *Dinámica* publicados en 1975 fueron los primeros textos de Mecánica en unidades SI de Estados Unidos.

También el Dr. L. Glenn Kraige, coautor por segunda vez de esta MECÁNICA PARA INGENIEROS, ha efectuado importantes contribuciones a la enseñanza de la Mecánica. Cursó sus estudios en la Universidad de Virginia, donde se graduó y doctoró en ciencias e ingeniería, principalmente en tecnología aeroespacial, y actualmente ejerce de profesor de Ciencia de la Ingeniería y Mecánica en la Universidad Estatal e Instituto Politécnico de Virginia.

Además de su reconocida labor investigadora y divulgadora en el campo de la dinámica de las naves especiales, el profesor Kraige ha prestado gran atención a la enseñanza de la Mecánica, a niveles tanto de iniciación como superior. Su destacada actividad docente está ya generalmente reconocida y le ha hecho merecedor de varios premios, entre los que se cuentan el concedido por AT & T, en 1988, como recompensa por su excepcional labor en el campo de la enseñanza dentro de la Southeastern Section de la Asociación Americana para la Enseñanza Técnica y, también en 1988, el premio Outstanding Educator del Consejo Estatal de Enseñanza Superior de la Commonwealth de Virginia. En su actividad docente acentúa siempre el desarrollo de las capacidades analíticas junto con la consolidación del sentido físico y del razonamiento técnico. Son de destacar, asimismo, sus trabajos de desarrollo de software de simulación de movimientos para ordenadores personales a mediados de los años ochenta. Más recientemente, inició un esfuerzo a largo plazo en el área de procedimientos de multimedia para enseñanza y aprendizaje de Estática y Dinámica.

Esta tercera edición de MECÁNICA PARA INGENIEROS está planteada en el mismo nivel superior que sus predecesoras y a ella se han añadido nuevas aportaciones que resultarán provechosas e interesantes para los estudiantes. Contiene asimismo una vasta colección de interesantes e instructivos problemas. El análisis y las aplicaciones son las piedras angulares del éxito en el aprendizaje de la Mecánica Técnica y J. L. Meriam y L. G. Kraige demuestran una vez más que son los mejores cuando se trata de combinar tan esenciales características.

Robert F. Steidel, Jr.
Profesor emérito de Mecánica Técnica
Universidad de California, Berkeley

http://gratislibrospdf.com/

Prólogo para el estudiante

Al emprender el estudio de la Mecánica aplicada, primero la Estática y seguidamente la Dinámica, procede Vd. a sentar los cimientos de su capacidad analítica para resolver una gran variedad de problemas de ingeniería. Actualmente, el ejercicio de la ingeniería exige una elevado nivel de capacidad analítica y Vd. comprobará por sí mismo que el estudio de la Mecánica le ayudará enormemente a desarrollar esa capacidad.

Merced a la Mecánica aplicada podemos aprender a construir y resolver los modelos matemáticos que describen los efectos de las fuerzas y los movimientos sobre una gran variedad de estructuras y máquinas que son de interés para los ingenieros. Aplicando los principios de la Mecánica se consigue formular dichos modelos incorporando a ellos las hipótesis físicas y las aproximaciones matemáticas adecuadas. Tanto en el planteo como en la resolución de problemas de Mecánica son muy frecuentes las ocasiones para utilizar conocimientos de geometría, álgebra, cálculo vectorial, geometría analítica y cálculo infinitesimal. Y, desde luego, es más que probable que descubra Vd. aspectos nuevos de la importancia de estos instrumentos matemáticos cuando los emplee dentro del campo de la Mecánica.

El éxito en mecánica (y en toda la ingeniería) depende grandemente del desarrollo de un método bien disciplinado para abordar los problemas desde las hipótesis de partida hasta su conclusión y a través del cual se apliquen rigurosamente los principios pertinentes. Por mis muchos años de experiencia como profesor e ingeniero conozco la importancia que tiene representar el trabajo propio desarrollado de una manera clara, lógica y breve. La Mecánica constituye una motivo excelente para desarrollar esos hábitos de pensamiento lógico y exposición eficaz.

Este texto de MECÁNICA PARA INGENIEROS contiene un gran número de problemas tipo cuyas soluciones se presentan con todo detalle. Además, en dichos ejemplos se incluyen observaciones útiles en las que se mencionan los errores y trampas más corrientes que deben evitarse. Adicionalmente, el texto contiene una gran colección de problemas sencillos de tipo introductorio y de problemas de dificultad media, cuyo objetivo es facilitar la confianza inicial y el entendimiento de cada tema nuevo. También se incluyen muchos problemas que ilustran casos importantes y actuales con el fin de estimular el interés del

http://gratislibrospdf.com/

lector y ayudarle a desarrollar su apreciación hacia las muchas aplicaciones de la Mecánica a la Ingeniería.

Nos complace animarle a Vd. como estudiante de Mecánica y esperamos que este libro le sea de utilidad y estímulo para desarrollar su formación como ingeniero.

J. L. Meriam
Santa Bárbara, California

L. Glenn Kraige
Blacksburg, Virginia

http://gratislibrospdf.com/

Prólogo para el profesor

Básicamente, el estudio de la Mecánica aplicada consiste en desarrollar la capacidad para predecir los efectos de las fuerzas y los movimientos al llevar a cabo el trabajo de diseño creativo propio de la Ingeniería. Una predicción acertada requiere algo más que el simple conocimiento de los principios físicos y matemáticos de la Mecánica. Se necesita también habilidad para imaginar las configuraciones físicas en función de los materiales reales, los vínculos verdaderos y las limitaciones prácticas que rigen el comportamiento de máquinas y estructuras. Uno de los objetivos primordiales cuando enseñemos Mecánica debe ser facilitar al estudiante el desarrollo de esta habilidad para la visualización, algo vital para el planteo de los problemas. Y, además, ocurre que la construcción de un modelo matemático significativo es a menudo más importante que su misma solución. El progreso máximo se consigue cuando los principios y sus limitaciones se aprenden a la vez dentro del contexto de su aplicación a la Ingeniería.

Los estudiantes suelen considerar los cursos de Mecánica como una exigencia dificultosa y, con frecuencia, también como un obstáculo académico carente de interés. La dificultad procede de las grandes dosis de razonamiento en torno a los principios fundamentales que son necesarios, en contraposición al estudio memorizado. El desinterés que a menudo se siente se debe fundamentalmente a que, muchas veces, la Mecánica se presenta como una disciplina académica desprovista en su mayor parte de aplicación práctica. Esta actitud es achacable a la extendida propensión a emplear los problemas más que nada como vehículo para ilustrar la teoría, en lugar de desarrollar ésta con el fin de resolver problemas. Cuando se permite que predomine el primer punto de vista, los problemas tienden a hacerse excesivamente idealizados y sin relación con la práctica, resultando que los ejercicios se hacen aburridos, académicos y faltos de interés; de esta forma, se despoja al estudiante de toda la valiosa experiencia que supone el planteo de problemas y, por tanto, de la posibilidad de descubrir la necesidad y el significado de la teoría. Con el segundo punto de vista se consigue reforzar los motivos para aprender la teoría y se produce un mejor equilibrio entre ésta y sus aplicaciones; por otra parte, no es posible insistir suficientemente en el papel crucial que juegan el interés hacia una disciplina y la utilidad de ésta para provocar la motivación de su estudio. Aún más, debe-

http://gratislibrospdf.com/

mos resaltar el hecho de que en el mejor de los casos, la teoría sólo puede ser una aproximación al mundo real, pero no que éste sea una aproximación a la teoría. Esta diferencia filosófica es, desde luego, fundamental y distingue a la *ingeniería* de la Mecánica de la *ciencia* de la Mecánica.

Dentro del campo de la enseñanza de la Ingeniería, ha existido durante los últimos treinta años una fuerte tendencia a incrementar la extensión y el nivel de teoría en los cursos de ciencias para ingenieros y en ningún otro lugar se ha hecho sentir más esta tendencia que en los cursos de Mecánica. Mientras los estudiantes estén preparados para hacer frente a tratamientos acelerados, esa tendencia será beneficiosa. No obstante, existen pruebas y una justificable preocupación acerca del hecho de que más recientemente ha aparecido una importante disparidad entre el alcance de las enseñanzas impartidas y lo entendido de ellas. Los factores que a ello contribuyen confluyen de tres direcciones. En primer lugar, parece haber disminuido el énfasis en los contenidos de Geometría y Física de las matemáticas de los cursos preparatorios. En segundo lugar, ha habido una reducción importante, e incluso eliminación, de la enseñanza de representaciones gráficas que en el pasado servían para realzar la visualización y representación de los problemas de Mecánica. Por último, al elevar el nivel del tratamiento matemático de la Mecánica ha aparecido la tendencia a permitir que el manejo de la notación vectorial enmascare o sustituya la visualización geométrica. La Mecánica es intrínsecamente una materia que depende de la percepción física y geométrica y debemos aumentar nuestros esfuerzos para que se desarrolle de esa forma.

Como profesores de Mecánica, una de nuestras responsabilidades es emplear la matemática más adecuada a cada tipo de problema. Así, la utilización de la notación vectorial en problemas monodimensionales es generalmente banal; en el caso de problemas bidimensionales suele ser optativa; pero en los problemas tridimensionales suele ser esencial. Cuando introduzcamos operaciones vectoriales en problemas bidimensionales, es particularmente importante insistir en su significado geométrico, ya que una ecuación vectorial aparece en correspondencia a un polígono vectorial, que a menudo revela, merced a su geometría, el método de resolución más corto. Por supuesto, existen muchos problemas de Mecánica cuyas variables tienen entre ellas unas dependencias tan complejas que rebasan las capacidades de visualización y percepción normales y es esencial confiar en el cálculo. No obstante este hecho, los estudiantes llegarán a ser mejores ingenieros si su capacidad de percibir, visualizar y representar se desarrolla al máximo.

Como profesores de Mecánica para ingenieros tenemos la mayor de las obligaciones hacia la profesión de ingeniero en el sentido de situar nuestra actuación a un nivel razonable y de mantener ese nivel. Adicionalmente, tenemos la grave responsabilidad de alentar a nuestros alumnos a que piensen por sí mismos. Por ello, una ayuda excesiva para detalles que los estudiantes deben conocer ya de antes puede ser tan nociva como una ayuda escasa y fácilmente puede condicionar al estudiante haciéndolo demasiado dependiente de los demás, sin que ejercite su propia iniciativa y capacidad. Además, cuando se divide la Mecánica en un número excesivo de pequeños compartimientos, cada uno de ellos con instrucciones detalladas y repetitivas, el estudiante puede tener dificultad para distinguir entre los "árboles" y el "bosque" y, en consecuencia, deje de percibir la unidad de la Mecánica y el gran alcance práctico que tiene el reducido número de sus principios y métodos fundamentales.

http://gratislibrospdf.com/

Al igual que sus predecesoras, esta tercera edición de *Mecánica para Ingenieros* se ha escrito teniendo presente la anterior filosofía. Pensada especialmente para un primer curso de Mecánica, que generalmente se imparte en el segundo curso de carrera, se ha redactado en un estilo a la vez conciso y llano. Frente a la posibilidad de presentar una multitud de casos particulares, se ha preferido insistir fuertemente en mostrar la cohesión entre los conceptos fundamentales, que son relativamente pocos, y la gran variedad de problemas que con tan pocos conceptos se pueden resolver. Por ello, una característica de mayor importancia de esta obra es el tratamiento tan amplio que reciben los problemas tipo, los cuales se presentan de modo que puedan estudiarse cómodamente sin ayuda del profesor. Además, las soluciones a estos problemas tipo se ofrecen con todo detalle, con comentarios y advertencias y llamada a los puntos notables del proceso de resolución impresos en color.

El tomo II, Dinámica, contiene 114 problemas tipo y 1500 problemas sin resolver de los que pueden extraerse enseñanzas muy variadas. De estos problemas, más de la mitad son completamente nuevos en esta tercera edición y todos ellos representan muchos casos prácticos de ejemplos de interés técnico extraídos de una gran variedad de situaciones reales. En todo el libro se utilizan unidades SI.

Como novedad, en esta tercera edición la mayoría de los conjuntos de problemas se agrupan en dos secciones tituladas *Problemas introductorios* y *Problemas representativos*. Los primeros son ejercicios sencillos, sin complicaciones, pensados para que el estudiante adquiera confianza con cada nuevo tema, mientras que los segundos son problemas de dificultad y extensión regulares. En general, se presentan ordenados por dificultad creciente y los más difíciles, que se identifican con la señal ▶, se han colocado hacia el final de los *Problemas representativos*. Cada capítulo se cierra con una sección especial de problemas orientados al uso de ordenador, ubicada tras los *Problemas de repaso*. Se ofrece, además, la respuesta a todos los problemas impares y también a los más difíciles. Todos los cálculos han sido realizados y comprobados sin redondear los resultados intermedios, por lo que las respuestas finales deben coincidir con los valores indicados en lo que respecta a las cifras significativas.

Y aquí es oportuna una observación acerca del uso de ordenador. Los autores desean recalcar que la experiencia en el plantamiento de problemas, que permite desarrollar el raciocinio y el sentido de las cosas, es considerablemente más importante para los estudiantes que el puro ejercicio manipulativo de calcular la solución. Por ello, creemos que el empleo del ordenador debe limitarse escrupulosamente. En este estadio, la construcción de diagramas para sólido libre y la formulación de las ecuaciones será mejor hacerlas con papel y lápiz. Hay, por otra parte, ocasiones en que el *proceso de resolución* de esas ecuaciones y sus *soluciones* se ejecuta y se representa, respectivamente, mucho mejor vía ordenador. Pero los problemas orientados al ordenador deben ser genuinos en el sentido de que exista una condición de diseño o de criticalidad que deba ser determinada, sin que se trate de simples problemas "de trajín" en los que se hace variar algún parámetro sin otro motivo evidente que forzar un empleo artificial del ordenador. Con esta idea hemos confeccionado los problemas para ordenador de esta tercera edición. Para preservar un tiempo suficiente destinado al planteo de problemas se sugiere que a los alumnos se les asigne únicamente un número limitado de problemas para ordenador.

Se ha mantenido la división lógica entre la dinámica de un punto material y la dinámica de un cuerpo rígido, y en cada parte se trata la cinemática antes

http://gratislibrospdf.com/

que la cinética. Esta disposición facilita enormemente una exploración más amplia y rápida de la dinámica de los cuerpos rígidos con el beneficio previo de una introducción comprensiva a la dinámica de los puntos materiales en los capítulos 2 y 3.

El capítulo 3 sobre la cinética de los puntos materiales se centra en los tres métodos básicos: fuerza-masa-aceleración, trabajo-energía e impulso cantidad de movimiento. Los temas de especial importancia, movimiento bajo fuerzas centrales y movimiento relativo, se agrupan en la sección D del capítulo 3 que trata sobre aplicaciones especiales y sirven como material opcional que el profesor puede asignar de acuerdo con sus preferencias y el tiempo disponible. Con esta disposición, la atención del estudiante se centra más intensamente en los tres métodos fundamentales de la cinética, que se desarrollan en las secciones A, B y C del capítulo.

El capítulo 4 sobre los sistemas de puntos materiales es una extensión de los principios del movimiento de un solo punto material y desarrolla las relaciones generales que son básicas para una comprensión moderna de la dinámica. El capítulo también incluye los temas de movimiento estacionario de un medio continuo y masa variable que pueden ser considerados como opcionales, dependiendo del tiempo de que se disponga.

El capítulo 5 sobre la cinemática de los cuerpos rígidos en movimiento plano, donde se encuentran la velocidad y la aceleración relativas, pone el énfasis conjuntamente en la solución por geometría vectorial y la solución por álgebra vectorial. Este doble enfoque sirve al propósito de reforzar el significado de la matemática vectorial.

En el capítulo 6 sobre la cinética de los cuerpos rígidos se hace hincapié en las ecuaciones básicas que gobiernan todas las categorías de movimiento plano. Se establece una fuerte relación de dependencia entre lo conocido y lo desconocido y las ecuaciones necesarias y suficientes que garantizan la solución. También se pone especial énfasis en el desarrollo de las equivalencias directas entre las fuerzas y pares de fuerzas aplicadas reales y sus resultantes $m\bar{a}$ e $\bar{I}\alpha$. En este sentido, se destaca la flexibilidad del principio de los momentos y se anima a los estudiantes a que piensen directamente en términos de los efectos dinámicos resultantes.

En el capítulo 7, que puede ser tratado como opcional, proporciona una introducción básica a la dinámica en tres dimensiones que es suficiente para resolver muchos de los problemas del movimiento en el espacio más comunes. Para aquellos estudiantes que en el futuro desean hacer trabajos más avanzados en dinámica, el capítulo 7 proporciona un fundamento sólido. El movimiento giroscópico con precesión estacionaria se trata de dos maneras: la primera hace uso de la analogía entre la relación de fuerza y vectores de cantidad de movimiento lineal y la relación del momento y vectores de cantidad de movimiento angular. Con este tratamiento el estudiante puede comprender el fenómeno giroscópico de precesión estacionaria y puede manejar la mayor parte de los problemas técnicos relacionados con los giroscopios sin un estudio detallado de la dinámica tridimensional; y el segundo hace uso de las ecuaciones de la cantidad de movimiento, más generales, para la rotación en tres dimensiones donde todas las de la cantidad de movimiento son explicados.

En el capítulo 8 trata el tema de las vibraciones. El estudio completo de este capítulo es especialmente útil para los estudiantes de ingeniería ya sólo verán este tema en el curso de dinámica básica.

http://gratislibrospdf.com/

Los momentos y los productos de inercia de masa se presentan en el apéndice B. El apéndice C contiene un resumen de repaso de matemáticas elementales y de varias técnicas numéricas que el estudiante deberá conocer para resolver los problemas orientados hacia el ordenador.

Los autores desean mencionar especialmente la magnífica contribución que a estos textos de Mecánica realizó durante veinticinco años el ilustrador John Balbalis, muerto en Octubre de 1991. Su dedicación y su elevado nivel en el arte de la ilustración acrecentaron enormemente el potencial educativo de estos libros, brindando claridad, realismo e interés a los miles de estudiantes que fueron estimulados por sus esfuerzos.

Un reconocimiento especial se debe al Dr. A. L. Hale, de Bell Telephone Laboratories, por su continuada contribución en forma de inestimables sugerencias y cuidadosa revisión del manuscrito. El Dr. Hale prestó una ayuda similar en todas las versiones anteriores de esta obra y su colaboración ha sido un activo inestimable. Expresamos además nuestro aprecio al profesor J. M. Henderson, de la Universidad de California-Davis, por sus útiles sugerencias y comentarios en torno a la selección de problemas. Extendemos nuestro agradecimiento al profesor Alfonso Díaz-Jiménez de la Universidad de Bogotá (Colombia) por los constructivos comentarios y observaciones formulados durante años. Un grupo de miembros del Departamento de Ciencia de la Ingeniería y Mecánica del Instituto Politécnico y Universidad Estatal de Virginia, entre los que se cuentan los profesores Norman E. Dowling, J. Wallace Grant, Scott L. Hendricks, Arpad A. Pap, Saad A. Ragab y George W. Swift, nos ha ofrecido sus útiles sugerencias. La contribución del personal de John Wiley & Sons, Inc., incluida la de su directora Charity Robey, refleja un elevado nivel de competencia profesional que debidamente reconocemos. Reconocemos asimismo el apoyo prestado, en forma de permiso sabático, por la Universidad Estatal e Instituto Politécnico de Virginia. Por último deseamos agradecer a nuestras esposas, Julia y Dale, la paciencia y comprensión mostradas durante las muchas horas que fueron necesarias para preparar este manuscrito.

J. L. Meriam
Santa Bárbara, California

L. Glenn Kraige
Blacksburg, Virginia

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

Índice analítico

PRÓLOGO V

PRÓLOGO PARA EL ESTUDIANTE VII

PRÓLOGO PARA EL PROFESOR IX

PARTE I DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

Capítulo 1: INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA 3

1.1 HISTORIA Y APLICACIONES MODERNAS 4
1.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES 5
1.3 LEYES DE NEWTON 6
1.4 UNIDADES 7
1.5 GRAVITACIÓN 8
1.6 DIMENSIONES 11
1.7 PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE DINÁMICA 11

Capítulo 2: CINEMÁTICA DEL PUNTO 15

2.1 INTRODUCCIÓN 16
2.2 MOVIMIENTO RECTILÍNEO 17
2.3 MOVIMIENTO CURVILÍNEO PLANO 33
2.4 COORDENADAS RECTANGULARES (*x-y*) 36
2.5 COORDENADAS TANGENCIAL Y NORMAL (*n-t*) 46

http://gratislibrospdf.com/

2.6 COORDENADAS POLARES (r-θ) 57
2.7 MOVIMIENTO CURVILÍNEO EN EL ESPACIO 69
2.8 MOVIMIENTO RELATIVO (EJES EN ROTACIÓN) 75
2.9 MOVIMIENTO VINCULADO DE PUNTOS MATERIALES CONECTADOS 84
2.10 REPASO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS 91

Capítulo 3: CINÉTICA DEL PUNTO MATERIAL 99

3.1 INTRODUCCIÓN 100

SECCIÓN A. FUERZA, MASA Y ACELERACIÓN 100

3.2 SEGUNDA LEY DE NEWTON 100
3.3 ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS 104
3.4 MOVIMIENTO RECTILÍNEO 106
3.5 MOVIMIENTO CURVILÍNEO 120

SECCIÓN B. TRABAJO Y ENERGÍA 135

3.6 TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA 135
3.7 ENERGÍA POTENCIAL 152

SECCIÓN C. IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO. 164

3.8 INTRODUCCIÓN 164
3.9 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO 165
3.10 IMPULSO ANGULAR Y MOMENTO CINÉTICO 178

SECCIÓN D. APLICACIONES ESPECIALES 187

3.11 INTRODUCCIÓN 187
3.12 CHOQUE 187
3.13 MOVIMIENTO BAJO FUERZAS CENTRALES 198
3.14 MOVIMIENTO RELATIVO 210
3.15 REPASO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS 220

Capítulo 4: CINÉTICA DE LOS SISTEMAS DE PUNTOS MATERIALES 231

4.1 INTRODUCCIÓN 232
4.2 GENERALIZACIÓN DE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON 232
4.3 TRABAJO Y ENERGÍA 234
4.4 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO 235
4.5 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO 239
4.6 MOVIMIENTO ESTACIONARIO DE UN MEDIO CONTINUO 249
4.7 MASA VARIABLE 264

http://gratislibrospdf.com/

PARTE II DINÁMICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS

Capítulo 5: CINEMÁTICA PLANA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS 281

5.1 INTRODUCCIÓN 282
5.2 ROTACIÓN 284
5.3 MOVIMIENTO ABSOLUTO 292
5.4 VELOCIDAD RELATIVA 303
5.5 CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN 317
5.6 ACELERACIÓN RELATIVA 323
5.7 MOVIMIENTO RELATIVO A EJES EN ROTACIÓN. 335
5.8 REPASO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. 350

Capítulo 6: CINÉTICA PLANA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS 357

6.1 INTRODUCCIÓN 358

SECCIÓN A. FUERZA, MASA Y ACELERACIÓN 359

6.2 ECUACIONES GENERALES DEL MOVIMIENTO 359
6.3 TRASLACIÓN 365
6.4 ROTACIÓN EN TORNO A UN EJE FIJO 375
6.5 MOVIMIENTO PLANO GENERAL 387

SECCIÓN B. TRABAJO Y ENERGÍA. 402

6.6 RELACIONES ENTRE EL TRABAJO Y LA ENERGÍA 402
6.7 DETERMINACIÓN DE ACELERACIONES MEDIANTE EL TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS; TRABAJOS VIRTUALES 419

SECCIÓN C. IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO 427

6.8 RELACIONES ENTRE EL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y EL MOMENTO CINÉTICO 427
6.9 REPASO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS 443

Capítulo 7: INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS EN EL ESPACIO 451

7.1 INTRODUCCIÓN 452

SECCIÓN A. CINEMÁTICA 452

7.2 TRASLACIÓN 452
7.3 ROTACIÓN EN TORNO A UN EJE FIJO 453

http://gratislibrospdf.com/

7.4 MOVIMIENTO PLANO GENERAL 453
7.5 ROTACIÓN EN TORNO A UN PUNTO FIJO 454
7.6 MOVIMIENTO GENERAL 464

SECCIÓN B. CINÉTICA 475

7.7 MOMENTO CINÉTICO 475
7.8 ENERGÍA CINÉTICA 478
7.9 ECUACIONES CINÉTICAS Y ENERGÉTICAS DEL MOVIMIENTO ..486
7.10 MOVIMIENTO PLANO GENERAL 489
7.11 MOVIMIENTO GIROSCÓPICO: PRECESIÓN UNIFORME 495

Capítulo 8: VIBRACIÓN Y RESPUESTA EN EL TIEMPO 515

8.1 INTRODUCCIÓN 516
8.2 OSCILACIONES LIBRES DE UN PUNTO MATERIAL 517
8.3 OSCILACIONES FORZADAS DE UN PUNTO MATERIAL 532
8.4 OSCILACIONES DE UN CUERPO RÍGIDO 545
8.5 MÉTODOS ENERGÉTICOS 555
8.6 REPASO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS 564

Apéndice A: MOMENTOS DE INERCIA DE UNA SUPERFICIE 571

Apéndice B: MOMENTOS DE INERCIA DE MASAS 573

B.1 MOMENTOS DE INERCIA MÁSICOS RESPECTO A UN EJE 573
B.2 PRODUCTOS DE INERCIA 587

Apéndice C: TEMAS ESCOGIDOS DE MATEMÁTICAS 597

C.1 INTRODUCCIÓN 597
C.2 GEOMETRÍA PLANA 597
C.3 GEOMETRÍA DEL ESPACIO 598
C.4 ÁLGEBRA 598
C.5 GEOMETRÍA ANALÍTICA 599
C.6 TRIGONOMETRÍA 600
C.7 ÁLGEBRA VECTORIAL 600
C.8 SERIES 603
C.9 DERIVADAS 604

http://gratislibrospdf.com/

C.10 INTEGRALES 604
C.11 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POR EL MÉTODO NUMÉRICO DE NEWTON 607
C.12 TÉCNICAS ESCOGIDAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA 608

Apéndice D: TABLAS ÚTILES 613

D.1 PROPIEDADES FÍSICAS 613
D.2 CONSTANTES DEL SISTEMA SOLAR 614
D.3 PROPIEDADES DE LAS FIGURAS PLANAS 614
D.4 PROPIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÉNEOS 617

CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS 621

ÍNDICE ALFABÉTICO 623

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

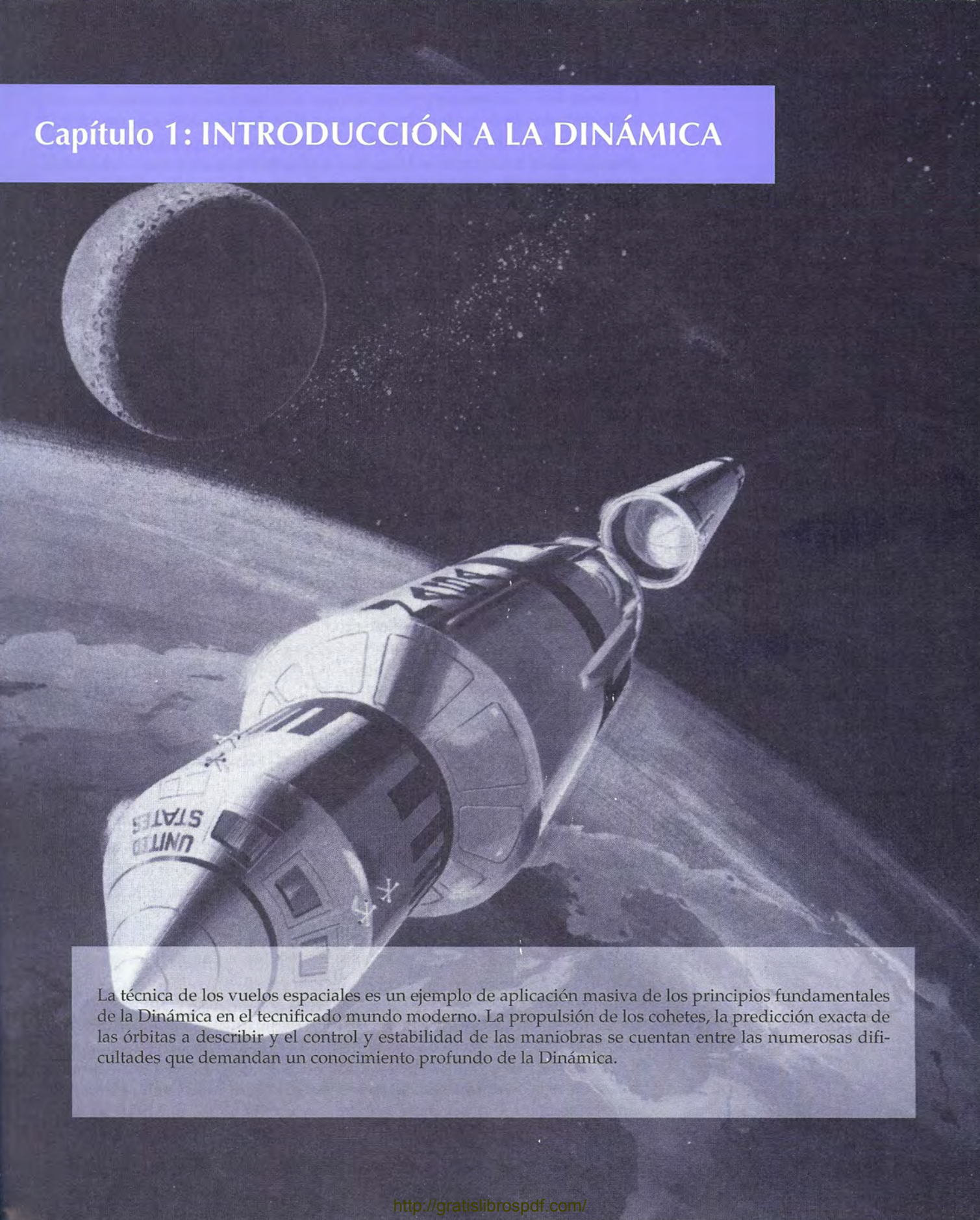
PARTE 1

DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

Capítulo 1: INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA



La técnica de los vuelos espaciales es un ejemplo de aplicación masiva de los principios fundamentales de la Dinámica en el tecnificado mundo moderno. La propulsión de los cohetes, la predicción exacta de las órbitas a describir y el control y estabilidad de las maniobras se cuentan entre las numerosas dificultades que demandan un conocimiento profundo de la Dinámica.

http://gratislibrospdf.com/

1.1 HISTORIA Y APLICACIONES MODERNAS

La Dinámica es la rama de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos bajo la acción de las fuerzas. En los estudios de ingeniería suele seguir a la Estática, que estudia la acción de las fuerzas sobre los cuerpos en reposo. La Dinámica consta de dos partes diferentes: una es la *Cinemática*, que es el estudio del movimiento sin referencia a las fuerzas que lo causan, y la otra es la *Cinética*, que relaciona la acción de las fuerzas sobre los cuerpos con los movimientos resultantes. Los estudiantes de ingeniería hallarán que el conocimiento profundo de la Dinámica les proporcionará uno de los instrumentos de análisis más útiles y potentes.

Históricamente, la Dinámica es una materia relativamente reciente comparada con la Estática. El mérito por la iniciación del estudio racional de la Dinámica se atribuye a Galileo (1564-1642), quién realizó cuidadosas observaciones sobre la caída libre de los cuerpos, el movimiento sobre planos inclinados y los péndulos. A él se debe en gran parte el planteamiento científico de la investigación de los problemas físicos. Sufrió continuas y durísimas críticas por negarse a aceptar las ideas oficialmente vigentes en su tiempo, tales como la filosofía de Aristóteles, según la cual, por ejemplo, los cuerpos pesados deberían caer más rápidamente que los livianos. La inexistencia de medios para medir el tiempo con precisión fue un grave obstáculo para Galileo y los posteriores avances de importancia en el estudio de la Dinámica tuvieron que aguardar hasta que Huyghens inventó el reloj de péndulo en 1657. Newton (1642-1727), guiado por los trabajos de Galileo, pudo formular con precisión las leyes del movimiento y con ello asentar la Dinámica sobre una base sólida. El famoso trabajo de Newton fue publicado en la primera edición de sus *Principia*, obra universalmente reconocida como una de las mayores contribuciones al conocimiento. Además de enunciar las leyes que rigen el movimiento del punto material, Newton fue el primero en formular correctamente la ley de la gravitación universal. Aún cuando su descripción matemática era correcta, tenía la impresión de que la idea de la transmisión a distancia de la fuerza gravitatoria sin un medio de soporte era absurda. Después de Newton, hicieron importantes contribuciones a la Mecánica Euler, D'Alambert, Lagrange, Laplace, Poinsot, Coriolis, Einstein y otros.

Por lo que respecta a su aplicación técnica, la Dinámica resulta ser una ciencia aún moderna. Sólo desde que las máquinas y estructuras funcionan a grandes velocidades y con aceleraciones apreciables ha sido necesario efectuar cálculos basados en los principios de la Dinámica y no en los de la Estática. Los rápidos desarrollos tecnológicos actuales exigen una aplicación cada vez mayor de los principios de la Mecánica, particularmente de los de la Dinámica. Estos principios son fundamentales para el análisis y diseño de estructuras móviles, de estructuras fijas sometidas a cargas dinámicas, de mecanismos robóticos, de sistemas de mando automático, de cohetes y naves espaciales, de vehículos de transporte terrestre y aéreo, de instrumentos basados en la balística electrónica y de maquinaria de todos los tipos tales como turbinas, bombas, máquinas alternativas, grúas, máquinas herramientas, etc. El alumno cuyo interés le lleve hacia una o más de estas actividades y de muchas otras se encontrará en la necesidad de aplicar los fundamentos de la Dinámica.

http://gratislibrospdf.com/

1.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Los conceptos fundamentales de la Mecánica fueron expuestos en el apartado 1.2 del tomo 1, *Estática*. Se resumen a continuación acompañados de comentarios adicionales de importancia particular para el estudio de la Dinámica.

Espacio es la región geométrica ocupada por los cuerpos. La posición en el espacio se determina respecto a un cierto sistema geométrico de referencia mediante medidas lineales y angulares. El sistema de referencia fundamental en el que son aplicables las leyes de la Mecánica newtoniana o Mecánica clásica, es el *sistema inercial primario* o *sistema astronómico de referencia*, que es un sistema imaginario de ejes mutuamente ortogonales que se supone no tienen traslación ni rotación en el espacio. Las medidas indican que las leyes de la Mecánica newtoniana son válidas para este sistema de referencia en tanto que las velocidades que intervengan sean despreciables frente a la de la luz, que es de 300 000 km/s. Las medidas efectuadas respecto a este sistema se dice que son *absolutas* y se considera que este sistema está "fijo" en el espacio. Un sistema solidario a la superficie de la Tierra tiene un movimiento un tanto complicado en el sistema de referencia primario, lo cual obliga a efectuar una corrección de las ecuaciones fundamentales de la Mecánica cuando las medidas se realicen respecto al sistema de referencia de la Tierra. Por ejemplo, en el cálculo de trayectoria de cohetes y en el vuelo espacial, el movimiento absoluto de la Tierra constituye un parámetro importante. En la mayoría de los problemas técnicos de máquinas y estructuras que permanecen sobre la superficie terrestre, las correcciones son pequeñísimas y pueden despreciarse. En estos problemas se pueden aplicar directamente las leyes de la mecánica a medidas efectuadas respecto a la Tierra y dichas medidas pueden considerarse *absolutas* desde un punto de vista práctico.

El **tiempo** es una medida de la sucesión de acontecimientos y en la Mecánica newtoniana se considera una magnitud absoluta.

La **masa** es la medida cuantitativa de la inercia o resistencia que presentan los cuerpos a cambiar su estado de movimiento. Puede asimismo considerarse como la cantidad de materia que posee un cuerpo y también como la propiedad que da origen a la atracción gravitatoria.

La **fuerza** es la acción, de naturaleza vectorial, que ejerce un cuerpo sobre otro cuerpo. Las propiedades de las fuerzas fueron tratadas a fondo en el tomo 1, *Estática*.

Un **punto material** o **partícula**, es un cuerpo de dimensiones despreciables. Además, cuando las dimensiones de un cuerpo no afectan a la descripción de su movimiento ni a la acción de las fuerzas sobre él, el cuerpo puede tratarse como si fuera una partícula. Por ejemplo, para describir la trayectoria de vuelo de un avión, éste puede tratarse como una partícula.

Un **cuerpo rígido** es aquél cuyas variaciones de forma son despreciables en comparación con sus dimensiones globales o con las variaciones de posición del cuerpo como un todo. Como ejemplo de la hipótesis de rigidez citemos el caso de un avión en vuelo en una turbulencia atmosférica. En tal caso, la flexión de las alas hace que los extremos de éstas se desplacen unos centímetros respecto al fuselaje de la aeronave, lo cual carece de importancia para la distribución media de las fuerzas aerodinámicas ejercidas sobre las alas o para la especificación del movimiento del avión en su conjunto en su trayectoria de vuelo. Por tanto, el tratamiento del avión como cuerpo rígido no presenta ninguna complicación. En cambio, si se tratara de examinar los esfuerzos internos

http://gratislibrospdf.com/

en la estructura de las alas debidos a cargas dinámicas cambiantes, habría que examinar las características de deformación de la estructura, para lo cual ya no podría considerarse el avión como un cuerpo rígido.

En el tomo 1, *Estática*, se trató ampliamente de **vectores** y **escalares**, por lo que la diferencia entre ambos debe estar ya perfectamente clara. Los escalares se representan con letras bastardillas o cursivas y los vectores con letras negrillas. Así, diremos que V (escalar) es el módulo del vector $\mathbf{V}$. Al escribir a mano es importante emplear una señal de identificación para los vectores que sustituya a la letra negrilla que se emplea en impresión; generalmente se emplea un signo en forma de flecha y el vector $\mathbf{V}$ se escribe $\vec{V}$. Recuérdese, por ejemplo, que en el caso de dos vectores no paralelos $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ y $V_1 + V_2$ significan cosas completamente diferentes.

Se supone que el lector ya está familiarizado con la geometría y el álgebra de los vectores gracias a sus estudios anteriores de matemáticas y también de Estática. Quienes necesiten repasar tales temas encontrarán un breve resumen en el apéndice C junto con otras relaciones matemáticas de uso frecuente en Mecánica. La experiencia revela que la geometría suele ser una fuente de dificultades en el estudio de la Mecánica. Ésta, por su propia naturaleza, es geométrica y los estudiantes deben tener presente este hecho cuando repasen sus conocimientos de matemáticas. Además del álgebra vectorial, la Dinámica requiere el empleo del cálculo vectorial infinitesimal, cuyos elementos esenciales serán expuestos en el texto a medida que sean necesarios.

En Dinámica intervienen frecuentemente las derivadas respecto al tiempo tanto de vectores como de escalares. Para abreviar la notación se emplearán puntos sobre la cantidad para representar derivación respecto al tiempo. Así, $\dot{x}$ significa dx/dt y $\ddot{x}$ significa d^2x/dt^2.

1.3 LEYES DE NEWTON

En el apartado 1.4 del tomo 1, *Estática*, se enunciaron las tres leyes del movimiento de Newton y aquí se repiten dada su especial importancia para la Dinámica. Expresadas en términos modernos son las siguientes:

Primera ley. Un punto material permanece en reposo o continúa en movimiento rectilíneo y uniforme si sobre él no se ejercen fuerzas desequilibradas.

Segunda ley. La aceleración de un punto material es proporcional a la fuerza resultante que se ejerce sobre él y tiene la dirección y sentido de dicha fuerza.

Tercera ley. Las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos en contacto son de igual intensidad y colineales y tienen sentidos opuestos.

La validez de estas leyes ha sido verificada mediante numerosas mediciones físicas de gran precisión. Las dos primeras son válidas para mediciones efectuadas en un sistema de referencia absoluto, pero deben corregirse levemente cuando lo son con respecto a un sistema de referencia que tenga aceleración, tal como la superficie terrestre.

La segunda ley de Newton constituye la base de la mayoría de los análisis en Mecánica. Aplicada a un punto material de masa m, sometido a una fuerza resultante $\mathbf{F}$, puede enunciarse en la forma

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.1}$$

http://gratislibrospdf.com/

donde **a** es la aceleración que se origina medida en un sistema de referencia no acelerado. La primera ley de Newton es consecuencia de la segunda, ya que no habrá aceleración si la fuerza es nula y en tal caso la partícula debe estar en reposo o moviéndose a velocidad constante. La tercera ley constituye el principio de acción y reacción que ya debemos conocer perfectamente de nuestros estudios de Estática.

1.4 UNIDADES

En este tomo 2, *Dinámica*, se emplea el Sistema Métrico Internacional, pese a que el antiguo Sistema Terrestre o Sistema Técnico, aún sigue empleándose con frecuencia en la vida cotidiana.

En la tabla siguiente se resumen las cuatro magnitudes fundamentales de la Mecánica y sus unidades en los dos sistemas:

Magnitud	Magnitud dimensional	Unidades SI		SISTEMA TERRESTRE O TÉCNICO	
		Unidad	Símbolo	Unidad	Símbolo
Masa	M	Unidades básicas: kilogramo	kg	—	UTM
Longitud	L	Unidades básicas: metro	m	Unidades básicas: metro	m
Tiempo	T	Unidades básicas: segundo	s	Unidades básicas: segundo	seg
Fuerza	F	newton	N	Unidades básicas: kilopondio	kgf, kp

En el SI, las magnitudes fundamentales o básicas son la masa, la longitud y el tiempo, y la fuerza es una magnitud derivada de éstas a través de la segunda ley de Newton (ec. 1.1). En el Sistema Técnico, las magnitudes fundamentales son la fuerza, la longitud y el tiempo, y la masa es una magnitud derivada de éstas a través de la segunda ley de Newton. (Recuérdese que la unidad técnica de masa carece de nombre y suele representarse con las letras UTM). El Sistema Internacional de unidades recibe el adjetivo de *absoluto* porque en el mismo se toma la masa como unidad absoluta o fundamental. Del Sistema Técnico o Terrestre se dice que es *gravitatorio* porque en él la fuerza (medida como atracción gravitatoria) constituye una magnitud fundamental. Esta distinción representa una diferencia esencial entre ambos sistemas.

La unidad internacional (o unidad SI) de fuerza recibe el nombre de newton y es, por definición, la fuerza capaz de imprimir a una masa de un kilogramo una aceleración de un metro por segundo al cuadrado. En el Sistema Técnico, una unidad de masa adquirirá una aceleración de un metro por segundo al cuadrado cuando sobre ella actúe una fuerza de un kilopondio. Entonces, según la ecuación 1.1, tenemos para estos sistemas

Unidades SI	Unidades Técnicas
$(1\ \text{N}) = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2)$ $\text{N} = \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$	$(1\ \text{kp}) = (1\ \text{UTM})(1\ \text{m/s}^2)$ $1\ \text{UTM} = \text{kp}\cdot\text{m/seg}^2/\text{m}$

http://gratislibrospdf.com/

En el Sistema Internacional cada símbolo representa únicamente una sola magnitud. Debe ponerse cuidado en emplear la palabra kilogramo *únicamente* como unidad de masa y *nunca* como unidad de fuerza. Suele ser habitual en el lenguaje común expresar pesos en kilogramos, pero debe quedar claro que en tal caso lo que se está expresando son medidas de pesos (fuerzas) en kilogramos fuerza o kilopondios, y que por tanto está implícito el hecho de que se están expresando en el Sistema Técnico. Hay que tener cuidado, pues, en utilizar el símbolo *kg* exclusivamente para representar masas en el Sistema Internacional y el símbolo *kp* (o el *kgf*) exclusivamente para representar fuerzas en el Sistema Técnico. Hacia el final del apartado 1.5 próximo se recordará la relación entre ambos sistemas, tal como se expuso en el apartado 1.6 del tomo 1, *Estática*. En este texto se emplea exclusivamente el Sistema Internacional, salvo en algún problema de este capítulo con fines aclaratorios.

En Mecánica se emplean otras magnitudes cuyas unidades SI se irán definiendo a medida que aparezcan en los capítulos que siguen. Para el uso coherente de estas unidades hay establecidas unas pautas, las cuales se han seguido a lo largo de todo el libro.

1.5 GRAVITACIÓN

La ley de la gravitación, formulada por Newton, que rige la atracción mutua entre cuerpos es

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1.2}$$

donde

F = fuerza de atracción mutua entre dos partículas
G = constante universal llamada constante de gravitación
m_1, m_2 = masas de las partículas
r = distancia entre los centros de las partículas

Según datos experimentales, el valor de la constante de gravitación es $G = 6{,}673(10^{-11})\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}$. En la superficie terrestre, la única fuerza gravitatoria de intensidad apreciable es la debida a la atracción ejercida por la Tierra. Por ejemplo, en el tomo 1, *Estática*, se vio que dos bolas de hierro de 100 mm de diámetro se ven atraídas cada una por la Tierra con una fuerza gravitatoria de 37,1 N, fuerza ésta que llamamos *peso*, pero entre ellas se ejercen una fuerza de atracción mutua de 0,000 000 095 1 N.

Dado que la atracción gravitatoria que sufre un cuerpo o peso del cuerpo es una fuerza, los pesos deberán expresarse siempre en unidades de fuerza, es decir, en newtons (N) en el Sistema Internacional o bien en kilopondios (kp) o kilogramos fuerza (kgf) en el Sistema Técnico. Por desgracia y como ya se ha señalado, la unidad de masa (kg) se ha empleado habitualmente como medida de peso. Si se expresa en kilogramos, la palabra "peso" significa técnicamente "masa". Para evitar confusiones, en este libro se reserva la palabra "peso" para expresar la atracción gravitatoria y se expresará siempre en newtons o kilopondios.

La fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre un cuerpo depende de la posición de éste respecto de aquélla. Si la Tierra fuese una esfera perfecta del mismo volumen, un cuerpo de masa exactamente 1 kg se vería

http://gratislibrospdf.com/

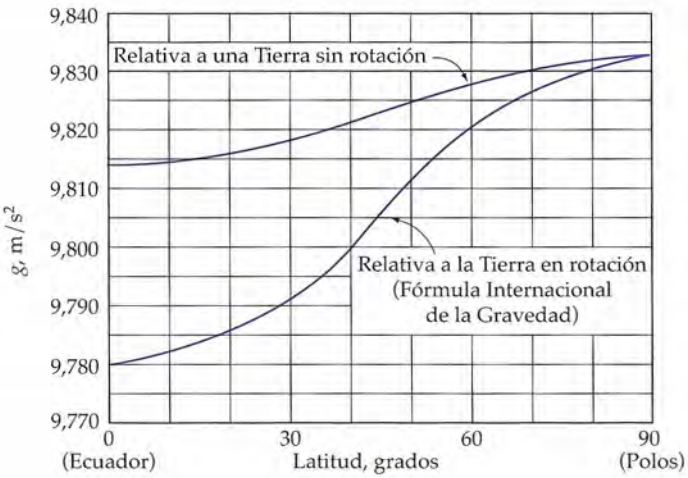


Figura 1.1

atraído hacia el centro de la Tierra con una fuerza de 9,825 N si estuviera situado en la superficie terrestre, con una fuerza de 9,822 N a una altitud de 1 km, con una fuerza de 9,523 N a una altitud de 100 km, con una fuerza de 7,340 N a una altitud de 1000 km y con una fuerza de 2,456 N a una altitud igual al radio medio de 6371 km de la Tierra. Se comprende de inmediato que la variación de la atracción gravitatoria es un dato a tener muy en cuenta en lo que respecta a cohetes de gran altura y naves espaciales.

Todo cuerpo que se deje caer en el vacío desde una posición dada cerca de la superficie terrestre tendrá siempre la misma aceleración g, tal como se deduce combinando las ecuaciones 1.1 y 1.2 y eliminando el factor común que representa la masa del cuerpo que cae. Dicha combinación da

$$g = \frac{Gm_e}{R^2}$$

donde m_e es la masa de la Tierra y R es el radio de la Tierra[1]. Experimentalmente se ha determinado que la masa m_e y el radio medio R de la Tierra valen, respectivamente, $5{,}976(10^{24})$ kg y $6{,}371(10^6)$ m. Si se aplican estos valores, junto al de G ya citado, la expresión de g da un valor medio $g = 9{,}825\ \text{m/s}^2$.

La aceleración de la gravedad determinada según la ley de gravitación es la aceleración que se mediría en una sistema de ejes de referencia cuyo centro estuviera en el centro de la Tierra pero que no girase con ésta. Respecto a estos ejes "fijos", ese valor podría llamarse valor absoluto de g. A causa del hecho de que la Tierra rota, la aceleración de un cuerpo en caída libre, medida desde una posición solidaria a la superficie terrestre es levemente inferior al valor absoluto. Los valores exactos de la aceleración de la gravedad medidos con relación a la superficie terrestre están afectados por el hecho de que la Tierra es un esferoide oblongo achatado por los polos. Tales valores pueden calcularse con un

[1] Se puede demostrar que si se toma la Tierra como una esfera con distribución simétrica de su masa respecto al centro, se puede considerar toda ella como un punto material con toda su masa concentrada en el centro.

http://gratislibrospdf.com/

alto grado de precisión con la Fórmula Internacional de la Gravedad de 1980, que es

$$g = 9{,}780\,327(1 + 0{,}005\,279\,\text{sen}^2\,\gamma + 0{,}000\,023\,\text{sen}^4\,\gamma + \ldots)$$

donde γ es la latitud y g se expresa en metros por segundo al cuadrado. La fórmula está basada en un modelo elipsoidal para la Tierra y además tiene en cuenta el efecto de la rotación de ésta. La aceleración absoluta de la gravedad determinada para una Tierra sin rotación puede calcularse, con buena aproximación, a partir de los valores relativos sumando $3{,}382(10^{-2})\cos^2\gamma$ m/s^2, con lo que se elimina el efecto de la rotación terrestre. En la figura 1.1 se presenta la variación con la latitud de los valores absoluto y relativo de g al nivel del mar.[1]

El valor normalizado internacionalmente aceptado para la aceleración de la gravedad con relación a una Tierra en rotación, a nivel del mar y a una latitud de 45°, es de 9,806 65 m/s^2. Este valor difiere levemente del que se obtiene con la Fórmula Internacional de la Gravedad particularizada para $\gamma = 45°$. Tal diferencia hay que achacarla a que la Tierra no sea exactamente un elipsoide, tal como se supone al establecer dicha Fórmula.

La proximidad de grandes masas sólidas y las variaciones de densidad de la corteza terrestre influyen también en el valor local de g en cuantía pequeña, pero detectable. En casi todos los problemas técnicos en que se efectúan mediciones sobre la superficie de la Tierra se desprecian la diferencia entre los valores absoluto y relativo de la aceleración de la gravedad y el efecto de las variaciones locales, y se toma como valor de g al nivel del mar 9,81 m/s^2.

La variación de g con la altitud se determina fácilmente mediante la ley de la gravitación. Si g_0 representa la aceleración absoluta de la gravedad al nivel del mar, el valor absoluto a una altura h es

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

donde R es el radio de la Tierra.

La atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre un cuerpo puede calcularse partiendo de los resultados del sencillo experimento gravitatorio. Si la fuerza de atracción gravitatoria o peso verdadero de un cuerpo es **W**, como ese cuerpo caerá con una aceleración absoluta **g** en el vacío, la ecuación 1.1 da

$$\mathbf{W} = m\mathbf{g} \tag{1.3}$$

El peso aparente de un cuerpo determinado con un dinamómetro graduado para indicar la fuerza correcta y unido a la superficie terrestre, será ligeramente inferior a su peso verdadero. La diferencia se debe a la rotación de la Tierra. La razón del peso aparente a la aceleración de la gravedad aparente o relativa, sigue dando el valor correcto de la masa. El peso aparente y la aceleración relativa de la gravedad son, desde luego, las magnitudes que se miden en los experimentos realizados en la superficie de la Tierra.

Si, tal como se estableció antes, se toma para g un valor de 9,81 m/s^2 al nivel del mar, según la ecuación 1.3 el peso de la masa patrón (véase tomo 1, *Estática*, apdo. 1.5) en unidades SI será (1 kg)·(9,81m/s^2) = 9,81 N.

[1] El estudiante podrá deducir estas relaciones para una Tierra esférica al estudiar el movimiento relativo en el capítulo 3.

http://gratislibrospdf.com/

En el Sistema Técnico el peso de la masa patrón es por definición la unidad de fuerza o kilopondio o kilogramo-fuerza. Resulta entonces que

$$1 \text{ kp} = 9{,}81 \text{ N}$$

puesto que ambos valores expresan el peso de la misma masa. Según la ecuación 1.3, en el Sistema Técnico la masa patrón valdrá (1/9,81) UTM. Tal como ya se ha dicho, la unidad de masa en el Sistema Técnico carece de nombre específico y suele expresarse mediante las iniciales UTM. No se emplea en esta obra, salvo en algunos problemas de este capítulo a efectos aclaratorios.

1.6 DIMENSIONES

Una dimensión dada, tal como longitud, puede expresarse mediante diferentes unidades como metros, milímetros o kilómetros. Así pues, distinguiremos entre la palabra *dimensión* y la palabra *unidad*. Las relaciones físicas deben ser siempre homogéneas dimensionalmente, es decir, las dimensiones de todos los términos de una ecuación han de ser las mismas. Se acostumbra emplear los símbolos L, F, T y M para representar longitud, fuerza, tiempo y masa, respectivamente. En unidades SI la fuerza es una magnitud derivada y en virtud de la ecuación 1.1 posee las dimensiones de masa por aceleración o sea

$$F = ML/T^2$$

Una aplicación muy importante del análisis dimensional es la comprobación de la corrección dimensional de las relaciones físicas deducidas. Entre la velocidad v de un cuerpo de masa m que, a partir del reposo, se desplaza una distancia horizontal x bajo la acción de una fuerza F se deduce que existe la relación

$$Fx = \tfrac{1}{2}mv^2$$

donde $\frac{1}{2}$ es un coeficiente adimensional resultante de una integración. Esta ecuación es dimensionalmente correcta puesto que al sustituir por L M y T resulta

$$[MLT^{-2}][L] = [M][LT^{-1}]^2$$

Para que una fórmula o ecuación sea correcta, la homogeneidad dimensional es una condición necesaria pero no suficiente, ya que los coeficientes adimensionales no pueden comprobarse de este modo.

1.7 PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE DINÁMICA

El estudio de la Dinámica se dirige hacia la descripción de las diversas cantidades que intervienen en el movimiento de los cuerpos. Esta descripción, que es principalmente matemática, permite formular predicciones acerca del comportamiento dinámico. El estudiante debe reconocer la necesidad de un proceso de pensamiento dual. Debe pensar con arreglo a la situación física y también de acuerdo con la descripción matemática correspondiente. El estudio de todo problema requerirá la transición repetida del pensamiento del punto de vista físico al punto de vista matemático. No hay duda de que las mayores dificul-

http://gratislibrospdf.com/

tades que encuentran los estudiantes en Mecánica es la falta de capacidad para realizar esta transición libremente, vinculando estos dos procesos mentales. El estudiante deberá realizar un gran esfuerzo para enlazar cada concepto físico con su correspondiente expresión matemática. Deberá reconocer que la formulación matemática de un problema físico representa un modelo o descripción límite ideal, que se aproxima pero que nunca alcanza por completo la situación física real.

Al construir el modelo matemático idealizado para un problema técnico dado, siempre se harán ciertas aproximaciones. Algunas de éstas serán de índole matemática y otras de índole física. Por ejemplo, suele ser preciso despreciar distancias, ángulos o fuerzas que sean pequeñas, frente a otras distancias, ángulos o fuerzas mucho mayores. Si la variación de velocidad de un cuerpo con el tiempo es casi uniforme, será admisible suponer constante la aceleración. Un intervalo de movimiento que no pueda describirse fácilmente en toda su extensión suele dividirse en pequeños intervalos, cada uno de los cuales pueda ser aproximado. El efecto retardador del rozamiento en los cojinetes, sobre el movimiento adquirido por una máquina a consecuencia de fuerzas o momentos aplicados, se puede a menudo despreciar si las fuerzas de rozamiento son pequeñas. Sin embargo, esas mismas fuerzas no podrán despreciarse si el fin de la investigación es determinar la disminución del rendimiento de la máquina a causa del proceso de rozamiento. Así pues, hasta qué extremo pueden formularse hipótesis, dependerá de la información que se desee y de la precisión exigida. El estudiante deberá estar constantemente atento a las diversas hipótesis que se hagan para la formulación de los problemas reales. La habilidad para comprender y utilizar las hipótesis apropiadas en la formulación y solución de problemas técnicos es, ciertamente, una de las características más importantes de un buen ingeniero. Junto con el desarrollo de los principios e instrumentos analíticos necesarios en la Dinámica moderna, uno de los principales fines de este libro es proporcionar un máximo de oportunidades para desarrollar esta habilidad de formulación de modelos matemáticos. Se hará mucho hincapié en una amplia variedad de problemas prácticos, que no sólo exigen el ejercicio completo de la teoría, sino que también obligan a considerar las decisiones que hay que tomar relativas a hipótesis importantes.

Es esencial un método de ataque eficaz de los problemas de Mecánica, como de todos los problemas técnicos. El desarrollo del hábito de formular problemas y de representar sus soluciones es de un valor extraordinario. Cada resolución debe progresar a través de una sucesión lógica de pasos que llevan desde la hipótesis a la conclusión y su representación deberá incluir un enunciado claro de las partes siguientes, cada una de ellas identificada con toda claridad:

1. Datos
2. Resultados pedidos
3. Diagramas necesarios
4. Cálculos
5. Respuestas y conclusiones

Es conveniente, además, incorporar una serie de comprobaciones de los cálculos en puntos intermedios de la resolución. Deberá observarse si el orden de magnitud de los valores numéricos es razonable y deberá comprobarse con frecuencia la precisión y la homogeneidad de los términos. Es también importante que la distribución del trabajo sea limpia y ordenada. Las resoluciones descuidadas que no puedan ser leídas fácilmente por los demás, son de poco valor o carecen de él. Se verá que la disciplina inherente a una buena forma constituye en sí misma una valiosísima ayuda al desarrollo de las capacidades

http://gratislibrospdf.com/

de formulación y análisis. Muchos problemas que puedan parecer, al principio, difíciles y complicados, resultan claros y sencillos una vez que se han afrontado con un método de ataque lógico y disciplinado.

La Dinámica se basa en un número sorprendentemente reducido de conceptos fundamentales e implica, principalmente, la aplicación de estas relaciones fundamentales a una diversidad de situaciones. Uno de los aspectos más valiosos del estudio de la Dinámica es la experiencia adquirida al razonar partiendo de los principios fundamentales. Esta experiencia no puede obtenerse simplemente memorizando las ecuaciones de Cinemática y de Dinámica que describen diversos movimientos. Debe obtenerse enfrentándose a una amplia variedad de problemas que obliguen a la elección, empleo y extensión de los principios fundamentales para satisfacer las condiciones dadas.

Al describir las relaciones entre las fuerzas y los movimientos que originan, es esencial que se defina claramente el sistema al cual se aplica el principio. A veces, el sistema que hay que aislar es un punto material o partícula, o un cuerpo rígido, mientras que otras veces son dos o más cuerpos tomados juntos los que constituyen el sistema. La definición del sistema que se quiere analizar queda clara construyendo su *diagrama de sólido libre*. Este diagrama consiste en un dibujo de forma cerrada que representa los límites exteriores del sistema definido. Se suprimen todos los cuerpos que están en contacto con el sistema y ejercen fuerzas sobre él pero no forman parte del mismo, y se sustituyen por vectores que representen las fuerzas que ejercen *sobre* el sistema aislado. De esta manera se establece una distinción clara entre la acción y la reacción de cada fuerza y se tienen en cuenta *todas* las fuerzas que se ejercen sobre el sistema desde el exterior. Se supone que el estudiante está familiarizado con la técnica del trazado de diagramas de sólido libre, en la que ya se habrá ejercitado anteriormente al estudiar la Estática.

Al aplicar las leyes de la Dinámica, se pueden emplear directamente los valores numéricos de las cantidades al buscar la solución o bien pueden utilizarse símbolos algebraicos para representar las cantidades que intervienen y dejar la respuesta en forma de fórmula. En el primer procedimiento, en cada etapa del cálculo queda en evidencia el orden de magnitud de todas las cantidades expresadas en sus unidades particulares. Esto suele ser una ventaja cuando se valore el significado práctico del orden de magnitud de los términos. Sin embargo, la solución simbólica presenta varias ventajas respecto a la numérica. En primer lugar, la abreviatura lograda con la utilización de símbolos ayuda a concentrar la atención sobre la interconexión entre la situación física y la descripción matemática con ella relacionada. En segundo lugar, una solución simbólica permite la comprobación dimensional que puede realizarse a cada paso, mientras que cuando se utilizan valores numéricos no puede comprobarse la homogeneidad dimensional. En tercer lugar, una solución dimensional se puede emplear repetidamente para obtener respuestas al mismo problema cuando puedan existir otros conjuntos de valores y unidades. La facilidad con ambos métodos de solución es esencial y convendrá adquirir una buena práctica en la resolución de problemas.

El estudiante descubrirá que hay tres maneras de hallar las soluciones a las distintas ecuaciones de la Dinámica. Primera, puede ser una solución matemática directa por cálculo manual en la que las respuestas aparezcan bien con símbolos algebraicos, bien con resultados numéricos. La mayoría de los problemas están comprendidos en esta categoría. Segunda, hay problemas que se resuelven fácilmente por métodos gráficos, como ocurre en la determinación

http://gratislibrospdf.com/

de velocidades y aceleraciones en problemas de movimiento relativo bidimensional de cuerpos rígidos. Tercera, en este tomo 2, *Dinámica*, se presenta un cierto número de *problemas orientados al ordenador*. Situados a continuación de los problemas de repaso, se han elegido para ilustrar en qué tipos de problemas la solución mediante ordenador ofrece una ventaja de todo punto evidente. La elección de la forma más expeditiva de resolución constituye un aspecto importante de la experiencia que se debe adquirir en la resolución de problemas. Subrayemos, empero, que la experiencia más importante que se debe adquirir en el estudio de la Dinámica reside en el planteamiento de los problemas, a diferencia de lo que es su resolución en sí.

PROBLEMAS

(Las constantes del Sistema Solar pueden encontrarse en la tabla D.2 del apéndice D.)

1.1 Hallar el peso en newtons de una persona cuya masa es 80 kg. Expresar esta masa en UTM y calcular el correspondiente peso en kilopondios.

Resp. $W = 784{,}8$ N, $m = 8{,}15$ UTM, $W = 80$ kp

1.2 Halle su propia masa en UTM. Convierta su peso en newtons y calcule la correspondiente masa en kilogramos.

1.3 ¿A qué altura h por encima del Polo Norte se reduce el peso de un objeto al 10% de su valor en la superficie terrestre? Supóngase que la Tierra es una esfera de radio R y exprésese h en función de R.

Resp. $h = 2{,}16R$

1.4 Una lanzadera espacial describe una órbita circular a 250 km de altura. Calcular el valor absoluto de g a esa altura y hallar el correspondiente peso verdadero (fuerza gravitatoria) de un pasajero del vehículo cuyo peso es 880 N medido en la superficie terrestre a una latitud de 45°. ¿Son correctos, en sentido absoluto, los términos "cero-g" e "ingravidez" que a veces se emplean para describir la situación en las naves espaciales en órbita?

1.5 Calcular la fuerza F_s que ejerce el Sol sobre un hombre de 90 kg que se encuentre en la superficie de la Luna y compararla con la fuerza F_l que sobre el mismo hombre ejerce la Luna.

Resp. $F_s = 0{,}534$ N, $F_l = 146$ N

1.6 Considérense dos esferas de diámetro 100 mm cada una, exactamente en contacto. ¿A qué distancia r del centro de la Tierra serán iguales las fuerzas de atracción entre las esferas y la que ejerce la Tierra sobre cada una?

1.7 Calcular la aceleración relativa de la gravedad para la Tierra en rotación y su valor absoluto para una Tierra sin rotación al nivel del mar y a una latitud norte o sur de 45°. Comparar los resultados con los valores de la figura 1.1.

Resp. $g_{rel} = 9{,}806$ m/s^2, $g_{abs} = 9{,}823$ m/s^2

1.8 Hallar el cociente R_A entre la fuerza que ejerce el Sol sobre la Luna y la que ejerce la Tierra sobre la Luna en la posición A de ésta. Repetir el cálculo para la posición B.

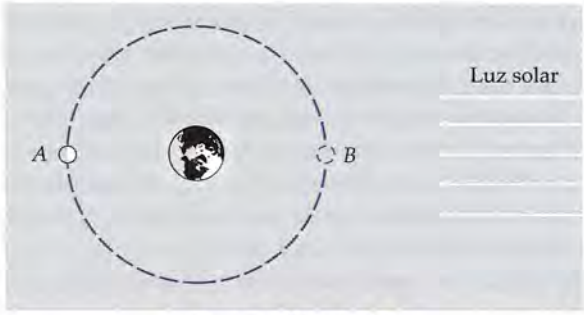


Figura problema 1.8

1.9 Calcular a qué distancia d del centro de la Tierra una partícula experimentará la misma atracción de la Tierra que de la Luna. Nos limitamos a las posiciones de la partícula sobre la recta que une los centros de la Tierra y la Luna. Justificar físicamente la existencia de dos soluciones.

Resp. $d = 346\,000$ km o 432 348 km

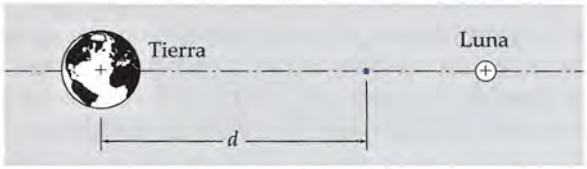


Figura problema 1.9

1.10 Comprobar la homogeneidad dimensional de la ecuación siguiente

$$mv = \int_{t_1}^{t_2} (F \cos \theta)\, dt$$

donde m es masa, v es velocidad, F es fuerza, θ es un ángulo y t es tiempo.

http://gratislibrospdf.com/

Capítulo 2: CINEMÁTICA DEL PUNTO

La descripción de la trayectoria de un punto material en términos geométricos y en función del tiempo es una parte fundamental de la Dinámica. Esta fotografía en cadena de los rebotes de una pelota registra la trayectoria de la misma y concuerda muy estrechamente con la trayectoria que somos capaces de predecir mediante un cálculo basado en la gravedad y en la teoría de choques.

http://gratislibrospdf.com/

2.1 INTRODUCCIÓN

La Cinemática es la parte de la Dinámica que describe el movimiento de los cuerpos sin referencia a las fuerzas que lo causan ni a las que se generan a consecuencia del mismo. Es frecuente referirse a ella como a la "geometría del movimiento". El diseño de levas, engranajes, sistemas articulados y otros órganos de máquinas que controlan o producen movimientos previamente determinados y el cálculo de las trayectorias de vuelo de aviones, cohetes y naves espaciales son algunos ejemplos de los problemas de cinemática que ocupan la atención de los ingenieros. El conocimiento práctico profundo de la Cinemática es un requisito previo imprescindible para estudiar Cinética, en la que se estudian las relaciones entre el movimiento y las correspondientes fuerzas que lo causan o lo acompañan.

En este capítulo se comienza el estudio de la Cinemática considerando primero el movimiento de las partículas o puntos materiales. Una partícula o punto material es todo cuerpo cuyas dimensiones, comparadas con el radio de curvatura de su trayectoria, son tan pequeñas que su movimiento puede tratarse como si fuera el movimiento de un punto. Por ejemplo, la envergadura de un reactor comercial que vuele de Los Angeles a New York no es significativa comparada con la curvatura de su trayectoria de vuelo y el considerar al avión cual si fuera una partícula no debe plantear inconvenientes.

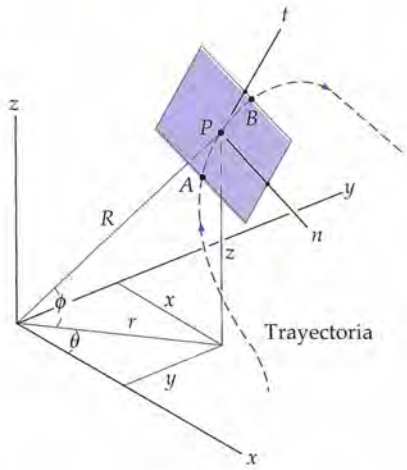


Figura 2.1

El movimiento de un punto material puede describirse de varias formas y la elección del método más adecuado o más cómodo depende en gran medida de la experiencia y del modo en que se presentan los datos. Resumamos brevemente los distintos métodos que se desarrollan en este capítulo refiriéndonos a la figura 2.1 en la que se representa un punto material P moviéndose en el espacio a lo largo de una trayectoria cualquiera. Cuando el punto está obligado a moverse a lo largo de una trayectoria prefijada, como si fuera una cuenta que se deslizara por un alambre fijo, se dice que el movimiento es *vinculado*. Cuando no existen guías materiales, se dice que el movimiento es *no vinculado*. Una pequeña piedra sujeta al extremo de una cuerda a la que se hace mover circularmente se encuentra en movimiento vinculado hasta que se rompe la cuerda, instante en que el movimiento se convierte en no vinculado.

La posición de un punto P en un instante t cualquiera puede especificarse mediante sus coordenadas rectangulares[1] x, y y z, sus coordenadas cilíndricas r, θ y z o sus coordenadas esféricas R, θ y ϕ. El movimiento de P puede asimismo describirse mediante mediciones a lo largo de la tangente t y de la normal n a la trayectoria. Estos valores se conocen como *variables locales*. La recta soporte de n se encuentra en el plano osculador de la curva[2].

El movimiento de partículas (y de cuerpos rígidos) puede describirse empleando coordenadas medidas respecto a ejes de referencia fijos (análisis del *movimiento absoluto*) o empleando coordenadas medidas respecto a ejes de referencia móviles (análisis del *movimiento relativo*). En los apartados siguientes se desarrollan y aplican ambos tipos de descripción.

Teniendo presente esta imagen cualitativa del movimiento de un punto material, en la primera parte de este capítulo limitaremos nuestra atención al caso

[1] Llamadas coordenadas cartesianas en honor de René Descartes (1596-1650), matemático francés que fue uno de los fundadores de la geometría analítica.

[2] El plano que contiene a P y a los dos puntos A y B, uno a cada lado de P, se convierte en plano osculador cuando las distancias entre dos puntos se aproximan a cero. *Osculador* deriva del latín, *osculari*, que significa "besar".

http://gratislibrospdf.com/

de *movimiento plano*, en el que todos los movimientos ocurren o pueden representarse como si ocurrieran en un solo plano. Los movimientos de una gran proporción de máquinas y estructuras pueden representarse como movimientos planos. Más adelante, en el capítulo 7, se presentará una introducción al movimiento tridimensional. Empezaremos el estudio del movimiento plano por el *movimiento rectilíneo*, movimiento que tiene lugar a lo largo de una línea recta, a lo que seguirá la descripción del movimiento a lo largo de una curva plana.

2.2 MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Consideremos un punto material P que se mueve a lo largo de una recta (fig. 2.2). La posición de P en un instante cualquiera t puede especificarse por su distancia s a cierto punto de referencia O fijo en la recta. En el instante $t + \Delta t$ el punto se habrá desplazado a P' y su coordenada habrá pasado a ser $s + \Delta s$. La variación de la coordenada de posición durante el intervalo Δt recibe el nombre de *desplazamiento* Δs del punto. Si éste se moviera en el sentido negativo de s, el desplazamiento sería negativo.

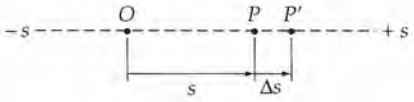


Figura 2.2

La velocidad media del punto durante el intervalo de tiempo Δt es el desplazamiento dividido por el intervalo de tiempo, o sea $v_{\text{med}} = \Delta s / \Delta t$. A medida que Δt se va haciendo menor y tiende a cero en el límite, la velocidad media tiende a ser la *velocidad instantánea* del punto, la cual es $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, o sea

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \tag{2.1}$$

Resulta así que la velocidad es la variación por unidad de tiempo de la coordenada de posición s, y será positiva o negativa según que el desplazamiento correspondiente sea positivo o negativo.

La aceleración media del punto material durante el intervalo de tiempo Δt es la variación de su velocidad dividida por el intervalo de tiempo, o sea $a_{\text{med}} = \Delta v / \Delta t$. A medida que Δt se va haciendo menor y tiende a cero en el límite, la aceleración media tiende a ser la *aceleración instantánea* del punto, la cual es $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, o sea

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \qquad \text{o bien} \qquad a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} \tag{2.2}$$

La aceleración será positiva o negativa según que la velocidad aumente o disminuya. Obsérvese que la aceleración sería positiva en el caso de que la partícula tuviese una velocidad negativa, pero fuese cada instante menos negativa. Cuando el punto disminuye de velocidad siendo ésta todavía positiva, se dice que el punto se está *desacelerando*; en tal caso, la aceleración sería negativa y su sentido sería opuesto al de la velocidad.

En realidad y tal como veremos a partir del próximo apartado 2.3, la velocidad y la aceleración son magnitudes vectoriales. En lo que respecta al movimiento rectilíneo tratado en este apartado, en el que la dirección del movimiento es la de la trayectoria recta dada, el sentido del vector sobre ésta última se especifica mediante un signo más o menos. Cuando tratemos del movimiento curvilíneo tendremos en cuenta los cambios de dirección de los vectores velocidad y aceleración, así como sus cambios de intensidad.

http://gratislibrospdf.com/

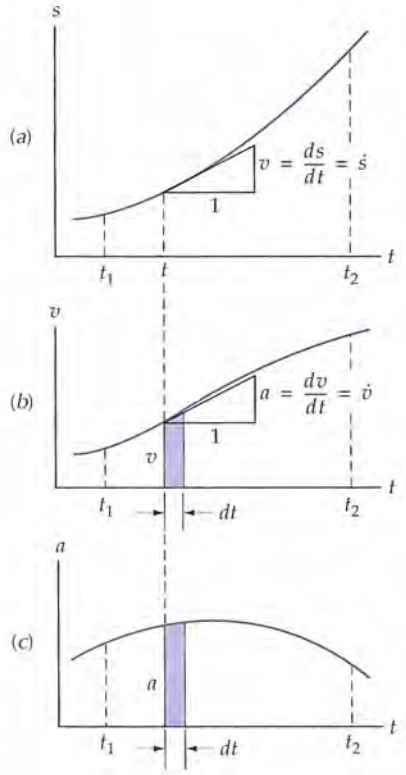


Figura 2.3

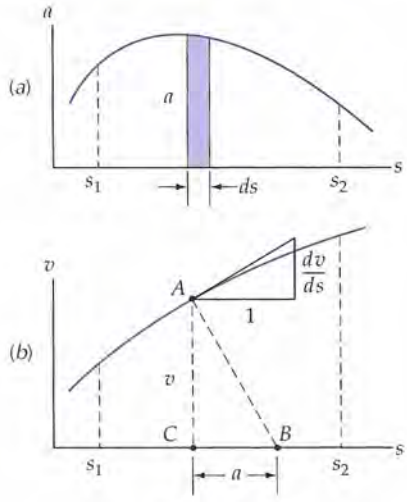


Figura 2.4

Eliminando el tiempo dt entre la ecuación 2.1 y la primera de las 2.2[1] resulta una ecuación diferencial que relaciona el desplazamiento, la velocidad y la aceleración:

$$v\,dv = a\,ds \qquad \text{o bien} \qquad \dot{s}\,d\dot{s} = \ddot{s}\,ds \tag{2.3}$$

Las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3 son las ecuaciones diferenciales del movimiento rectilíneo de un punto. Los problemas de movimiento rectilíneo en los que intervengan variaciones finitas de los desplazamientos y velocidades se resuelven integrando estas ecuaciones diferenciales fundamentales. El desplazamiento s, la velocidad v y la aceleración a son cantidades algebraicas, por lo que sus signos, positivos o negativos, deberán observarse cuidadosamente. Adviértase que los sentidos positivos de v y a son los mismos que el de s.

Representando gráficamente las relaciones entre s, v, a y t se consigue aclarar considerablemente la interpretación de las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento rectilíneo. En la figura 2.3*a* se representa un esquema de la variación de s entre los instantes t_1 y t_2 para un cierto movimiento rectilíneo conocido. Dibujando la tangente a la curva en un instante cualquiera t se obtiene la pendiente, que es la velocidad $v = ds/dt$, y así resulta que la velocidad puede determinarse en todos los puntos de la curva y representarse gráficamente en función de los tiempos correspondientes, tal como se muestra en la figura 2.3*b*. Análogamente, la pendiente dv/dt de la curva v-t en cualquier instante nos dará la aceleración en dicho instante y, por tanto, podremos representar gráficamente la curva a-t como en la figura 2.3*c*.

En la figura 2.3*b* se ve en seguida que el área limitada bajo la curva v-t durante el tiempo dt es $v\,dt$ que, según la ecuación 2.1 es el desplazamiento ds. En consecuencia, el desplazamiento total de la partícula durante el intervalo t_1 a t_2 es el área correspondiente bajo la curva, que es

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \qquad \text{o bien} \qquad s_2 - s_1 = (\text{área bajo la curva } v\text{-}t)$$

Análogamente, en la figura 2.3*c* se ve que el área limitada bajo la curva a-t durante el tiempo dt es $a\,dt$ que, según la primera de las ecuaciones 2.2, es dv. Así pues, la variación total de la velocidad entre t_1 y t_2 será el área correspondiente limitada bajo la curva, que es

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt \qquad \text{o bien} \qquad v_2 - v_1 = (\text{área bajo la curva } a\text{-}t)$$

Se observan otras dos relaciones gráficas. Cuando se representa la aceleración a en función del desplazamiento s (fig. 2.4*a*), el área limitada bajo la curva durante un desplazamiento ds es $a\,ds$ que, según la ecuación 2.3, es $v\,dv = d(v^2/2)$. Así pues, el área total limitada bajo la curva entre los desplazamientos s_1 y s_2 será

$$\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \int_{s_1}^{s_2} a\,ds \qquad \text{o bien} \qquad \tfrac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = (\text{área bajo la curva } a\text{-}s)$$

Cuando se representa gráficamente la velocidad v en función del desplazamiento s (fig. 2.4*b*), la pendiente de la curva en un punto A cualquiera es

[1] Las cantidades diferenciales se pueden multiplicar y dividir de la misma forma que las cantidades algebraicas.

http://gratislibrospdf.com/

dv/ds. Construyendo la normal AB a la curva en este punto, por semejanza de triángulos se ve que $\overline{CB}/v = dv/ds$. Así pues, en virtud de la ecuación 2.3, $\overline{CB} = v(dv/ds) = a$, que es la aceleración. Es necesario que los ejes de velocidad y de desplazamiento tengan la misma escala numérica para que la aceleración leída en metros, por ejemplo, en la escala de desplazamientos represente la aceleración verdadera en metros por segundo cuadrado.

Las representaciones gráficas descritas son útiles no sólo para visualizar las relaciones existentes entre las distintas cantidades cinemáticas sino también para estimar los resultados por derivación o integración gráfica cuando la falta de conocimiento de la relación matemática no permita su expresión en forma de función matemática explícita. Los datos experimentales y los movimientos en los que intervienen relaciones discontinuas entre las variables suelen estudiarse gráficamente.

Si se conoce el desplazamiento s para todos los valores del tiempo t, las derivaciones sucesivas (matemáticas o gráficas) respecto a t darán la velocidad v y la aceleración a. Sin embargo, en muchos problemas no se conoce la relación funcional entre desplazamiento y tiempo y hay que determinarla por integraciones sucesivas a partir de la aceleración, que viene determinada por las fuerzas y momentos que se ejercen sobre los cuerpos móviles y se calcula a partir de las ecuaciones de la Cinética que se estudiarán en capítulos posteriores. Según sea la naturaleza de las fuerzas y momentos, la aceleración podrá especificarse como función del tiempo, la velocidad o el desplazamiento, o como función combinada de estas cantidades. Indicamos a continuación el método de integración de la ecuación diferencial en cada caso.

(a) Aceleración constante. Cuando a es constante, podrá integrarse directamente la primera de las ecuaciones 2.2 y la ecuación 2.3. Por razón de sencillez, para el principio del intervalo haremos $s = s_0$, $v = v_0$ y $t = 0$ y para un lapso de tiempo t, las ecuaciones integradas se convierten en

$$\int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t dt \qquad \text{o bien} \qquad v = v_0 + at$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,ds = a\int_{s_0}^{s} ds \qquad \text{o bien} \qquad v^2 = v_0{}^2 + 2a(s - s_0)$$

Si en la ecuación 2.1 se sustituye v por la expresión integrada y se integra respecto a t, se obtiene

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + at)dt \qquad \text{o bien} \qquad s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

Estas relaciones se limitan estrictamente al caso particular en que la aceleración es constante. Los límites de integración dependen de las condiciones inicial y final y, para un problema dado, puede ser más conveniente comenzar la integración en un cierto instante t_1 concreto y no en el instante $t = 0$.

Advertencia: Uno de los errores más corrientes entre los principiantes es tratar de utilizar las ecuaciones anteriores en problemas de aceleración variable, a los que no pueden aplicarse ya que se han obtenido integrando en el supuesto de aceleración constante.

(b) La aceleración dada como función del tiempo, a = f(t). Sustituyendo la aceleración a por la función en la primera de las ecuaciones 2.2 se tiene $f(t) = dv/dt$, y la multiplicación de ambos miembros por dt permite separar las variables e integrar. Así pues,

http://gratislibrospdf.com/

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t f(t)\, dt \qquad \text{o bien} \qquad v = v_0 + \int_0^t f(t)dt$$

De esta expresión integrada de v en función de t se obtendrá el desplazamiento s integrando la ecuación 2.1 que, formalmente, sería

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v\, dt \qquad \text{o bien} \qquad s = s_0 + \int_0^t v\, dt$$

Si se emplea la integral indefinida, se utilizarán las condiciones en los límites para establecer el valor de las constantes de integración con resultados que serán iguales a los obtenidos utilizando la integral definida.

Si se quiere, el desplazamiento s se puede obtener por resolución directa de la ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{s} = f(t)$ obtenida sustituyendo a por $f(t)$ en la segunda de las ecuaciones 2.2.

(c) La aceleración dada como función de la velocidad, a = f(v). Sustituyendo a por la función en la primera de las ecuaciones 2.2 tenemos $f(v) = dv/dt$, lo cual permite separar las variables e integrar

$$t = \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)}$$

Este resultado nos da v en función de t. A continuación sería necesario despejar s en función de t para poder integrar la ecuación 2.1 y obtener la coordenada de posición s como función de t.

Otra posibilidad es aplicar la función $a = f(v)$ en la primera de las ecuaciones 2.3, lo que nos da $v\, dv = f(v)\, ds$. Entonces, se separan las variables y se integra la ecuación en la forma

$$\int_{v_0}^{v} \frac{v\, dv}{f(v)} = \int_{s_0}^{s} ds \qquad \text{o sea} \qquad s = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v\, dv}{f(v)}$$

Obsérvese que esta ecuación da s en función de v sin referencia explícita a t.

(d) La aceleración dada como función del desplazamiento, a = f(s). Sustituyendo a por la función en la ecuación 2.3 e integrando se tiene

$$\int_{v_0}^{v} v\, dv = \int_{s_0}^{s} f(s)\, ds \qquad \text{o sea} \qquad v^2 = {v_0}^2 + 2\int_{s_0}^{s} f(s)\, ds$$

Seguidamente, despejamos v para obtener la función de s, $v = g(s)$. Podemos entonces sustituir v por ds/dt, separar las variables e integrar en la forma

$$\int_{v_0}^{v} \frac{ds}{g(s)} = \int_0^t dt \qquad \text{o sea} \qquad t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{g(s)}$$

que da t como función de s. Finalmente, podemos volver a disponer la expresión resultante para que nos dé s como función de t.

En cada uno de los casos anteriores, cuando la aceleración varía de acuerdo con cierta relación funcional, la posibilidad de resolver las ecuaciones por integración directa matemática dependerá de la forma de la función. En los casos en los que la integración sea demasiado engorrosa o difícil, podrán utilizarse métodos de integración gráficos, numéricos o por ordenador.

http://gratislibrospdf.com/

El desplazamiento de una partícula obligada a moverse a lo largo de una recta está dado por $s = 2t^3 - 24t + 6$, donde s se mide en metros desde un origen conveniente, y t en segundos. Hallar (a) el tiempo que tarda la partícula en adquirir una velocidad de 72 m/s desde el reposo en el instante $t = 0$, (b) su aceleración cuando $v = 30$ m/s y (c) su desplazamiento en el intervalo de $t = 1$ s a $t = 4$ s.

Solución. La velocidad y la aceleración se obtienen derivando s respecto al tiempo una y dos veces, respectivamente. Entonces

$$[v = \dot{s}] \qquad v = 6t^2 - 24 \text{ m/s}$$
$$[a = \dot{v}] \qquad a = 12t \text{ m/s}^2$$

(a) Haciendo $v = 72$ m/s, la expresión anterior de v da $72 = 6t^2 - 24$, de donde
(1) $t = \pm 4$ s. La raíz negativa da cuenta de un valor posible de t antes de que se inicie el movimiento, por lo que carece de sentido físico. Así pues, el resultado deseado es

$$t = 4s \qquad \textit{Resp.}$$

(b) Haciendo $v = 30$ m/s en la expresión de v anterior se obtiene $30 = 6t^2 - 24$ y de aquí resulta una raíz positiva $t = 3$ s, a la que corresponde una aceleración

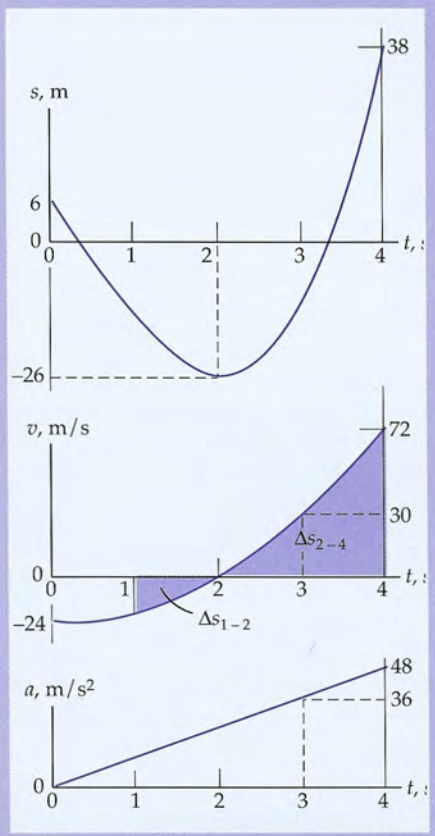
$$a = 12(3) = 36 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

(c) El desplazamiento neto durante el intervalo especificado es

$$\Delta s = s_4 - s_1 \qquad \text{o sea}$$
$$\Delta s = [2(4^3) - 24(4) + 6] - [2(1^3) - 24(1) + 6]$$
$$= 54 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

(2) que representa la distancia recorrida por la partícula a lo largo del eje x desde la posición que ocupaba cuando $t = 1$ s hasta su posición cuando $t = 4$ s.

Para ver mejor este movimiento, en las figuras se representan gráficamente s, v y a en función del tiempo t. Como el área limitada por la curva v-t representa un desplazamiento, vemos que la distancia realmente recorrida desde $t = 1$ s a
(3) $t = 4$ s es igual al área positiva Δs_{2-4} menos el área negativa Δs_{1-2}.



(1) Hay que tener cuidado para elegir el signo correcto cuando se saca una raíz cuadrada. Cuando la situación requiere una única solución, la raíz positiva no es necesariamente la adecuada.

(2) Adviértase que el desplazamiento se representa mediante la letra cursiva *s*, mientras que la letra s de tipo normal se emplea para representar segundos.

(3) Obsérvese en las representaciones gráficas que los valores de *v* son las pendientes ($\dot{s}$) de la curva *s*-*t* y que los valores de *a* son las pendientes ($\dot{v}$) de la curva *v*-*t*. Sugerencia: Integrar *v dt* en ambos intervalos y comprobar el resultado para Δs. Demostrar que la distancia recorrida durante el intervalo de $t = 1$ s a $t = 4$ s es 74 m.

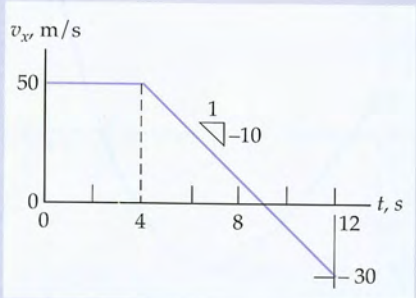
http://gratislibrospdf.com/

Una partícula se mueve a lo largo del eje x con una velocidad inicial $v_x = 50$ m/s en el origen en el instante inicial $t = 0$. Durante los cuatro primeros segundos carece de aceleración y, a partir de ese momento, sufre la acción de una fuerza retardadora que le comunica una aceleración constante $a_x = -10$ m/s^2. Calcular la velocidad y la coordenada x de la partícula en los instantes $t = 8$ s y $t = 12$ s y hallar la coordenada x máxima que alcanza. (1)

Solución. La velocidad a partir de $t = 4$ s se calcula de

(2) $$\left[\int dv = \int a\, dt\right] \qquad \int_{50}^{v_x} dv_x = -10\int_4^t dt \qquad v_x = 90 - 10t \text{ m/s}$$

y se representa tal como se muestra. En los instantes especificados, las velocidades son



$$t = 8 \text{ s}, \qquad v_x = 90 - 10(8) = 10 \text{ m/s}$$
$$t = 12 \text{ s}, \qquad v_x = 90 - 10(12) = -30 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

La coordenada x de la partícula en cualquier instante posterior a 4 s es la distancia recorrida durante los cuatro primeros segundos más la distancia recorrida después de la discontinuidad en la aceleración. O sea,

$$\left[\int ds = \int v\, dt\right] \qquad x = 50(4) + \int_4^t (90 - 10t)\, dt = -5t^2 + 90t - 80 \text{ m}$$

Para los dos instantes especificados

$$t = 8 \text{ s}, \qquad x = -5(8^2) + 90(8) - 80 = 320 \text{ m}$$
$$t = 12 \text{ s}, \qquad x = -5(12^2) + 90(12) - 80 = 280 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Cuando $t = 12$ s la coordenada x es menor que cuando $t = 8$ s, puesto que el movimiento tiene lugar en el sentido negativo del eje x después del instante $t = 9$ s. Por tanto, el valor positivo máximo de la coordenada x corresponderá a $t = 9$ s; o sea,

$$x_{max} = -5(9^2) + 90(9) - 80 = 325 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

(3) Se ve que estos desplazamientos corresponden a las áreas limitadas por la curva v-t hasta el valor de t en cuestión.

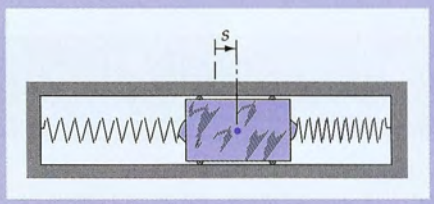
(1) Hay que acostumbrarse a ser flexible con los símbolos. Para la coordenada de posición vale tanto el símbolo x como el s.

(2) Obsérvese que la integración se hace hasta un instante t cualquiera y luego se sustituye por los valores específicos.

(3) Demostrar que la distancia total recorrida durante los 12 segundos es 370 m.

http://gratislibrospdf.com/

La corredera montada entre dos resortes se mueve en la guía horizontal con rozamiento despreciable y tiene una velocidad v_0 en la dirección s al pasar por el centro donde $s = 0$ y $t = 0$. Los dos resortes juntos ejercen una fuerza retardadora del movimiento de la corredera que comunica a ésta una aceleración proporcional al desplazamiento, pero de sentido opuesto, y de valor $a = -k^2s$, donde k es una constante. (Esta constate se presenta en forma de cuadrado para que las expresiones resultantes sean de manejo más cómodo.) Hallar las expresiones del desplazamiento s y la velocidad v como funciones del tiempo t.



Solución I. Como la aceleración está especificada en función del desplazamiento, es posible integrar la relación diferencial $v\,dv = a\,ds$. Entonces,

(1) $$\int v\,dv = \int -k^2 s\,ds + C_1 (C_1, \text{ una constante}) \qquad \text{o sea} \qquad \frac{v^2}{2} = -\frac{k^2 s^2}{2} + C_1$$

Cuando $s = 0$, $v = v_0$, por lo que $C_1 = {v_0}^2/2$ y la velocidad resulta

$$v = +\sqrt{{v_0}^2 - k^2 s^2}$$

Cuando v es positiva (en el sentido positivo de s) se toma la raíz positiva. Esta última expresión puede integrarse haciendo la sustitución v por ds/dt. Es decir,

(2) $$\int \frac{ds}{\sqrt{{v_0}^2 - k^2 s^2}} = \int dt + C_2 \ (C_2, \text{ una constante}) \qquad \text{o sea} \qquad \frac{1}{k} \operatorname{arcsen} \frac{ks}{v_0} = t + C_2$$

Con la condición de que $t = 0$ para $s = 0$, la constante de integración resulta $C_2 = 0$ y en la ecuación podemos despejar s y entonces

$$s = \frac{v_0}{k} \operatorname{sen} kt \qquad \textit{Resp.}$$

La velocidad es $v = \dot{s}$ que da

$$v = v_0 \cos kt \qquad \textit{Resp.}$$

Solución II. Como $a = \ddot{s}$, la relación dada puede escribirse en la forma

$$\ddot{s} + k^2 s = 0$$

que es una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden cuya solución se conoce y es

$$s = A \operatorname{sen} Kt + B \cos Kt$$

(1) **En este caso, hemos empleado una integral indefinida y hemos calculado la constante de integración. Como ejercicio práctico, puede obtenerse el mismo resultado utilizando una integral definida con los límites adecuados.**

(2) **Podemos volver a probar una integral definida como antes.**

http://gratislibrospdf.com/

donde A, B y K son constantes. Aplicando esta expresión en la ecuación diferencial, se ve que la satisface si $K = k$. La velocidad es $v = \dot{s}$ y queda

$$v = Ak \cos kt - Bk \operatorname{sen} kt$$

La condición inicial $v = v_0$ cuando $t = 0$ exige que $A = v_0/k$, y la condición $s = 0$ cuando $t = 0$ da $B = 0$. Así pues, la solución es

(3) Este movimiento recibe el nombre de *movimiento armónico simple* y es característico de todas las oscilaciones en las que la fuerza restauradora y, por lo tanto, la aceleración, es proporcional al desplazamiento pero de signo contrario.

(3) $$s = \frac{v_0}{k} \operatorname{sen} kt \qquad \text{y} \qquad v = v_0 \cos kt \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 2.4

(1) *Un carguero se mueve a 8 nudos cuando sus motores se paran bruscamente. Sabiendo que son necesarios 10 minutos para que el carguero reduzca su velocidad a 4 nudos, determinar y representar gráficamente la distancia s en millas náuticas recorridas por el carguero y su velocidad v en nudos durante dicho intervalo como funciones del tiempo t. La desaceleración del buque es proporcional al cuadrado de su velocidad, de forma que* $a = -kv^2$

(1) Recuérdese que un nudo es una velocidad de una milla náutica (1852 m) por hora. Debe trabajarse directamente en nudos y horas.

Solución. Como se conocen el tiempo y las velocidades, es posible aplicarlos directamente a la expresión de la aceleración en la definición fundamental $a = dv/dt$ e integrar. Así pues,

(2) $$-kv^2 = \frac{dv}{dt} \qquad \frac{dv}{v^2} = -k\,dt \qquad \int_8^v \frac{dv}{v^2} = -k\int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{v} + \frac{1}{8} = -kt \qquad v = \frac{8}{1+8kt}$$

(2) Hemos preferido integrar hasta un valor genérico de v y su instante correspondiente t de forma que se obtenga la variación de v con t.

Aplicando ahora los valores límites $v = 4$ nudos y $t = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ hora, se obtiene

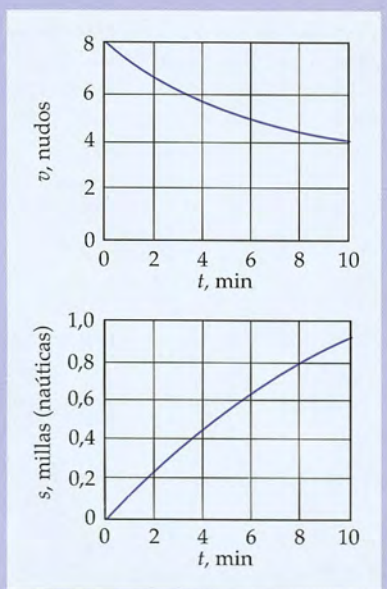
$$4 = \frac{8}{1+8k(1/6)} \qquad k = \frac{3}{4}\ \text{mi}^{-1} \qquad v = \frac{8}{1+6t} \qquad \textit{Resp.}$$

La velocidad se representa gráficamente en función del tiempo tal como se muestra.

La distancia se obtiene sustituyendo v por su expresión en la definición $v = ds/dt$ e integrando. Así pues,

$$\frac{8}{1+6t} = \frac{ds}{dt} \qquad \int_0^t \frac{8dt}{1+6t} = \int_0^s ds \qquad s = \frac{4}{3}\ln(1+6t) \qquad \textit{Resp.}$$

La distancia s también se representa gráficamente en función del tiempo, tal como se muestra, y así vemos que el buque ha recorrido una distancia $s = \frac{4}{3}\ln(1+\frac{6}{6}) = \frac{4}{3}\ln 2 = 0{,}924$ millas (náuticas) durante los diez minutos.



http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMAS

Problemas introductorios

Los problemas 2.1 a 2.5 se refieren al movimiento de un punto material que se mueve a lo largo del eje x representado en la figura.

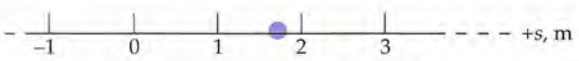


Figura problema 2.1 a 2.5

2.1 La velocidad de un punto material está dada por $v = 20t^2 - 100t + 50$, donde v son metros por segundo y t son segundos. Representar gráficamente, en función del tiempo t, la velocidad v y la aceleración a para los seis primeros segundos de movimiento y calcular la velocidad cuando a es nula.

Resp. $v = -75$ m/s

2.2 El desplazamiento de una partícula está dado por $s = 2t^3 - 30t^2 + 100t - 50$, donde s son metros y t son segundos. Representar gráficamente, en función del tiempo, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración durante los 12 primeros segundos de movimiento. Determinar el instante de velocidad nula.

2.3 El desplazamiento de una partícula está dado por $s = (-2 + 3t)e^{-0,5t}$, donde s son metros y t son segundos. Representar gráficamente, en función del tiempo, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración durante los 20 primeros segundos del movimiento. Determinar el instante de aceleración nula.

Resp. $v = (4 - 1,5t)e^{-0,5t}$

$a = (-3,5 + 0,75t)e^{-0,5t}$, $t = 4,67$ s

2.4 La velocidad de un punto que se mueve a lo largo del eje s está dada por $v = 2 + 5t^{3/2}$, donde t son segundos y v son metros por segundo. Calcular el desplazamiento s, la velocidad v y la aceleración a cuando $t = 4$ s. El punto se encuentra en el origen $s = 0$ cuando $t = 0$.

2.5 La aceleración de un punto está dada por $a = 4t - 30$, donde a son metros por segundo al cuadrado y t son segundos. Hallar la velocidad y el desplazamiento como funciones del tiempo. El desplazamiento inicial cuando $t = 0$ es $s_0 = -5$ m y la velocidad inicial es $v_0 = 3$ m/s.

Resp. $v = 3 - 30t + 2t^2$

$s = -5 + 3t - 15t^2 + \frac{2}{3}t^3$

2.6 Calcular en "ges " la aceleración constante a que debe proporcionar la catapulta de un portaviones para generar una velocidad de lanzamiento de 290 km/h en una distancia de 100 m. Se supone que el navío está fondeado.

2.7 En las etapas finales de alunizaje, el módulo lunar desciende bajo el impulso de su propio motor a una altura $h = 5$ m de la superficie lunar, donde tiene una velocidad de descenso de 2 m/s. Si el motor de descenso es apagado bruscamente en este punto, calcular la velocidad del impacto del tren de aterrizaje contra la Luna. La gravedad lunar es $\frac{1}{6}$ de la gravedad en la Tierra.

Resp. $v = 4,51$ m/s

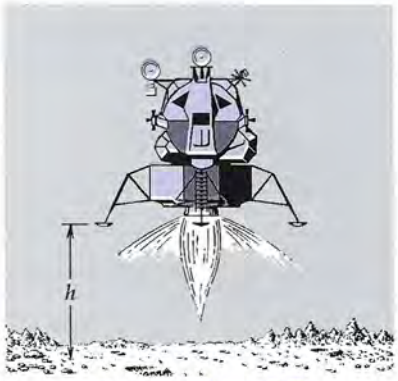


Figura problema 2.7

2.8 A partir de una velocidad inicial de 80 km/h, un automóvil recorre 30 m antes de detenerse por completo. Con la misma aceleración constante, ¿cuál sería la distancia de parada s desde una velocidad inicial de 110 km/h?

2.9 Se dispara un proyectil hacia arriba con una velocidad inicial de 200 m/s. Calcular la altura máxima h alcanzada por el proyectil y el tiempo t que tarda en retornar al suelo desde el momento del disparo. Despreciar la resistencia del aire y tomar una aceleración de la gravedad constante e igual a 9,81 m/s^2.

Resp. $h = 2040$ m, $t = 40,8$ s

2.10 En la figura se muestra la gráfica desplazamiento–tiempo del movimiento rectilíneo de una partícula durante un in-

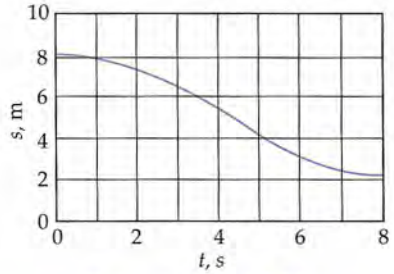


Figura problema 2.10

http://gratislibrospdf.com/

tervalo de 8 segundos. Hallar la velocidad media v_{med} en ese intervalo y, dentro de unos límites de precisión aceptables, la velocidad instantánea v para $t = 4$ s.

2.11 Durante un intervalo de 8 s la velocidad de un punto material que se mueve en línea recta varía con el tiempo tal como se representa. Dentro de unos límites de precisión aceptables, hallar en qué cantidad Δa excede la aceleración media en el intervalo a la aceleración en el instante $t = 4$ s. ¿Cuál es el desplazamiento Δs durante el intervalo?

Resp. $\Delta a = 0{,}50$ m/s^2, $\Delta s = 64$ m

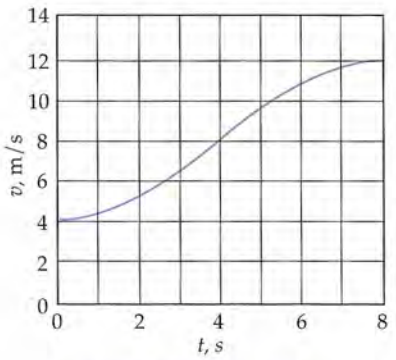


Figura problema 2.11

2.12 Se han obtenido datos experimentales del movimiento de un punto material a lo largo de una recta midiendo la velocidad v para varios desplazamientos s. Se ha dibujado una curva que pasa por los puntos como se muestra en la figura. Determinar la aceleración del punto cuando $s = 20$ m.

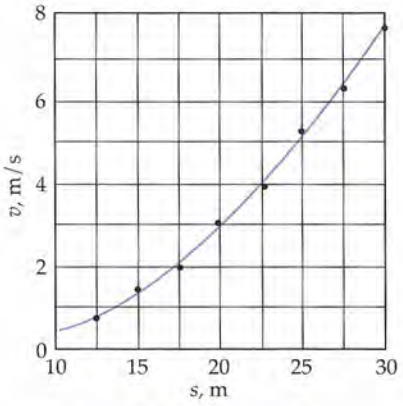


Figura problema 2.12

Problemas representativos

2.13 El piloto de un reactor de carga pone sus motores a plena potencia en despegue antes de soltar los frenos y mientras el avión se encuentra inmóvil en la pista. El empuje de los motores permanece constante y el avión adquiere una aceleración casi constante de $0{,}4g$. Si la velocidad de despegue es 200 km/h, calcular la distancia s y el tiempo t entre el reposo y el despegue.

Resp. $s = 393$ m, $t = 14{,}16$ s

2.14 Determinar con qué velocidad vertical v_0 hay que lanzar una bola desde A para que el tiempo de vuelo hasta el fondo del precipicio sea (*a*) 4 s y (*b*) 2 s.

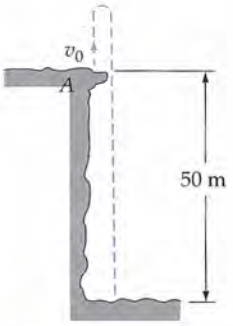


Figura problema 2.14

2.15 La niña de la figura hace rodar la pelota rampa arriba y la recoge cuando retorna a ella. Para el ángulo θ de inclinación de la rampa y esa pelota, la aceleración negativa de ésta a lo largo del plano inclinado vale siempre $0{,}25g$. Si la velocidad inicial de la pelota es 4 m/s, hallar la distancia s que recorre rampa arriba hasta que empieza a retroceder y el tiempo que tarda en regresar a manos de la niña.

Resp. $s = 3{,}26$ m, $t = 3{,}26$ s

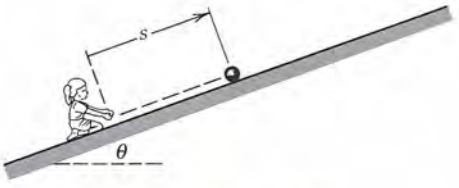
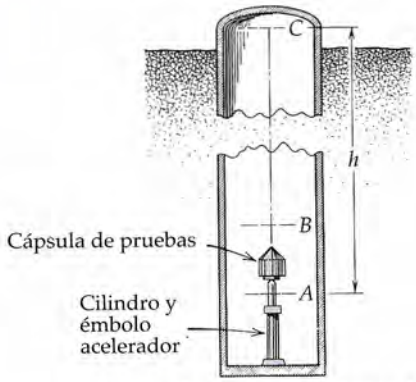


Figura problema 2.15

2.16 Para comprobar los efectos de la "ingravidez" durante cortos períodos de tiempo se ha proyectado una instalación de pruebas en la que se acelera una cápsula verticalmente desde A a B por medio de un émbolo impulsado por gas, lo que le permite ascender de B a C y descender a B en condiciones de caída libre. La cámara de pruebas consiste en un pozo profundo en el que se ha hecho el vacío para eliminar cualquier resistencia

http://gratislibrospdf.com/

apreciable del aire. Si el émbolo suministra una aceleración constante de $40g$ desde A hasta B y si el tiempo total de la prueba en las condiciones de "ingravidez" de B a C es 10 s, calcular la altura h requerida para la cámara. Al volver a B la cápsula de prueba se recoge en una cesta con trozos de poliestireno que se introduce en la línea de caída.



Instalación de prueba de "g igual a cero"

Figura problema 2.16

2.17 La velocidad de una partícula a lo largo del eje s esta dada por $v = 5s^{3/2}$, donde s está en milímetros y v está en milímetros por segundos. Hallar la aceleración cuando s vale 2 milímetros.

Resp. $a = 150$ mm/s^2

2.18 Un corredor alcanza su celeridad máxima de 10,6 m/s a los t segundos de partir del reposo y bajo una aceleración prácticamente constante. Si mantiene luego esa velocidad y cubre una distancia de 100 m en 10,5 s, hallar el intervalo de aceleración t y su aceleración de salida media a.

2.19 El ascensor principal A de la Torre CN de Toronto se eleva hasta unos 350 m y durante la mayor parte del recorrido mantiene una velocidad constante de 22 km/h. Suponiendo que tanto la aceleración como la desaceleración tengan un valor constante de $0{,}25g$, hallar la duración t del recorrido del ascensor.

Resp. $t = 59{,}8$ s

2.20 Un cuerpo se mueve en línea recta con una velocidad cuyo cuadrado disminuye linealmente con el desplazamiento entre dos puntos A y B, los cuales están separados 3400 m tal como se indica. Hallar el desplazamiento Δs del cuerpo durante los dos últimos segundos antes de llegar a B.

2.21 Un avión a reacción lleva una velocidad de 200 km/h en el momento de aterrizar y dispone de 600 m de pista en los que reduce la velocidad a 30 km/h. Calcular la aceleración media de frenado a que necesita el avión.

Resp. $a = -2{,}51$ m/s^2

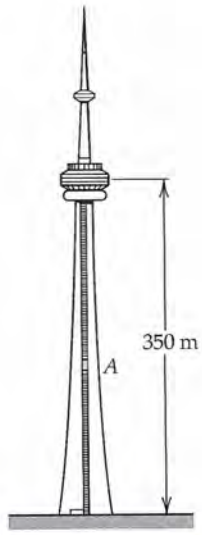


Figura problema 2.19

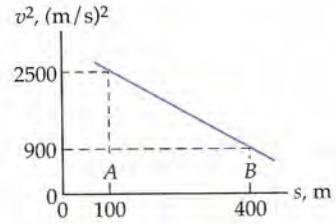


Figura problema 2.20

2.22 Sobre un punto material, que se mueve inicialmente con una velocidad de 100 m/s, actúa una fuerza retardadora. En la figura se muestra el registro oscilográfico de la desaceleración. Estimar la velocidad del punto para $t = 4$ s y para $t = 8$ s.

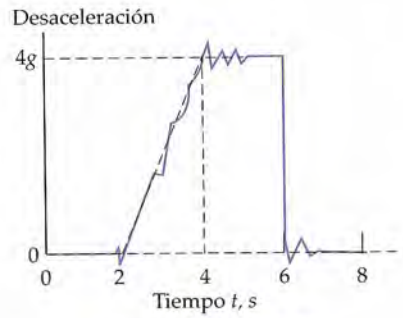


Figura problema 2.22

2.23 Recorriendo la distancia de 3 km entre A y D, un automóvil viaja a 100 km/h entre A y B durante t segundos, y a

http://gratislibrospdf.com/

60 km/h entre C y D también durante t segundos. Si entre B y C se aplican los frenos durante 4 segundos para comunicar al vehículo una desaceleración uniforme, calcular t y la distancia s entre A y B.

Resp. $t = 65{,}5$ s, $s = 1{,}819$ km

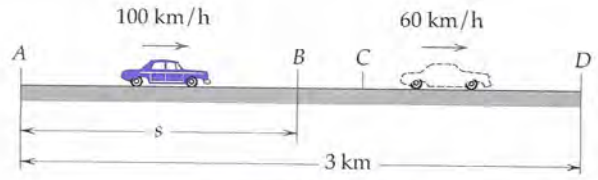


Figura problema 2.23

2.24 La posición, en milímetros, de un punto material está dada por $s = 27 - 12t + t^2$, donde t son segundos. Representar gráficamente las relaciones s–t y v–t durante los primeros 9 segundos. Hallar el desplazamiento neto Δs durante ese intervalo y la distancia total recorrida D. Examinando la relación s–t, ¿qué conclusión puede sacarse acerca de la aceleración?

2.25 Un motorista de patrulla parte del reposo en A dos segundos después de que un automóvil, que corre a 120 km/h, pase por A. Si el patrullero acelera a razón de 6 m/s^2 hasta alcanzar la velocidad de 150 km/h, máxima que le es permitida y que mantiene, calcular la distancia s entre el punto A y el punto en que rebasa al automóvil.

Resp. $s = 912$ m

Figura problema 2.25

2.26 La tabla que sigue da la aceleración a_x del pistón de un motor alternativo de combustión interna en función de su desplazamiento medido desde el punto muerto superior. Mediante una representación gráfica de esta información, hallar la velocidad máxima v_{max} del pistón.

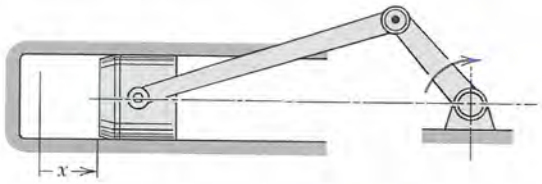


Figura problema 2.26

x, m	a_x, m/s^2	x, m	a_x, m/s^2
0	3300	0,10	– 300
0,01	2890	0,12	– 844
0,02	2490	0,14	– 1306
0,04	1723	0,16	– 1676
0,06	994	0,18	– 1943
0,08	317	0,20	– 2100

2.27 Un punto se mueve a lo largo del semieje x positivo con una aceleración a_x en m/s^2 que aumenta linealmente con x expresada en milímetros, tal como se muestra en el gráfico correspondiente a un intervalo del movimiento. Si en $x = 40$ mm la velocidad del punto es 0,4 m/s, hallar la velocidad en $x =$ 120 mm.

Resp. $v = 0{,}8$ m/s

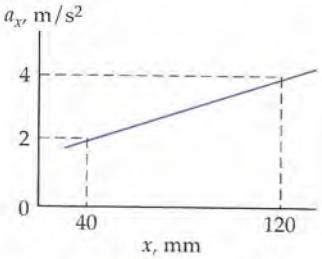


Figura problema 2.27

2.28 El resorte de 350 mm se comprime hasta una longitud de 200 mm, en que se suelta desde el reposo y acelera el bloque deslizante A. La aceleración inicial de éste es de 130 m/s^2 y desde este valor disminuye linealmente con el desplazamiento x del bloque hasta hacerse cero cuando el resorte recupera su longitud original de 350 mm. Calcular el tiempo que tarda el bloque en recorrer (*a*) 75 mm y (*b*) 150 mm.

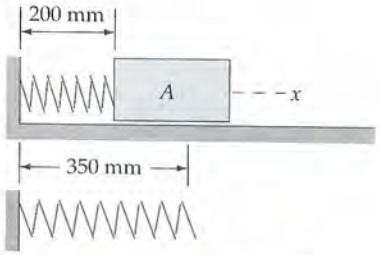


Figura problema 2.28

2.29 La aceleración de un punto que se mueve en el sentido positivo de x varía como se muestra en función de la posición.

http://gratislibrospdf.com/

Si su velocidad es 0,8 m/s cuando $x = 0$, hallar la velocidad v cuando $x = 1{,}4$m.

Resp. $v = 1{,}166$ m/s

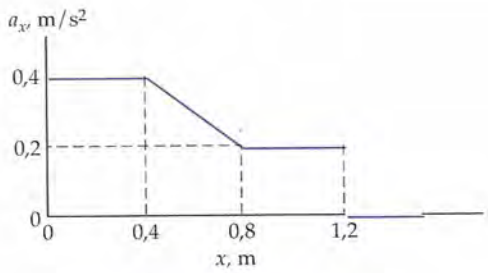


Figura problema 2.29

2.30 Con un acelerómetro se mide la desaceleración del centro de masa G de un automóvil en una prueba de colisión y se obtienen los resultados que se muestran, siendo $x = 0{,}8$ m la distancia que recorre G tras el impacto. A partir de esta información, obtener un valor lo más aproximado posible de la velocidad de colisión v.

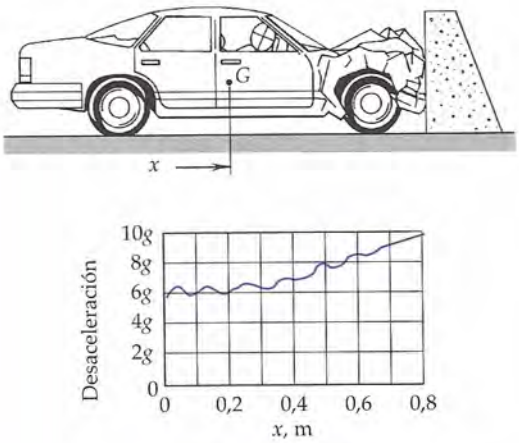


Figura problema 2.30

2.31 Un tren que viaja a 130 km/h aplica los frenos al llegar al punto A y reduce la velocidad con una desaceleración constante. Se observa entonces que la velocidad se ha reducido a 96 km/h cuando pasa por un punto situado a 0,8 km por delante de A. Un automóvil que va a 80 km/h pasa por el punto B en el mismo instante en que el tren llega al punto A. En un imprudente esfuerzo por ganar al tren en el cruce, el conductor "pisa el acelerador a fondo". Calcular la aceleración a que debe adquirir el automóvil para que gane al tren en el cruce con un margen de cuatro segundos y determinar la velocidad v que llevará cuando llegue al cruce.

Resp. $a = 0{,}280$ m/s², $v = 144{,}6$ km/s

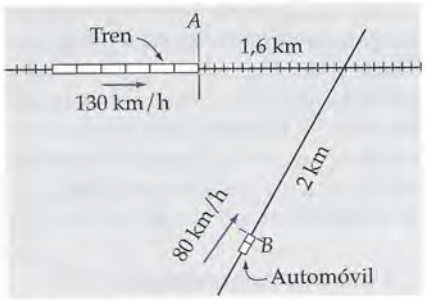


Figura problema 2.31

2.32 Si la velocidad v de un punto que se mueve en línea recta disminuye linealmente con su desplazamiento s desde 2 = m/s hasta un valor que tiende a cero en $s = 30$ m/s, hallar su aceleración a cuando $s = 15$ m y demostrar que el punto no llega nunca a $s = 30$ m.

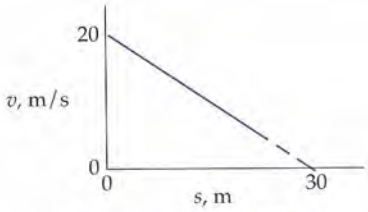


Figura problema 2.32

2.33 Navegando en calma, un buque reduce su velocidad al aproximarse a la bocana de un puerto. Esta reducción tiene lugar desde los 10 nudos, cuando el buque pasa por la primera baliza, hasta los 4 nudos, 6 minutos más tarde cuando el buque pasa por la segunda baliza. Calcular aproximadamente la distancia Δs entre las balizas en millas náuticas utilizando la gráfica directamente. (Se recordará que un nudo es una velocidad de una milla náutica por hora.)

Resp. $\Delta s = 0{,}60$ millas.

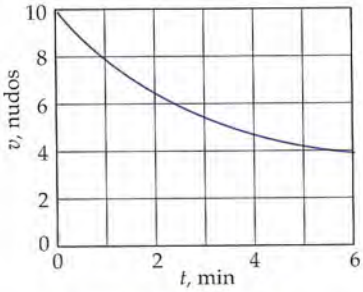


Figura problema 2.33

2.34 Una partícula que se mueve en el sentido positivo del eje x con una velocidad inicial de 12 m/s sufre una fuerza retarda-

http://gratislibrospdf.com/

dora que le comunica una aceleración negativa que varía linealmente con el tiempo durante los 4 primeros segundos, tal como se muestra. Durante los 5 segundos siguientes la fuerza se mantiene constante y también la aceleración. Representar gráficamente la velocidad de la partícula durante los 9 segundos y especificar su valor para $t = 4$ s. Determinar también la distancia Δx que recorre la partícula desde su posición para $t = 0$ hasta el punto en que se invierte el sentido de su movimiento.

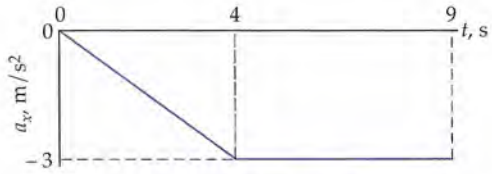


Figura problema 2.34

2.35 Un punto parte del reposo en $x = -2$ m y se mueve a lo largo del eje x con una velocidad cuya variación se representa. Representar gráficamente el desplazamiento y la aceleración correspondientes durante los dos segundos. Determinar el instante t en que pasa por el origen.

Resp. $t = 0{,}917$ s

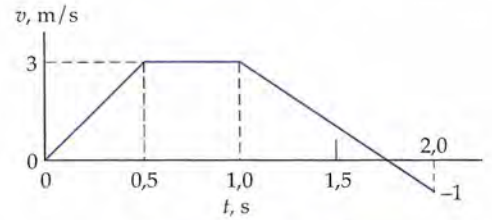


Figura problema 2.35

2.36 Un automóvil se pone en marcha con una aceleración de 6 m/s², la cual disminuye linealmente con el tiempo hasta anularse a los 10 segundos, instante a partir del cual el vehículo continúa a velocidad constante. Hallar el tiempo t necesario para que el automóvil recorra 400 m desde que arrancó.

2.37 A un cuerpo que se mueve en línea recta se le aplica una fuerza retardadora de modo que, durante un intervalo de su movimiento, su velocidad v decrece a medida que aumenta su coordenada de posición s de acuerdo con $v^2 = k/s$, siendo k una constante. Si, en el instante $t = 0$, el cuerpo posee una velocidad hacia adelante de 50 mm/s y su coordenada de posición es 225 mm, hallar su velocidad v para $t = 3$ s.

Resp. $v = 39{,}7$ mm/s

2.38 La resistencia aerodinámica al movimiento de un automóvil es casi proporcional al cuadrado de su velocidad. La resistencia adicional por rozamiento es constante, por lo que su aceleración cuando se mueve por inercia puede escribirse $a = -C_1 - C_2 v^2$, donde C_1 y C_2 son constantes dependientes de la configuración mecánica del vehículo. Si éste posee una velocidad inicial v_0 cuando se desembraga el motor, deducir la expresión de la distancia D que recorre desde ese momento hasta que se detiene.

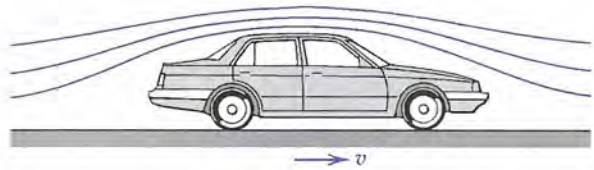


Figura problema 2.38

2.39 Calcular la velocidad de impacto de un cuerpo que se deje caer desde una altura $h = 800$ km. (*a*) Suponer que la aceleración de la gravedad es constante de valor $g_0 = 9{,}81$ m/s² y (*b*) tener en cuenta la variación de g con la altura (véase apdo. 1.5). Se despreciarán los efectos de la resistencia atmosférica.

Resp. (*a*) $v = 3962$ m/s, (*b*) $v = 3730$ m/s

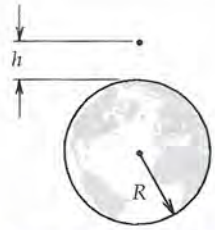


Figura problema 2.39

2.40 La bola de acero A, de diámetro D, se desliza libremente a lo largo de la varilla horizontal que termina en la pieza polar del electroimán. La fuerza de atracción depende de la inversa del cuadrado de la distancia y la aceleración resultante de la bola es $a = K/(L - x)^2$, donde K es una medida de la intensidad del campo magnético. Determinar la velocidad v con que la bola golpea la pieza polar si se suelta partiendo del reposo en $x = 0$.

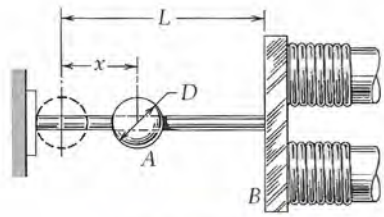


Figura problema 2.40

http://gratislibrospdf.com/

2.41 El cuerpo que cae con una velocidad v_0 choca y se mantiene en contacto con la plataforma soportada por un juego de resortes. Tras el choque, la aceleración del cuerpo es $a = g - cy$, donde c es una constante positiva e y se mide desde la posición original de la plataforma. Si se observa que la compresión máxima de los resortes es y_m, hallar la constante c.

Resp. $c = \dfrac{v_0^2 + 2gy_m}{y_m^2}$

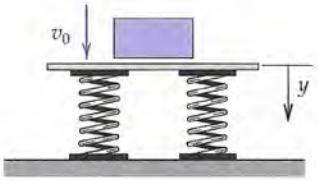


Figura problema 2.41

2.42 El cono que cae con una velocidad v_0 choca y penetra en el bloque de material de embalaje. Tras el choque, la aceleración del cono es $a = g - cy^2$, donde c es una constante positiva e y es la distancia de penetración. La profundidad de penetración máxima se observa que es y_m, hallar la constante c.

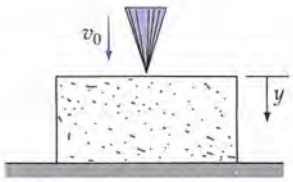


Figura problema 2.42

2.43 Como área de aterrizaje para grandes aviones a reacción se ha propuesto un determinado lago. La velocidad de 160 km/h que lleva el avión en el momento de tocar tierra debe reducirse a 30 km/h en una distancia de 400 m. Si la desaceleración es proporcional al cuadrado de la velocidad de la aeronave en el agua ($a = -Kv^2$), determinar el valor del parámetro de diseño K, que sería una medida de las dimensiones y forma de las paletas del tren de aterrizaje que surcarían el agua. Determinar también el tiempo t que dura el intervalo especificado.

Resp. $K = 4{,}18(10^{-3})\ \text{m}^{-1}$, $t = 23{,}3$ s

2.44 El mando de aceleración electrónico de un tren maqueta esta programado para que la velocidad varíe en función de la posición del modo que se representa. Hallar el tiempo que tarda el tren en dar una vuelta completa.

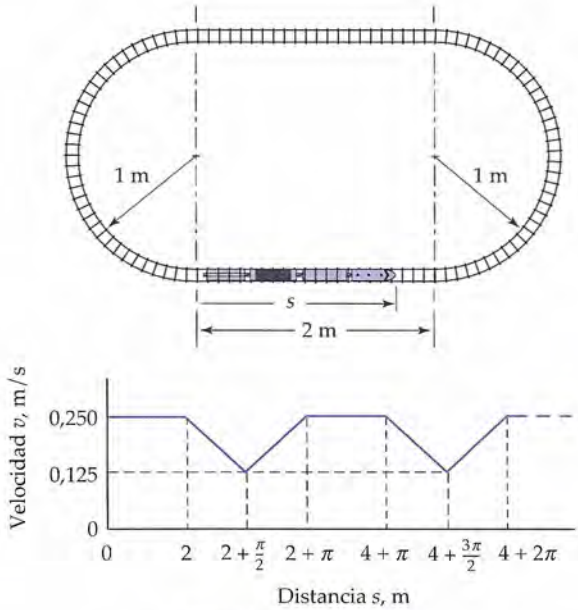


Figura problema 2.44

2.45 Con una velocidad v_0 se dispara horizontalmente un proyectil de prueba al interior de un líquido viscoso. La fuerza retardadora es proporcional al cuadrado de la velocidad, por lo que la aceleración es de la forma $a = -kv^2$. Deducir la expresión de la distancia D recorrida en el seno del líquido y el tiempo t que transcurre hasta que la velocidad se reduce a $v_0/2$. Despreciar todo movimiento vertical.

Resp. $D = 0{,}693/k$, $t = 1/(kv_0)$

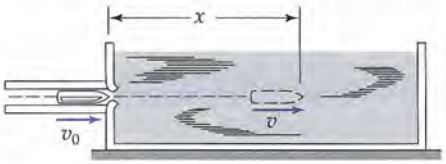


Figura problema 2.45

2.46 Calcular aproximadamente la relación entre v y t para el buque en reducción de velocidad del problema 2.33 utilizando la expresión exponencial $v = v_0 e^{-kt}$, donde v_0 y k son constantes determinadas por las condiciones iniciales y finales. Calcular seguidamente la distancia s entre las balizas.

2.47 El modelo matemático de la aceleración del "drágster" es $a = c_1 - c_2 v_0 e^{-kt}$, donde el término v^2 considera la resistencia aerodinámica y c_1 y c_2 son constantes positivas. Si se sabe que c_2 vale $1{,}64(10^{-4})\ \text{m}^{-1}$ (por ensayos en túnel de viento), hallar c_1 si la velocidad final es 305 km/h. Una carrera de "drágster" es un recorrido recto de 400 m a partir de la salida.

Resp. $c_1 = 0\ 9{,}57\ \text{m/s}^2$

http://gratislibrospdf.com/

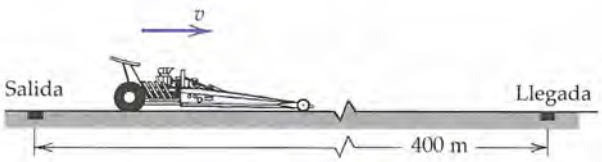


Figura problema 2.47

2.48 Empleando el valor de c_1 calculado en el problema 2.47 hallar el tiempo t que necesita el "drágster" de ese problema para recorrer los 400 m.

2.49 El movimiento horizontal del conjunto de émbolo y vástago está reprimido por la resistencia del disco solidario que se desplaza dentro del baño de aceite. Si la velocidad del émbolo es v_0 en la posición A para la que $x = 0$ y si la desaceleración es proporcional a v de forma que $a = -kv$, deducir las expresiones de la velocidad v y de la coordenada de posición x en función del tiempo t. Expresar también v en función del tiempo.

$$Resp.\ v = v_0 e^{-kt},\ x = \frac{v_0}{k}[1 - e^{-kt}]$$

$$v = v_0 - kx$$

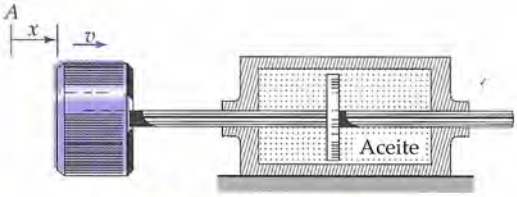


Figura problema 2.49

2.50 Un objeto pequeño se deja caer desde el reposo dentro de un depósito de aceite. La aceleración descendente del objeto es $g - kv$, donde g es la aceleración constante debida a la gravedad, k es una constante dependiente de la viscosidad del aceite y de la forma del objeto y v es la velocidad descendente del objeto. Deducir las expresiones de la velocidad y del recorrido vertical y como funciones del tiempo t tras la salida.

2.51 En una prueba en aire en calma, se deja caer una bola de acero de pequeño tamaño desde una altura considerable. Su aceleración inicial g disminuye en kv^2, donde k es una constante y v es la velocidad de descenso. Hallar la velocidad máxima que alcanza la bola y expresar el recorrido vertical y en función del tiempo t transcurrido desde el inicio de la caída.

$$Resp.\ v_{max} = \sqrt{\frac{g}{k}},\ y = \frac{1}{k} \ln \cosh \sqrt{kg}\ t$$

2.52 Un amortiguador, compuesto de un juego de tres resortes, se utiliza para detener una masa considerable que lleva una velocidad horizontal de 40 m/s en el instante en que entra en contacto con el amortiguador. Los dos resortes exteriores originan una desaceleración proporcional a la deformación del resorte. El resorte central aumenta la desaceleración cuando la compresión excede de 0,5 m según se indica en la gráfica. Determinar la máxima compresión x de los resortes exteriores.

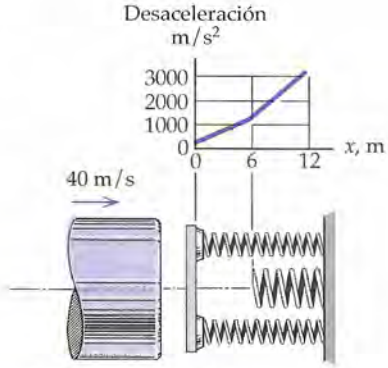


Figura problema 2.52

2.53 Cuando se incluye el efecto de la resistencia aerodinámica, la aceleración y de una pelota de béisbol que se mueve verticalmente hacia arriba es $a_u = -g - kv^2$, mientras que cuando se mueve hacia abajo la aceleración es $a_d = -g + kv^2$, donde k es una constante positiva y v es la velocidad en m/s. Si la pelota se lanza hacia arriba a 30 m/s desde prácticamente el nivel del suelo, calcular la altura h que alcanza y su velocidad v_f cuando choca con el suelo. Tómese $k = 0{,}0066\ m^{-1}$ y supóngase que g es constante.

$$Resp.\ h = 35{,}9\ m,\ v_f = 23{,}7\ m/s$$

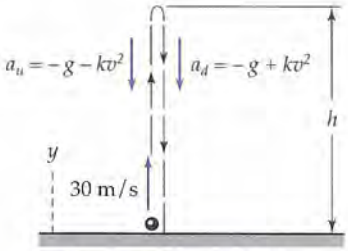


Figura problema 2.53

2.54 Para la pelota de béisbol del problema 2.53 que se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/s, hallar el tiempo t_u que tarda en ir desde el suelo hasta la altura máxima y el que tarda, t_d, desde la altura máxima hasta el suelo.

2.55 El combustible de un cohete modelo se quema con tal rapidez que puede suponerse que el cohete adquiere su velocidad de extinción de combustible de 120 m/s cuando prácticamente aún se encuentra a nivel del suelo. Entonces, sube

http://gratislibrospdf.com/

verticalmente por inercia hasta la altura máxima de la trayectoria. Incluyendo la resistencia aerodinámica, la aceleración y durante ese movimiento es $a_u = -g - 0{,}0005v^2$, siendo metros y segundos las unidades. En la culminación se despliega un paracaídas desde el morro y el cohete adquiere en seguida una velocidad de descenso constante de 4 m/s. Estimar el tiempo de vuelo t_f.

Resp. $t_f = 147{,}7$ s

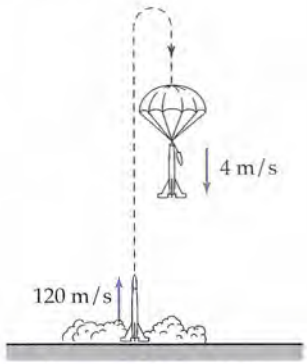


Figura problema 2.55

▶**2.56** Una partícula obligada a moverse en línea recta está sometida a una fuerza aceleradora que aumenta con el tiempo y a una fuerza retardadora que aumenta en proporción directa con la coordenada de posición x. La aceleración resultante es $a = Kt - k^2x$, donde K y k son constantes positivas y donde tanto x como $\dot{x}$ son cero cuando $t = 0$. Hallar x en función de t.

$$\textit{Resp. } x = \frac{K}{k^3}(kt - \operatorname{sen} kt)$$

▶**2.57** La aceleración vertical de un cohete de combustible sólido está dada por $a = ke^{-bt} - cv - g$, donde k, b y c son constantes, v es la velocidad vertical en cada instante y g es la aceleración de la gravedad, esencialmente constante para vuelos en la atmósfera. El término exponencial representa el efecto de la disminución del empuje conforme se quema el combustible, y el término $-cv$ estima el retardo debido a la resistencia de la atmósfera. Hallar la expresión de la velocidad vertical del cohete t segundos después del disparo.

$$\textit{Resp. } v = \frac{g}{c}(e^{-ct} - 1) + \frac{k}{c-b}(e^{-bt} - e^{-ct})$$

▶**2.58** En el anteproyecto de un sistema de transporte rápido se establece que la velocidad del tren debe variar con el tiempo tal como se representa en la figura, cuando el tren recorre los 3,2 km que separan las estaciones A y B. Las pendientes de las curvas de transición de tercer grado (que son de la forma $a + bt + ct^2 + dt^3$) son nulas en los extremos. Hallar el tiempo total de recorrido entre las estaciones y la aceleración máxima.

Resp. $t = 103{,}6$ s, $a_{max} = 3{,}61$ m/s^2

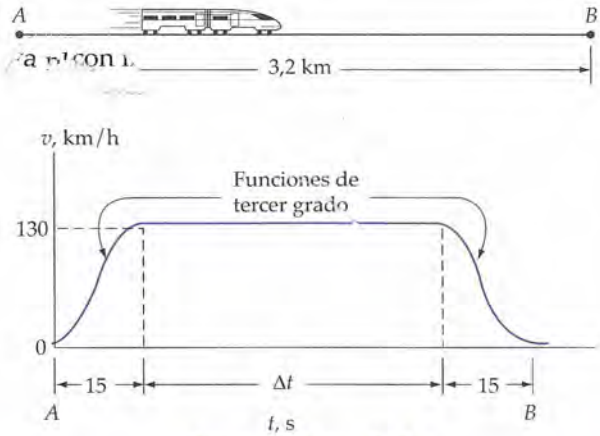


Figura problema 2.58

2.3 MOVIMIENTO CURVILÍNEO PLANO

Iniciamos ahora el estudio del movimiento de un punto material a lo largo de una trayectoria curva contenida en un solo plano. Se ve en seguida que este movimiento es un caso particular del movimiento más general presentado en el apartado 2.1 e ilustrado en la figura 2.1. Si hacemos que el plano del movimiento coincida, por ejemplo, con el plano x-y, las coordenadas z y ϕ de la figura 2.1 serán nulas ambas y R se confundirá con r. Tal como ya se ha dicho, una gran proporción de los movimientos de los puntos y de las partículas materiales que aparecen en la práctica de la ingeniería pueden representarse como movimientos planos.

Antes de proseguir con la descripción del movimiento curvilíneo plano en un sistema específico de coordenadas cualquiera, vamos a describir primeramente el movimiento valiéndonos del análisis vectorial, cuyos resultados son independientes del sistema de coordenadas elegido. Lo que sigue de este apartado constituye uno de los temas de mayor importancia entre todos los de la

http://gratislibrospdf.com/

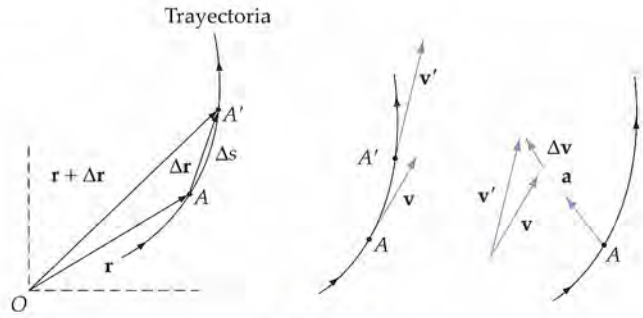


Figura 2.5

Dinámica; se trata de la *derivada temporal de un vector*. Una porción notablemente elevada de todos los temas tratados por la Dinámica dependen directamente de las variaciones por unidad de tiempo de magnitudes vectoriales, por lo que este tema debe dominarse desde el comienzo ya que las ocasiones en que debe hacerse uso del mismo se presentan constantemente.

Consideremos ahora el movimiento de un punto material a lo largo de una cur plana como la representada en la figura 2.5. En el instante t el punto se encuentra en la posición A, situada mediante el *vector de posición* $\mathbf{r}$ medido respecto a un origen fijo conveniente O. Si en el instante t se conocen tanto el módulo como la dirección y el sentido de $\mathbf{r}$, la posición del punto material estará especificada por completo. En el instante $t + \Delta t$ el punto se encontrará en la posición A', localizada por el vector de posición $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$. Se observará que, por supuesto, esta última expresión es una suma vectorial y no una suma de escalares. Durante el intervalo de tiempo Δt el *desplazamiento* del punto material es $\Delta\mathbf{r}$, que es un vector que representa el cambio de posición y que evidentemente es independiente del origen elegido. En efecto, si se hubiera tomado un origen situado en otra posición, el vector de posición $\mathbf{r}$ sería distinto pero $\Delta\mathbf{r}$ sería el mismo. La distancia realmente recorrida por el punto al moverse a lo largo de la trayectoria entre A y A' es el escalar longitud Δs medido sobre la trayectoria. Distinguimos pues entre el vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ y el escalar longitud Δs.

La *velocidad media* del punto material entre A y A' se define $\mathbf{v}_{\text{med}} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$ y es un vector que tiene la dirección y el sentido de $\Delta\mathbf{r}$ y cuyo módulo es el de $\Delta\mathbf{r}$ dividido por Δt. La *celeridad* media del punto material entre A y A'es el cociente escalar $\Delta s/\Delta t$. Evidentemente el módulo del vector velocidad media y la celeridad media se aproximan uno a otro a medida que decrece el intervalo Δt y A y A' se acercan más y más.

La *velocidad instantánea* $\mathbf{v}$ del punto material se define como el valor en el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero. Entonces

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

Observemos que la dirección de $\Delta\mathbf{r}$ se aproxima a la de la tangente a la trayectoria cuando Δt tiende a cero y que, por consiguiente, la velocidad $\mathbf{v}$ será siempre un vector tangente a la trayectoria. Ampliemos ahora a las magnitudes vectoriales la definición fundamental de derivada de un escalar y escribamos

http://gratislibrospdf.com/

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \tag{2.4}$$

La derivada de un vector sigue siendo un vector y posee tanto módulo como dirección y sentido. El módulo de **v** recibe el nombre de *celeridad* y es el escalar

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

En este punto, debemos hacer una importante distinción entre lo que es el *módulo de la derivada* y la *derivada del módulo*. El módulo de la derivada puede escribirse de cualquiera de las formas siguientes $|d\mathbf{r}/dt| = |\dot{\mathbf{r}}| = \dot{s} = |\mathbf{v}| = v$ y representa el módulo de la velocidad o celeridad del punto. Por otra parte, la derivada del módulo se escribe $d|\mathbf{r}|/dt = dr/dt = \dot{r}$ y representa la variación por unidad de tiempo de la longitud del vector de posición **r**. O sea, estas dos derivadas poseen significados completamente diferentes y debemos ser sumamente cuidadosos para distinguir una de la otra tanto al pensar en ellas como al escribirlas. Por esta y otras razones se insta al lector a que adopte una misma notación de escritura manual para todas las magnitudes vectoriales con el fin de distinguirlas de las magnitudes escalares. Los símbolos utilizados con mayor frecuencia son $\vec{v}$ y $\underline{v}$, aunque también se utilizan v y $\hat{v}$.

Una vez establecido el concepto de velocidad como magnitud vectorial, regresemos a la figura 2.5 y representemos la velocidad del punto material en A mediante el vector tangente **v** y la velocidad en A' mediante el vector tangente **v**′. Evidentemente, durante el intervalo Δt el vector velocidad habrá variado. Si a la velocidad **v** en A se suma (vectorialmente) la variación $\Delta\mathbf{v}$ de la velocidad, debe resultar la velocidad en A', por lo que podemos escribir $\mathbf{v}' - \mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}$. La observación del diagrama vectorial revela que $\Delta\mathbf{v}$ depende tanto de la variación del módulo (longitud) de **v** como de la variación de la dirección de **v**. Estas dos variaciones son características básicas de las derivadas de los vectores.

La *aceleración media* del punto material entre A y A' se define como $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ y es un vector cuya dirección y sentido son los de $\Delta\mathbf{v}$. El módulo de la aceleración media es el módulo de $\Delta\mathbf{v}$ dividido por Δt.

La *aceleración instantánea* **a** del punto material se define como el valor en el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero. O sea,

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

Según la definición de derivada, escribiremos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \tag{2.5}$$

A medida que Δt se hace menor y tiende a cero, la dirección de la variación $\Delta\mathbf{v}$ se aproxima a la de la variación infinitesimal $d\mathbf{v}$ y, por consiguiente, a **a**. La aceleración incluye, pues, el efecto de la variación del módulo de **v** y de la variación de la dirección de **v**. Es manifiesto que, en general, la dirección de la aceleración de un punto material en movimiento curvilíneo no es ni tangente ni normal a la trayectoria. No obstante, sí que observamos que la componente

http://gratislibrospdf.com/

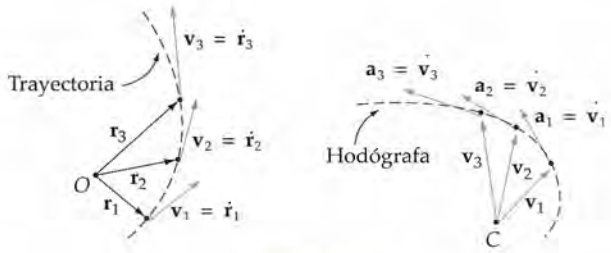


Figura 2.6

de la aceleración normal a la trayectoria está dirigida hacia el centro de curvatura de la misma.

En la figura 2.6 se presenta otro estudio que ayuda a materializar el concepto de aceleración, habiéndose representado a efectos de comprensión los vectores de posición correspondientes a tres posiciones arbitrarias del punto en su trayectoria. A cada vector de posición corresponde un vector velocidad tangente a la trayectoria y la relación es $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Si se trazan ahora dichos vectores velocidad a partir de un cierto punto arbitrario C, definirán una curva llamada *hodógrafa*. Las derivadas de dichos vectores velocidad serán los vectores aceleración $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ que son tangentes a la hodógrafa. Se ve que la aceleración guarda con la velocidad la misma relación que la velocidad con el vector de posición.

La representación geométrica de las derivadas del vector de posición $\mathbf{r}$ y del vector velocidad $\mathbf{v}$ de la figura 2.5 se puede utilizar para describir la derivada de una cantidad vectorial cualquiera respecto a t o a cualquier otra variable escalar. Con la introducción de la derivada de un vector en las definiciones de velocidad y aceleración, importará ahora establecer las reglas según las cuales pueda llevarse a cabo la derivación de cantidades escalares, con la única diferencia del caso del producto vectorial en el cual hay que mantener el orden de los factores. Las reglas mencionadas están desarrolladas en el apartado C.7 del apéndice C y convendrá repasarlas ahora mismo.

En el caso del movimiento curvilíneo de un punto en un plano existen tres sistemas de coordenadas diferentes que son de uso común para la descripción de dicho movimiento. Del estudio de dichos sistemas de coordenadas convendrá aprender a elegir adecuadamente el sistema de referencia para un problema dado. Dicha elección suele revelarse por la forma en que se especifican los datos. Vamos a desarrollar e ilustrar a continuación cada uno de los tres sistemas de coordenadas.

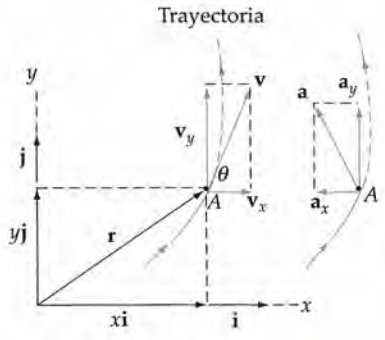


Figura 2.7

2.4 COORDENADAS RECTANGULARES (x-y)

Este sistema de referencia es particularmente útil en el caso de movimientos en los que las componentes x e y de la aceleración están generadas o determinadas independientemente. El movimiento curvilíneo se obtiene, pues, por combinación vectorial de las componentes x e y del vector de posición, de la velocidad y de la aceleración.

En la figura 2.7 vuelve a representarse la trayectoria del punto material de la figura 2.5 junto con los ejes x e y, y en la misma se incluyen el vector de posición $\mathbf{r}$, la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ del punto material, descritos en el apartado 2.3, descompuestos en sus componentes x e y. Utilizando los vectores

http://gratislibrospdf.com/

unitarios **i** y **j**, podemos escribir los vectores **r**, **v** y **a** en función de sus componentes x e y, o sea,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} \\ \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Al derivar respecto del tiempo, debe tenerse en cuenta que las derivadas temporales de los vectores unitarios son nulas ya que los módulos, direcciones y sentidos de los mismos permanecen constantes. Los valores escalares de las componentes de **v** y **a** son simplemente $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ y $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$, $a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$. (Tal como aparece en la figura 2.7, el sentido de a_x es el x negativo por lo que $\ddot{x}$ será un número negativo.)

Como ya hemos observado previamente, la dirección de la velocidad es tangente siempre a la trayectoria, y de la figura resulta evidente que

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad \text{tg } \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$a = a_x^2 + a_y^2 \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Si se mide el ángulo θ en sentido antihorario a partir del eje x y hacia **v**, podemos ver que, para la configuración de ejes representada, es $dy/dx = \text{tg } \theta = v_y/v_x$.

Si conocemos cada una de las coordenadas x e y independientemente como funciones del tiempo, $x = f_1(t)$ e $y = f_2(t)$, podremos combinarlas para obtener **r** como función del tiempo. Análogamente, sus primeras derivadas $\dot{x}$ e $\dot{y}$ se combinarán para darnos **v** y sus derivadas segundas $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$ para darnos **a**. Ahora bien, si se dan como funciones del tiempo las componentes a_x y a_y de la aceleración, podemos integrar cada una por separado respecto al tiempo, una vez para obtener v_x y v_y y de nuevo para obtener $x = f_1(t)$ e $y = f_2(t)$. Eliminando el tiempo t entre estas dos últimas ecuaciones paramétricas resulta la ecuación de la trayectoria $y = f(x)$.

Del estudio anterior debemos sacar la consecuencia de que la representación por coordenadas cartesianas rectangulares de un movimiento curvilíneo no es más que la superposición de las coordenadas de dos movimientos rectilíneos simultáneos según las direcciones x e y. Por tanto, todo lo expuesto en el apartado 2.2 acerca del movimiento rectilíneo puede aplicarse por separado a cada uno de los movimientos según los ejes x e y.

Movimiento de los proyectiles. Una importante aplicación de la teoría de la cinemática plana es el estudio del movimiento y alcance de los proyectiles (balística). En un primer planteamiento del problema, despreciamos la resistencia del aire y la curvatura y rotación de la Tierra, y admitimos que la altura máxima de la trayectoria es suficientemente pequeña como para que la aceleración de la gravedad podamos suponerla constante. Con estas hipótesis, para estudiar la trayectoria lo mejor es emplear coordenadas rectangulares. Para los ejes representados en la figura 2.8, las componentes de la aceleración son

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

http://gratislibrospdf.com/

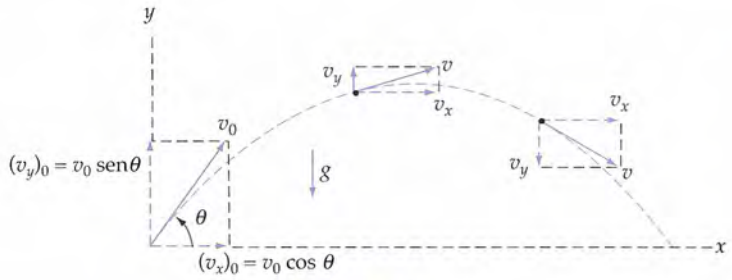


Figura 2.8

Se trata, pues, de un caso de aceleración constante como el tratado en general en el apartado 2.2*a*, de cuyos resultados hacemos uso para escribir

$$v_x = (v_x)_0 \qquad v_y = (v_y)_0 - gt$$
$$x = x_0 + (v_x)_0 t \qquad y = y_0 + (v_y)_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$v_y^2 = (v_y)_0^2 - 2g(y - y_0)$$

En estas expresiones, el subíndice cero se refiere a las condiciones iniciales, que suelen tomarse como las correspondientes al punto de disparo, donde, en el caso ilustrado, $x_0 = y_0 = 0$. Adviértase que aquí se toma g como cantidad positiva.

Vemos que los movimientos x e y son independientes para las condiciones de movimiento simplificadas que se consideran. Al eliminar el tiempo t entre las ecuaciones de los desplazamientos x e y resulta una trayectoria parabólica (véase problema tipo 2.6). Si hubiera que introducir la resistencia del aire, que depende del cuadrado de la velocidad (celeridad del proyectil), las ecuaciones de los movimientos x e y estarían acopladas (o sea, serían interdependientes) y la trayectoria no sería parabólica.

Cuando hay que describir el movimiento de los proyectiles con una gran precisión, e intervienen grandes velocidades y grandes alturas, deben tenerse en cuenta la forma del proyectil, la variación de g con la altitud, la variación de la densidad del aire con la altitud y la rotación de la Tierra. Estos elementos hacen que las ecuaciones del movimiento sean considerablemente complicadas y suele ser necesario recurrir a la integración numérica.

PROBLEMA TIPO 2.5

El movimiento curvilíneo de un punto está definido por $v_x = 50 - 16t$ *e* $y = 100 - 4t^2$, *donde* v_x *son metros por segundo,* y *son metros y* t *son segundos. Se sabe además que cuando* $t = 0$ *es* $x = 0$. *Representar la trayectoria y determinar la velocidad y la aceleración cuando alcanza la posición* $y = 0$.

Solución. La coordenada x se obtiene integrando la expresión de v_x y la componente x de la aceleración derivando v_x. O sea,

http://gratislibrospdf.com/

$$\left[\int dx = \int v_x\, dt\right] \qquad \int_0^x dx = \int_0^t (50 - 16t)\, dt \qquad x = 50t - 8t^2 \text{ m}$$

$$[a_x = \dot{v}_x] \qquad a_x = \frac{d}{dt}(50 - 16t) \qquad a_x = -16 \text{ m/s}^2$$

Las componentes y de la velocidad y de la aceleración son

$$[v_x = \dot{y}] \qquad v_y = \frac{d}{dt}(100 - 4t^2) \qquad v_y = -8t \text{ m/s}$$

$$[a_y = \dot{v}_y] \qquad a_y = \frac{d}{dt}(-8t) \qquad a_y = -8 \text{ m/s}^2$$

Ahora se calculan los valores correspondientes de x e y para distintos valores de t y se representa gráficamente y en función de x, obteniendo la trayectoria representada en la figura.

Para $y = 0$, $0 = 100 - 4t^2$, y entonces $t = 5$ s. Para este valor del tiempo tenemos

$$v_x = 50 - 16(5) = -30 \text{ m/s}$$

$$v_y = -8(5) = -40 \text{ m/s}$$

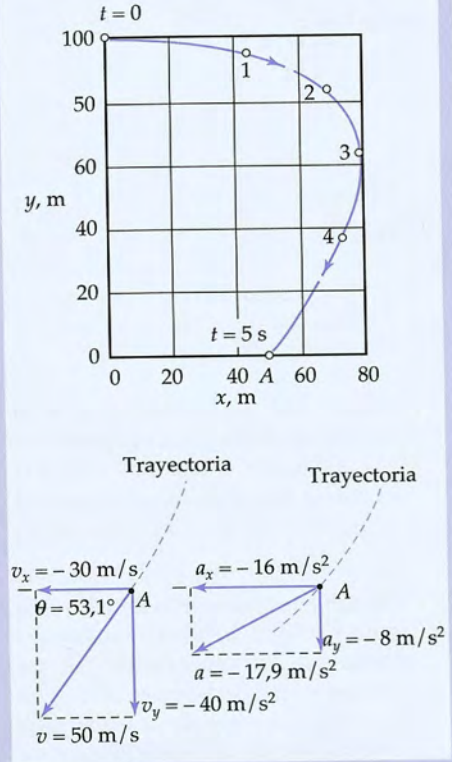
$$v = \sqrt{(-30)^2 + (-40)^2} = 50 \text{ m/s}$$

$$a = \sqrt{(-16)^2 + (-8)^2} = 17{,}9 \text{ m/s}^2$$

Las componentes de la velocidad y de la aceleración y sus resultantes se representan por separado para el punto A en que $y = 0$. O sea, para esa posición se tiene

$$\mathbf{v} = -30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

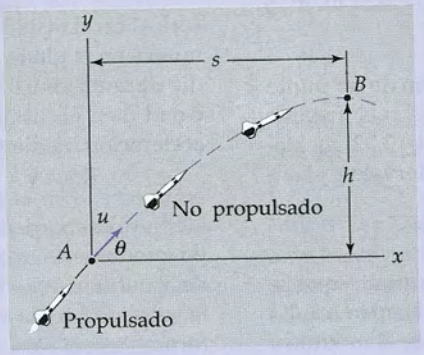
$$\mathbf{a} = -16\mathbf{i} - 8\mathbf{j} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$



Observemos que, como debe ser, el vector velocidad se encuentra sobre la tangente a la trayectoria, pero que el vector aceleración no es tangente a la trayectoria. Obsérvese en particular que el vector aceleración posee una componente dirigida hacia el interior de la trayectoria. Ya dedujimos con relación a la figura 2.5 que es imposible que la aceleración tenga una componente dirigida hacia el exterior de la trayectoria.

PROBLEMA TIPO 2.6

Un cohete ha consumido todo su combustible cuando alcanza la posición A en la que lleva una velocidad **u** *y forma un ángulo* θ *respecto a la horizontal. Se inicia entonces el vuelo balístico (no propulsado) y alcanza una altura máxima adicional h en una posición B tras recorrer una distancia horizontal s a partir de A. Determinar las expresiones de h y s, el tiempo t de vuelo entre A y B y la ecuación de la trayectoria. Para el intervalo de tiempo en cuestión, considérese una Tierra plana con una aceleración de la gravedad constante g y despréciese toda resistencia por parte de la atmósfera.*



http://gratislibrospdf.com/

Solución. Como todas las componentes del movimiento se expresan directamente en función de las coordenadas horizontal y vertical, emplearemos un sistema rectangular x-y. Al despreciar la resistencia atmosférica $a_x = 0$ y $a_y = -g$ y el movimiento resultante será una superposición directa de dos movimientos rectilíneos de aceleración constante. Así

$$[dx = v_x\,dt] \qquad x = \int_0^t u\cos\theta\,dt \qquad x = ut\cos\theta$$

$$[dv_y = a_y dt] \qquad \int_{u\,\mathrm{sen}\,\theta}^{u_y} dv_y = \int_0^t (-g)\,dt \qquad u_y = u\,\mathrm{sen}\,\theta - gt$$

$$[d_y = v_y dt] \qquad y = \int_0^t (u\,\mathrm{sen}\,\theta - gt)\,dt \qquad y = ut\,\mathrm{sen}\,\theta - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Se alcanza la posición B cuando $v_y = 0$, lo cual ocurre para $0 = u\,\mathrm{sen}\,\theta - gt$, o sea

$$t = (u\,\mathrm{sen}\,\theta)/g \qquad \textit{Resp.}$$

Aplicando este valor del tiempo en la expresión de y se tiene la altura adicional máxima

$$h = u\left(\frac{u\,\mathrm{sen}\,\theta}{g}\right)\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{u\,\mathrm{sen}\,\theta}{g}\right)^2 \qquad h = \frac{u^2\,\mathrm{sen}^2\theta}{2g} \qquad \textit{Resp.}$$

La distancia horizontal se ve que es

$$s = u\left(\frac{u\,\mathrm{sen}\,\theta}{g}\right)\cos\theta \qquad s = \frac{u^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}{2g} \qquad \textit{Resp.}$$

que es evidentemente máxima cuando $\theta = 45°$. La ecuación de la trayectoria se obtiene eliminando t entre las expresiones de x e y, lo cual da

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\sec^2\theta \qquad \textit{Resp.}$$

Esta ecuación representa una parábola vertical como la de la figura.

① Este problema no es sino la descripción del movimiento de un proyectil despreciando la resistencia del aire.

② Vemos que el alcance total y el tiempo de vuelo de un proyectil disparado desde un plano horizontal hubieran sido el doble de los valores respectivos de s y t obtenidos aquí.

③ De haberse tenido en cuenta la resistencia del aire, habría tenido que establecerse la dependencia de las componentes de la aceleración con la velocidad antes de proceder a la integración de las ecuaciones. Con ello, el problema se hace mucho más difícil.

PROBLEMAS

(En aquellos problemas de los que siguen que se refieran a un proyectil que se mueva en el aire se despreciará, salvo otra indicación, la resistencia del aire y se empleará $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.)

Problemas introductorios

2.59 En el instante $t = 3{,}60$ el vector de posición de un punto que se mueve en el plano x-y es $2{,}76\mathbf{i} - 3{,}28\mathbf{j}$ m. En el instante $t = 3{,}62$ el vector de posición ha cambiado a $2{,}79\mathbf{i} - 3{,}33\mathbf{j}$ m. Hallar el módulo v de la velocidad media en ese intervalo y el ángulo θ que la misma forma con el eje x.

Resp. $v = 2{,}92$ m/s, $\theta = -59{,}0°$

2.60 En el instante $t = 6$ s la velocidad de un punto que se mueve en el plano x-y es $4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ m/s, y en el instante $t = 6{,}1$ s la velocidad ha cambiado a $4{,}3\mathbf{i} + 5{,}4\mathbf{j}$ m/s. Hallar el módulo a de la aceleración media durante el intervalo de 0,1 s y el ángulo θ que la misma forma con el eje x.

2.61 En el instante $t = 3{,}65$ s la velocidad de un punto que se mueve en el plano x-y es $6{,}12\mathbf{i} + 3{,}24\mathbf{j}$ m/s. Su aceleración media durante los 0,02 s siguientes es $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ m/s^2. Hallar su velocidad v en el instante $t = 3{,}67$ s y el ángulo θ entre el vector aceleración media y el vector velocidad en el mismo instante.

Resp. $\mathbf{v} = 6{,}20\mathbf{i} + 3{,}36\mathbf{j}$ m/s, $\theta = 27{,}9°$

2.62 Las coordenadas, en milímetros, de un punto animado de movimiento curvilíneo varían con el tiempo t, en segundos, de acuerdo con $x = 2t^2 - 4t$ e $y = 3t^3 - \frac{1}{3}t^3$. Hallar los módulos de la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ y los ángulos que esos vectores forman con el eje x en el instante $t = 2$ s.

http://gratislibrospdf.com/

2.63 Un techador lanza una pequeña herramienta hacia un ayudante que está en el suelo. ¿Cuál es la velocidad horizontal mínima v_0 para que el objeto pase justo por el punto B? Ubicar el punto de impacto especificando la distancia s indicada en la figura.

Resp. $v_0 = 6{,}64$ m/s, $s = 2{,}49$ m

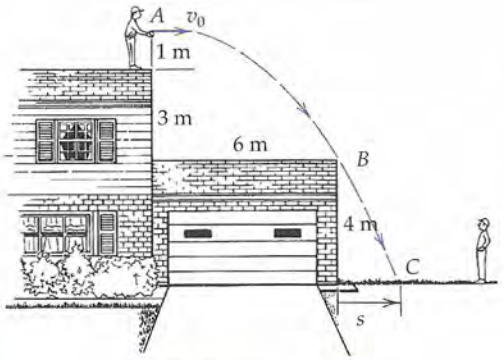


Figura problema 2.63

2.64 Los movimientos x e y de las guías A y B, cuyas ranuras forman ángulo recto, controlan el movimiento del pasador de enlace P, que resbala por ambas ranuras. Durante un corto intervalo esos movimientos están regidos por $x = 20 + \frac{1}{4}t^2$ e $y = 15 - \frac{1}{6}t^3$, donde x e y son milímetros y t son segundos. Calcular los módulos de la velocidad **v** y la aceleración a del pasador para $t = 2$ s. Esquematizar la forma de la trayectoria e indicar su curvatura en ese instante.

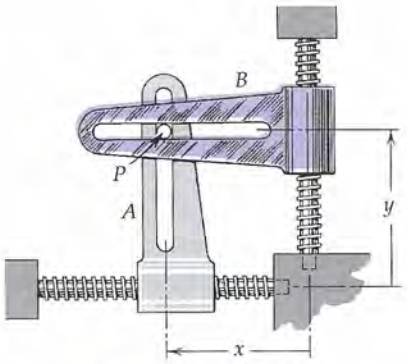


Figura problema 2.64

2.65 Un saltador de longitud se acerca a la raya A con una velocidad horizontal de 10 m/s. Hallar la componente vertical v_y de la velocidad de su centro de gravedad, en el momento del brinco, necesaria para que realice el salto representado. ¿Qué altura h sube su centro de gravedad?

Resp. $v_y = 3{,}68$ m/s, $h = 0{,}690$ m

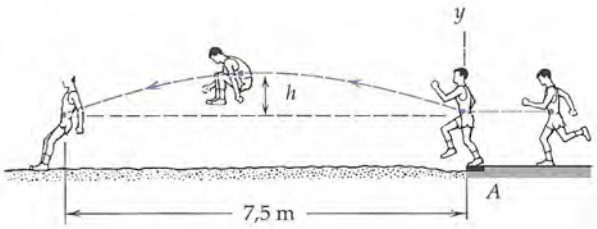


Figura problema 2.65

2.66 La coordenada y de un punto animado de un movimiento curvilíneo está dada por $y = 4t^3 - 3t$, donde y son metros y t son segundos. Además, el punto posee una aceleración en la dirección x que vale $a_x = 12t$ m/s^2. Si la velocidad en la dirección x es de 4 m/s cuando $t = 0$, calcular los módulos de la velocidad **v** y la aceleración **a** del punto cuando $t = 1$ s. Dibujar **v** y **a** en la solución.

2.67 A un cohete se le agota el combustible en la posición representada y prosigue en vuelo no propulsado por encima de la atmósfera. Si su velocidad en esa posición era de 1000 km/h, calcular la altura adicional h que alcanza y el tiempo t que tarda en llegar a ella. Durante esa fase del vuelo la aceleración de la gravedad es 9,39 m/s^2.

Resp. $h = 3{,}08$ km, $t = 25{,}6$ s

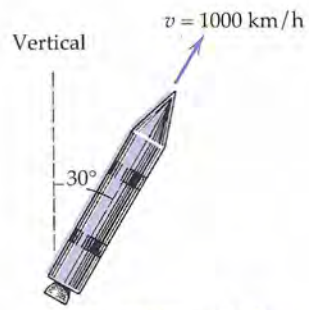


Figura problema 2.67

Problemas representativos

2.68 El vector de posición de un punto que se mueve en el plano x-y está dado por

$$\mathbf{r} = \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2\right)\mathbf{i} + \frac{t^4}{12}\mathbf{j}$$

donde **r** está en metros y t está en segundos. Hallar el ángulo que forman la velocidad **v** y la aceleración **a** cuando (*a*) $t = 2$ s y (*b*) $t = 3$ s.

2.69 El piloto de un avión que transporta una saca de correos a un lugar remoto desea soltarla en el momento justo para que alcance el punto A. ¿Qué ángulo θ deberá formar la visual al blanco con la horizontal en el instante del lanzamiento?

Resp. $\theta = 21{,}7°$

http://gratislibrospdf.com/

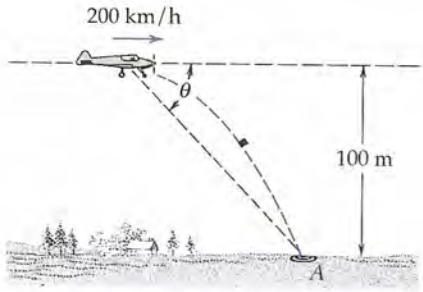


Figura problema 2.69

2.70 Demostrar el conocido hecho de que, para una velocidad de lanzamiento dada v_0, el ángulo de lanzamiento $\theta = 45°$ produce el máximo alcance R. Hallar éste. (Téngase en cuenta que esta conclusión no es válida cuando en el análisis se incluye la resistencia del aire.)

2.71 Con la condiciones iniciales indicadas, desde el punto A se dispara un proyectil. Hallar la distancia en pendiente s que localiza el punto B del impacto. Calcular el tiempo de vuelo t.

Resp. $s = 1057$ m, $t = 19{,}50$ s

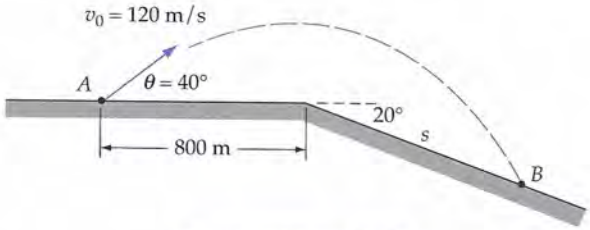


Figura problema 2.71

2.72 El punto P describe la trayectoria circular de radio r, tal como se ilustra. Si $\dot{\theta} = \omega =$ constante, demostrar que la aceleración de P está siempre dirigida hacia el centro.

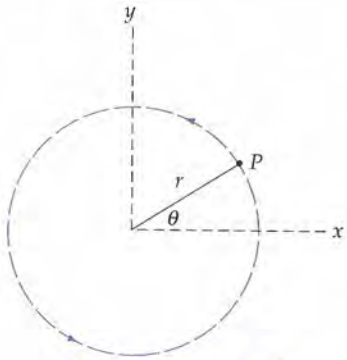


Figura problema 2.72

2.73 Un punto se mueve en el plano x-y con una componente y de la velocidad, en metros por segundo, dada por $v_y = 8t$. Su aceleración en la dirección x, en metros por segundos al cuadrado, viene dada por $a_x = 4t$, con t en segundos. Cuando $t = 0$, $y = 2$, $x = 0$ y $v_x = 0$. Hallar la ecuación de la trayectoria y calcular la celeridad del punto cuando la coordenada x alcanza el valor 18 m.

Resp. $(y - 2)^3 = 144x^2$, $v = 30$ m/s

2.74 Con una velocidad $v_0 = 25$ m/s se dispara un proyectil desde el suelo de un túnel de 5 m de altura. Hallar el alcance máximo R y el ángulo de disparo θ correspondiente.

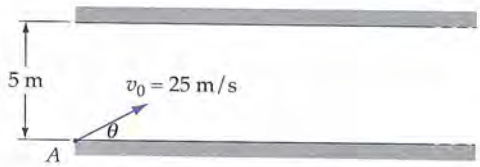


Figura problema 2.74

2.75 Durante un cierto intervalo del movimiento el pasador P es obligado a moverse por la ranura parabólica fija merced a la guía ranura vertical, la cual se mueve en la dirección x a la velocidad constante de 20 mm/s. Las cantidades están todas en milímetros y segundos. Calcular los módulos de la velocidad **v** y la aceleración **a** del pasador P cuando $x = 60$ mm.

Resp. $v = 25$ mm/s, $a = 5$ mm/s^2

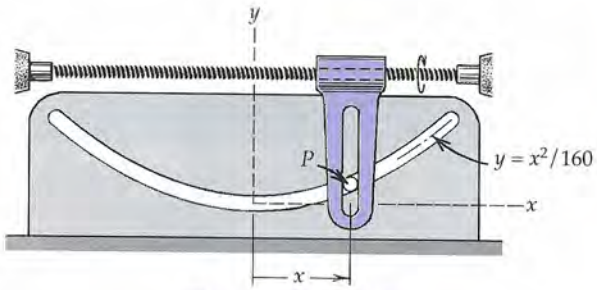


Figura problema 2.75

2.76 Si el tenista de la figura saca horizontalmente ($\theta = 0$), calcular su velocidad si el centro de la pelota salva la red de 0,90 m con un márgen 150 mm. Determinar también la distancia s desde la red al punto en que la pelota choca con el suelo de la cancha. Despreciar la resistencia del aire y el efecto del giro de la pelota.

http://gratislibrospdf.com/

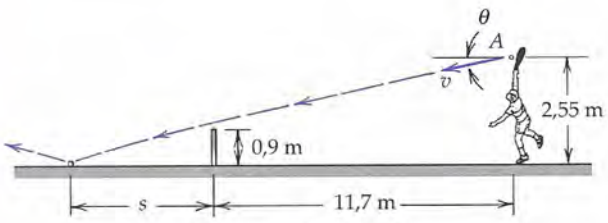


Figura problema 2.76

2.77 Si el tenista del problema 2.76 saca con una velocidad v de 130 km/h y un ángulo $\theta = 5°$, calcular la distancia con que el centro de la pelota salva el borde superior de la red y la distancia s desde la red al punto en que la pelota choca con el suelo de la cancha. Despreciar la resistencia del aire y el efecto del giro de la pelota.

Resp. $h = 107{,}5$ mm, $s = 5{,}15$ m

2.78 La velocidad de un proyectil en la boca de un fusil de largo alcance, situado en A, es $u = 400$ m/s. Hallar los dos ángulos de elevación θ que permitirán al proyectil alcanzar el blanco B de la montaña.

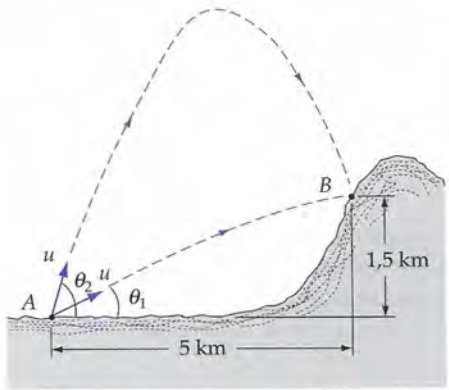


Figura problema 2.78

2.79 Se lanza un proyectil con una velocidad inicial de 200 m/s y un ángulo de 60° respecto a la horizontal. Calcular el alcance R medido pendiente arriba.

Resp. $R = 2970$ m

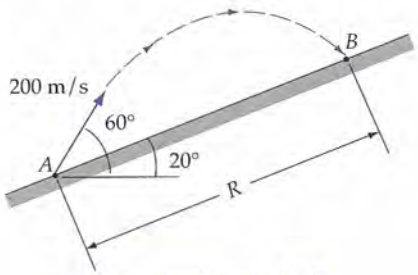


Figura problema 2.79

2.80 Las bolas de cojinete salen del canal horizontal a una velocidad de módulo u y caen, según se muestra, por el orificio de 70 mm de diámetro. Calcular entre qué limites puede variar u para que las bolas entren en el orificio. Los casos límites se representan con trazo discontinuo.

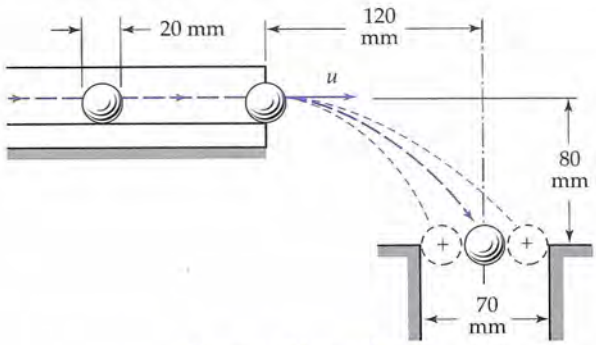


Figura problema 2.80

2.81 Un partícula es expulsada del tubo A con una velocidad v y formando un ángulo θ con el eje vertical y. Un intenso viento horizontal comunica a la partícula una aceleración horizontal constante en la dirección x. Si la partícula golpea en el suelo en un punto situado exactamente debajo de la posición de lanzamiento, hallar la altura h del punto A. La aceleración descendente en la dirección y puede tomarse como la constante g.

$$\textit{Resp. } h = \frac{2}{a}v^2 \operatorname{sen}\theta\left(\cos\theta + \frac{g}{a}\operatorname{sen}\theta\right)$$

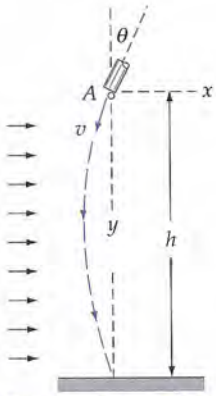


Figura problema 2.81

2.82 El niño de la figura lanza hacia arriba la pelota con una velocidad $v_0 = 12$ m/s y el viento comunica a la misma una aceleración horizontal de 0,4 m/s^2 hacia la izquierda. ¿Con qué angulo θ hay que lanzar la pelota para que vuelva al punto de partida? Supóngase que el viento no afecta al movimiento vertical.

http://gratislibrospdf.com/

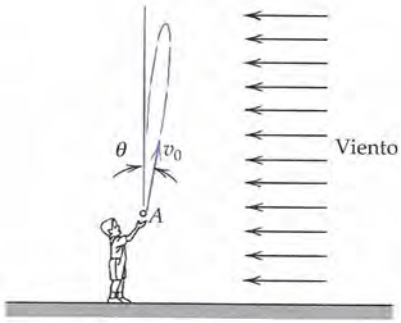


Figura problema 2.82

2.83 En los tubos de rayos catódicos, los electrones procedentes de la fuente viajan horizontalmente a la velocidad v_0 y son desviados por un campo eléctrico E debido al gradiente de tensiones entre las placas P. La fuerza deflectora produce una aceleración en dirección vertical que vale eE/m, donde e es la carga del electrón y m su masa. Si se retiran las placas, los electrones se mueven en línea recta. Hallar la expresión de la desviación δ para las dimensiones de tubo y placas representadas.

Resp. $\delta = \dfrac{eEl}{mv_0^2}\left(\dfrac{l}{2}+b\right)$

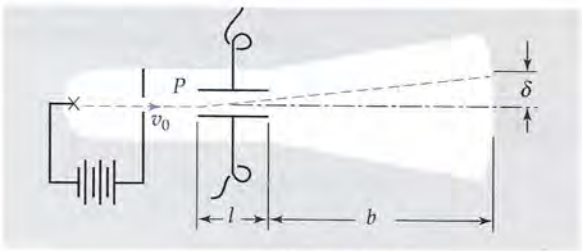


Figura problema 2.83

2.84 Desde A se emiten electrones con una velocidad v y un angulo θ al espacio comprendido entre las dos placas cargadas. Entre éstas, el campo eléctrico es en el sentido E y repele los electrones que se acercan a la placa superior. El campo confiere a los electrones una aceleración eE/m en la dirección E, donde e es la carga del electrón y m su masa. Hallar la intensidad de campo E que permite a los electrones alcanzar la mitad de la distancia entre placas. Determinar también la distancia s.

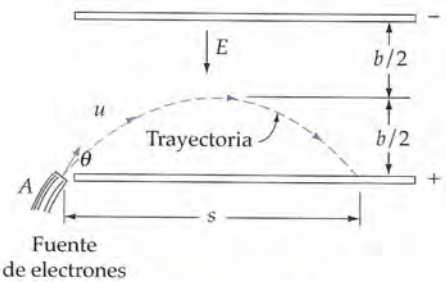


Figura problema 2.84

2.85 Para pasar el control de calidad, las bolas de cojinete deben atravesar un orificio de dimensiones limitadas situado en la parte más alta de su trayectoria después de rebotar, tal como se representa, sobre una placa de gran masa. Calcular el ángulo θ que forma la velocidad de rebote con la horizontal y la velocidad v de las bolas cuando atraviesan el orificio.

Resp. $\theta = 68{,}2°$, $v = 1{,}253$ m/s

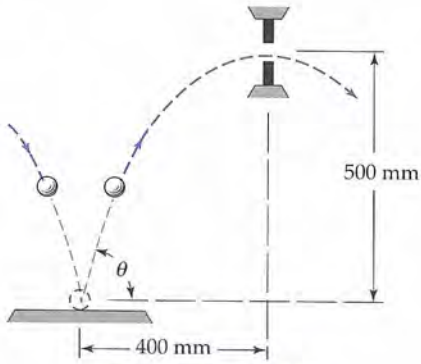


Figura problema 2.85

2.86 La boquilla de agua despide el líquido con una velocidad $v_0 = 14$ m/s y con un ángulo $\theta = 40°$. Determinar, respecto al pie B del murete, el punto en que el agua llega al suelo. Despreciar el efecto del espesor del murete.

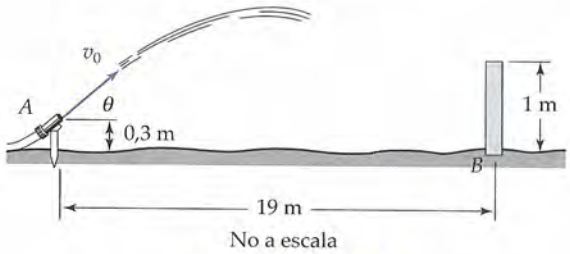


Figura problema 2.86

2.87 El agua sale de la boquilla del problema 2.86 con una velocidad $v_0 = 14$ m/s. ¿Para qué valor del ángulo θ llegará el agua al suelo lo más cerca posible del murete tras salvar el borde superior de éste? Despreciar el efecto del espesor del murete y la resistencia del aire. ¿En qué punto llega el agua al suelo?

Resp. $\theta = 50{,}7°$, a 0,835 a la derecha de B

http://gratislibrospdf.com/

2.88 Determinar la posición h del lugar hacia el cual debe tirar el lanzador la pelota para que impacte en los guantes del parador. La pelota sale a 40 m/s.

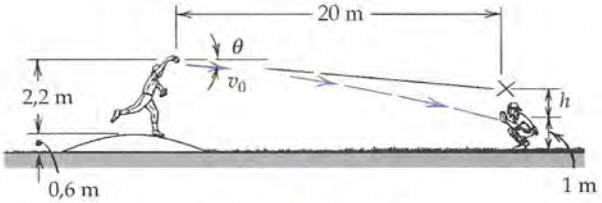


Figura problema 2.88

2.89 Un futbolista intenta marcar un gol a 30 m de la portería. Si es capaz de comunicar a la pelota una velocidad u de 30 m/s, calcular el ángulo mínimo θ para el cual la pelota puede pasar rozando el travesaño de la portería. (*Sugerencia*: Hacer $m = \text{tg}\ \theta$.)

Resp. $\theta = 15{,}45°$

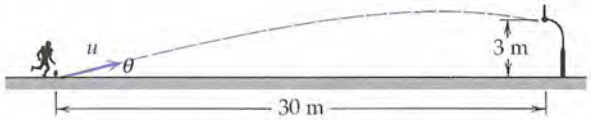


Figura problema 2.89

2.90 Un baloncestista quiere lanzar una falta con un ángulo $\theta = 50°$ respecto a la horizontal, tal como se muestra. ¿Qué velocidad inicial v_0 hará que la pelota pase por el centro del aro?

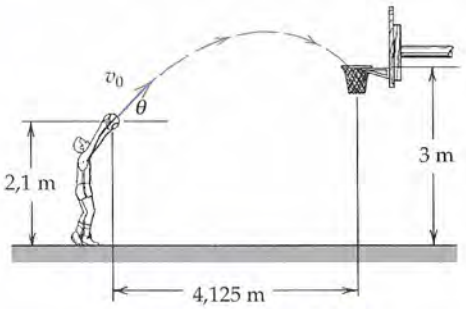


Figura problema 2.90

2.91 En la figura se ilustra un detalle de la pelota y el aro del problema 2.90. Supóngase que el jugador lanza siempre la pelota con una velocidad $v_0 = 7{,}3$ m/s. Para el margen de posiciones horizontales indicado en la figura, hallar el correspondiente intervalo de valores del ángulo de lanzamiento θ. (Téngase en cuenta que las posiciones horizontales no están repartidas simétricamente en torno al centro del aro en razón de que la pelota debe franquear el borde delantero del aro.)

Resp. $42{,}2° \leq \theta \leq 43{,}9°$

$58{,}1° \leq \theta \leq 60{,}1°$

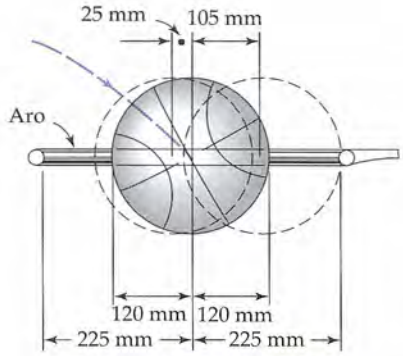


Figura problema 2.91

2.92 El piloto de un avión, que va a 300 km/h y toma altura con un ángulo de 45°, lanza un paquete en la posición A. Calcular la distancia horizontal s y el tiempo t desde el momento del lanzamiento hasta el momento en que el paquete choca con el suelo.

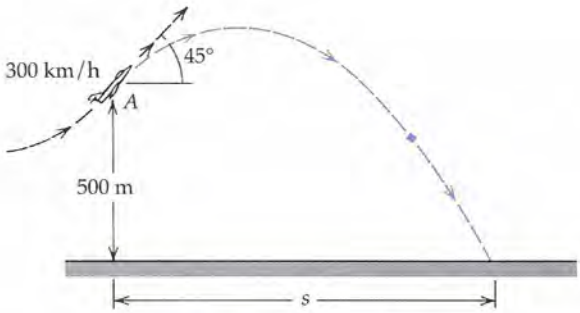


Figura problema 2.92

2.93 En el instante $t = 0$ se lanza un proyectil en el seno de un fluido experimental. La velocidad inicial es v_0 y θ es el ángulo

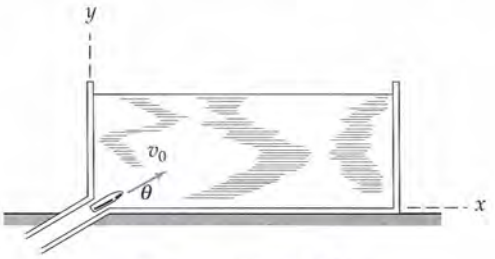


Figura problema 2.93

http://gratislibrospdf.com/

con la horizontal. La resistencia sobre el proyectil se traduce en una aceleración $\mathbf{a}_D = -k\mathbf{v}$, donde k es una constante y $\mathbf{v}$ es la velocidad del proyectil. Determinar, como funciones del tiempo, las componentes x e y tanto de la velocidad como del desplazamiento. ¿Cuál es la velocidad terminal? Se incluirán los efectos de la aceleración gravitatoria.

$$\textit{Resp. } v_x = (v_0 \cos\theta)e^{(-kt)},\ x = \frac{v_0 \cos\theta}{k}(1 - e^{-kt})$$

$$v_y = \left(v_0 \operatorname{sen}\theta + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

$$y = \frac{1}{k}\left(v_0 \operatorname{sen}\theta + \frac{g}{k}\right)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t$$

$$v_x \to 0,\ v_y \to -\frac{g}{k}$$

2.94 Un punto P está localizado por su vector de posición $\mathbf{r} = (b_1 \cos\theta)\mathbf{i} + (b_2 \operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$, donde b_1 y b_2 son constantes y θ es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y el eje x. Si θ aumenta constantemente a razón de $\dot{\theta}$, demostrar que P describe una trayectoria elíptica con una aceleración proporcional a r dirigida según $\mathbf{r}$ hacia el origen.

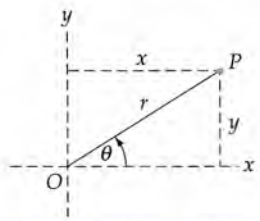


Figura problema 2.94

2.95 Hallar la ecuación de la envolvente a de las trayectorias parabólicas de los proyectiles disparados bajo distintos ángulos pero con velocidad en boca constante u. (*Sugerencia*: Sustituir m por $tg\ \theta$, siendo θ el ángulo de disparo en la ecuación de la trayectoria. La dos raíces m_1 y m_2 de la ecuación escrita como ecuación de segundo grado en m dan los dos ángulos de disparo correspondientes a las dos trayectorias de la figura tales que pasan por el mismo punto A. El punto A tenderá a ser un punto de la envolvente a a medida que las dos raíces tienden una a la otra.) Despreciar la resistencia del aire y suponer que g es constante.

$$\textit{Resp. } y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$$

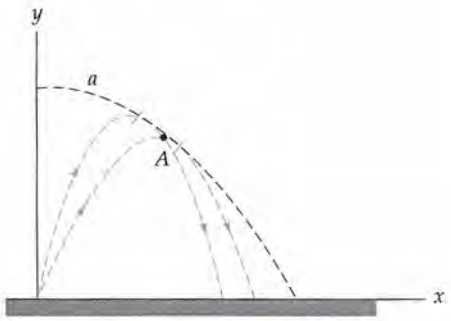


Figura problema 2.95

2.96 En el punto A se dispara un proyectil con la velocidad v_0. Hallar el ángulo de disparo θ que produce el máximo alcance R a lo largo de la pendiente de ángulo α ($0 \le \alpha \le 90°$). Hallar los valores correspondientes a $\alpha = 0, 30°$ y $45°$.

$$\textit{Resp. } \theta = \frac{90° + \alpha}{2},\ \theta = 45°, 60°, 67{,}5°$$

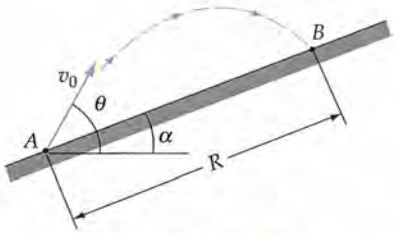


Figura problema 2.96

2.5 COORDENADAS TANGENCIAL Y NORMAL (*n-t*)

Al comienzo de este capítulo, en el apartado 2.1, dijimos que una de las formas más habituales de describir el movimiento curvilíneo se basa en el empleo de las componentes locales, las cuales son las componentes medidas a lo largo de la tangente t y la normal n a la trayectoria. Estas coordenadas locales permiten describir de una manera muy natural los movimientos curvilíneos y frecuentemente son las más directas y prácticas. Tal como se representa en la figura 2.9, se supone que los ejes t y n se desplazan con el punto material a lo largo de

http://gratislibrospdf.com/

la trayectoria desde A hacia B. El sentido positivo de n se toma, en todas las posiciones, dirigido siempre hacia el centro de curvatura de la trayectoria. Como puede apreciarse en la figura 2.9, el sentido positivo de n puede desplazarse de uno a otro lado de la trayectoria si cambia el sentido de la curvatura.

Ahora vamos a emplear las coordenadas t y n, introducidas en el apartado 2.3,para representar la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ de un punto material en movimiento curvilíneo. Con este propósito, introduzcamos los vectores unitarios $\mathbf{e}_n$ según n y $\mathbf{e}_t$ según t, tal como se muestra en la figura 2.10*a* en el punto A de la trayectoria del punto. Durante un intervalo infinitesimal de tiempo dt, el punto recorre la distancia infinitesimal ds comprendida entre A y A'. Representando por ρ el radio de curvatura de la trayectoria en el punto considerado, vemos que $ds = \rho\, d\beta$, donde β son radianes. Vemos que es innecesario considerar la variación infinitesimal de ρ entre A y A' pues se introduciría un término de orden superior que desaparecería en el límite, por lo que el módulo de la velocidad puede escribirse como $v = ds/dt = \rho\, d\beta/dt$. Entonces, podemos escribir que la velocidad es el vector

Figura 2.9

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t = \rho\dot{\beta}e_t \tag{2.7}$$

En el apartado 2.3 definimos la aceleración como $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ y con relación a la figura 2.5 hicimos observar que se trata de un vector que da cuenta de las variaciones de la velocidad $\mathbf{v}$ tanto en módulo como en dirección. Diferenciemos ahora $\mathbf{v}$ en la ecuación 2.7 aplicando la regla usual de derivación del producto de un escalar por un vector[1]; resulta así

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{e}_t)}{dt} = v\dot{\mathbf{e}}_t + \dot{v}\mathbf{e}_t \tag{2.8}$$

donde la derivada del vector $\mathbf{e}_t$ es distinta de cero porque su dirección varía. Para hallar $\dot{\mathbf{e}}_t$ estudiemos la variación de $\mathbf{e}_t$ durante el desplazamiento infinitesimal del punto de A a A' representado en la figura 2.10*a*. El vector unitario varía correspondientemente de $\mathbf{e}_t$ a $\mathbf{e}'_t$ y la diferencia $d\mathbf{e}_t$ entre ambos se representa en la parte *b* de la figura. En el límite, el módulo del vector diferencia $d\mathbf{e}_t$ es igual a la longitud del arco $|\mathbf{e}_t|d\beta = d\beta$ que se obtiene haciendo girar el vector unitario $\mathbf{e}_t$ el ángulo $d\beta$ expresado en radianes. El sentido de $d\mathbf{e}_t$ está dado por $\mathbf{e}_n$. Así pues, podemos escribir $d\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_n\, d\beta$ y al dividir por $d\beta$ resulta

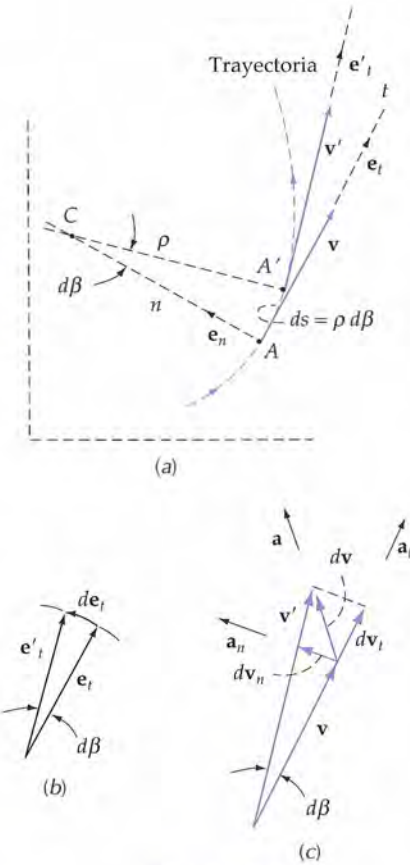


Figura 2.10

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{d\beta} = \mathbf{e}_n$$

o bien, al dividir por dt, queda $d\mathbf{e}_t/dt = (d\beta/dt)\mathbf{e}_n$, que puede escribirse

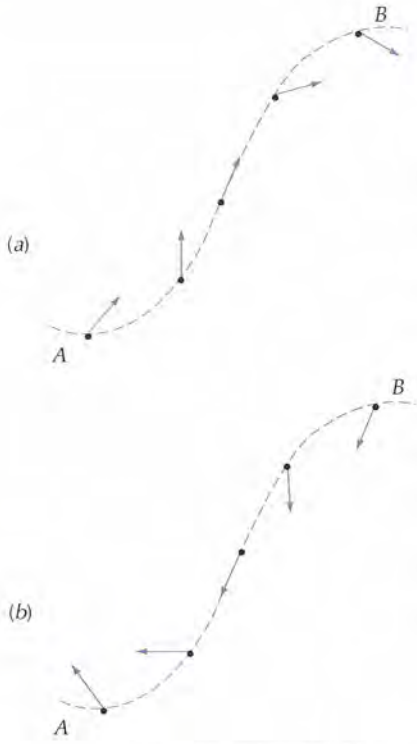
$$\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\beta}e_n \tag{2.9}$$

Aplicando la ecuación 2.9 y el valor de $\dot{\beta}$ dado por $v = \rho\dot{\beta}$ en 2.8 de la aceleración resulta

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{r}\mathbf{e}_n + \dot{v}\mathbf{e}_t \tag{2.10}$$

[1] Veáse C.7 en el apéndice C

http://gratislibrospdf.com/



Vectores aceleración de un punto material que se desplaza de A a B. (a) Aumenta la celeridad; (b) disminuye la celeridad.

Figura 2.11

donde

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\dot{\beta}^2 = v\dot{\beta}$$
$$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$$
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

Podemos observar también que $a_t = \dot{v} = d(\rho\dot{\beta})/dt = \rho\ddot{\beta} + \dot{\rho}\dot{\beta}$. Sin embargo, esta relación se aplica muy poco ya que son contadas las ocasiones en que debe calcularse $\dot{\rho}$.

Sólo si se ve con toda claridad la geometría de las variaciones vectoriales que describe la ecuación 2.10, podrá ésta ser entendida por completo. En la figura 2.10*a* se representa el vector velocidad $\mathbf{v}$ del punto material cuando éste se encuentra en A y $\mathbf{v}'$ cuando se encuentra en A'. La correspondiente variación de velocidad es el vector $d\mathbf{v}$ que establece la dirección y el sentido de $\mathbf{a}$. La componente n de $d\mathbf{v}$ se representa por $d\mathbf{v}_n$ y en el límite su módulo es igual a la longitud del arco engendrado por el vector $\mathbf{v}$ como radio cuando gira un ángulo $d\beta$. Entonces es $|d\mathbf{v}_n| = v\,d\beta$ y la componente n de la aceleración es $a_n = |d\mathbf{v}_n|/dt = v(d\beta/dt) = v\dot{\beta}$ como vimos antes. La componente t de $d\mathbf{v}$ se representa por $d\mathbf{v}_t$ y su módulo es sencillamente la variación dv del módulo del vector velocidad; por tanto, la componente t de la aceleración volverá a resultar $a_t = dv/dt = \dot{v} = \ddot{s}$. En la figura 2.10*c* se representan también las componentes vectoriales de la aceleración junto a las correspondientes componentes vectoriales de la variación de la velocidad.

Es particularmente importante observar que la componente normal de la aceleración a_n *está siempre dirigida hacia el centro de curvatura* C. Por otra parte, la componente tangencial de la aceleración estará dirigida en el sentido t positivo del movimiento si la celeridad v aumenta, y en el sentido t negativo si la celeridad v disminuye. En la figura 2.11 se representa esquemáticamente la variación del vector aceleración de un punto material que se mueve entre A y B para los casos de celeridad creciente (a) y decreciente (b). En el punto de inflexión de la trayectoria la aceleración normal v^2/ρ se hace nula puesto que ρ se hace infinito.

El movimiento circular constituye un importante caso particular del movimiento curvilíneo plano, en el cual el radio de curvatura ρ es el radio constante r de la circunferencia y el ángulo β es el ángulo θ que se mide desde cualquier radio de referencia hasta OP (fig. 2.12). La velocidad y las componentes de la aceleración de un punto material P pasan a ser, cuando el mismo describe un movimiento circular,

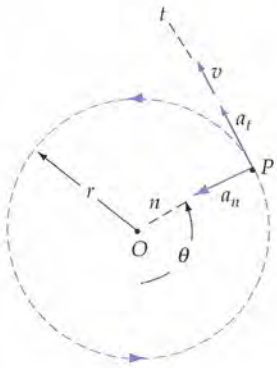


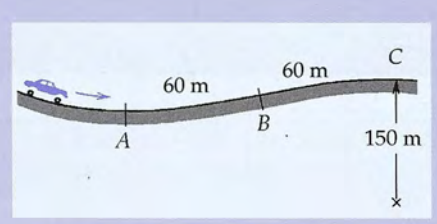
Figura 2.12

$$\begin{aligned} v &= r\dot{\theta} \\ a_n &= v^2/r = r\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta} \\ a_t &= \dot{v} = r\ddot{\theta} \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Las ecuaciones 2.10 y 2.11 se cuentan entre las relaciones más utilizadas en Dinámica, por lo que las mismas y el significado de lo que representan deben *dominarse a fondo*.

http://gratislibrospdf.com/

Previniéndose de la depresión y del cambio de rasante de la carretera, el conductor del automóvil aplica los frenos al objeto de producir una desaceleración constante. En el fondo A de la depresión la velocidad es 100 km/h y en el punto más elevado C del cambio de rasante, separado de A 120 m de carretera, es 50 km/h. Si los pasajeros experimentan en A una aceleración total de 3 m/s² y el radio de curvatura del cambio de rasante en C es 150 m, calcular (a) el radio de curvatura ρ en A, (b) la velocidad en el punto de inflexión B y (c) la aceleración total en C.



Solución. Podemos tratar el automóvil como punto material puesto que sus dimensiones son reducidas en comparación con las de su trayectoria. Las velocidades son

(1)

$$v_A = \left(100\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}}\right)\left(1000\frac{\text{m}}{\text{km}}\right) = 27{,}78\text{ m/s}$$

$$v_C = 50\frac{1000}{3600} = 13{,}89\text{ m/s}$$

Ahora hallamos la desaceleración constante a lo largo de la trayectoria

$$\left[\int v\,dv = \int a_t\,ds\right] \qquad \int_{v_A}^{v_C} v\,dv = a_t\int_0^s ds$$

$$a_t = \frac{1}{2s}(v_C^2 - v_A^2) = \frac{(13{,}89)^2 - (27{,}78)^2}{2(120)} = -2{,}41\text{ m/s}^2$$

(a) Condiciones en A. Conocida la aceleración total y determinada a_t, podemos calcular fácilmente a_n y consiguientemente ρ:

$$[a^2 = a_n^2 + a_t^2] \qquad a_n^2 = 3^2 - (2{,}41)^2 = 3{,}19 \qquad a_n = 1{,}78\text{ m/s}^2$$

$$[a_n = v^2/\rho] \qquad \rho = v^2/a_n = (27{,}78)^2/1{,}78 = 432\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

(b) Condiciones en B. Como en el punto de inflexión el radio de curvatura es infinito, $a_n = 0$.

$$a = a_t = -2{,}41\text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

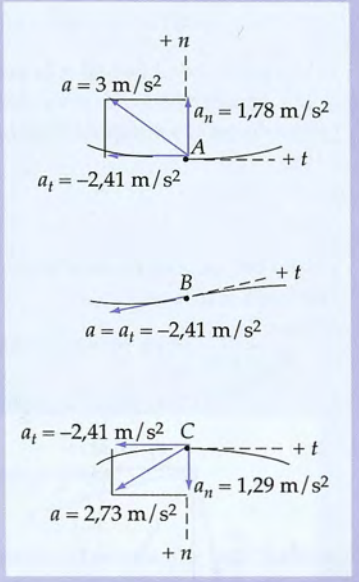
(c) Condiciones en C. La aceleración normal y total es

$$[a_n = v^2/\rho] \qquad a_n = (13{,}89)^2/150 = 1{,}29\text{ m/s}^2$$

Empleando los vectores unitarios $\mathbf{e}_n$ y $\mathbf{e}_t$ de las direcciones n y t, la aceleración puede escribirse

$$\mathbf{a} = 1{,}29\mathbf{e}_n - 2{,}41\mathbf{e}_t\text{ m/s}^2$$

(1) **En realidad, el radio de curvatura de la carretera difiere en un metro aproximadamente del de la trayectoria que sigue el centro de masa de los pasajeros, pero despreciamos esta diferencia relativamente pequeña.**



http://gratislibrospdf.com/

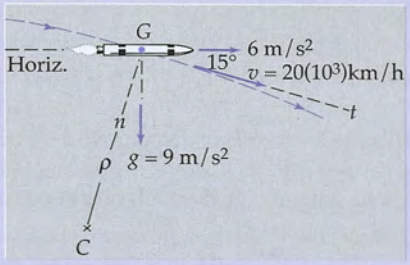
cuyo módulo es

$$[a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}] \qquad a = \sqrt{(1{,}29)^2 + (-2{,}41)^2} = 2{,}73 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Como aclaración se representan los vectores aceleración correspondientes a cada uno de los tres puntos considerados.

PROBLEMA TIPO 2.8

Un cohete mantiene su eje en posición horizontal durante la fase propulsada de su vuelo a gran altura. El empuje imprime al cohete una aceleración horizontal de 6 m/s² y la componente vertical de la aceleración es la aceleración de la gravedad a dicha altura que es g = 9 m/s². En el instante representado la velocidad del centro de masa G del cohete a lo largo de su trayectoria inclinada 15 grados es 20.000 km/h. Para dicha posición, determinar (a) el radio de curvatura de la trayectoria de vuelo, (b) el aumento de la celeridad v por unidad de tiempo, (c) el desplazamiento angular $\dot{\beta}$ por unidad de tiempo del radio de curvatura CG y (d) la expresión vectorial de la aceleración total **a** *del cohete.*



Solución. Sabemos que el radio de curvatura aparece en la expresión de la componente normal de la aceleración, por lo que emplearemos coordenadas locales para describir el movimiento de G. Las componentes t y n de la aceleración total se obtienen descomponiendo las aceleraciones vertical y horizontal dadas en sus componentes t y n y combinándolas a continuación. Según la figura, tenemos

$$a_n = 9 \cos 15^\circ - 6 \operatorname{sen} 15^\circ = 7{,}14 \text{ m/s}^2$$

$$a_t = 9 \operatorname{sen} 15^\circ + 6 \cos 15^\circ = 8{,}12 \text{ m/s}^2$$

(a) Ahora podemos calcular el radio de curvatura

$$[a_n = v^2/\rho] \qquad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{[20(10^3)/3{,}6]^2}{7{,}14} = 4{,}32(10^6) \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

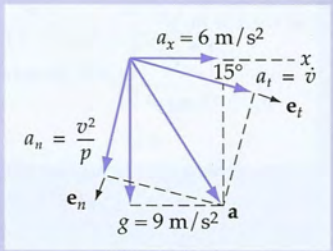
(b) La variación de v por unidad de tiempo es sencillamente la componente t de la aceleración

$$[\dot{v} = a_t] \qquad \dot{v} = 8{,}12 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

(1) Otra posibilidad es hallar la aceleración resultante y después descomponerla en sus componentes locales t y n.

(2) El factor de conversión para pasar de km/h a m/s es

$$\frac{1000 \text{ m/km}}{3600 \text{ s/h}} = (1 \text{ m/s})/(3{,}6 \text{ km/h})$$



http://gratislibrospdf.com/

(c) El desplazamiento angular por unidad de tiempo $\dot{\beta}$ del radio de curvatura GC depende de v y de ρ y está dado por

$$[v = \rho\dot{\beta}] \qquad \dot{\beta} = v/\rho = \frac{20(10^3)/3,6}{4,32(10^6)} = 12,85(10^{-4}) \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

(d) Empleando los vectores unitarios $\mathbf{e}_n$ y $\mathbf{e}_t$ en las direcciones n y t, respectivamente, la aceleración total es

$$\mathbf{a} = 7,14\mathbf{e}_n + 8,12\mathbf{e}_t \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

2.97 Un punto material describe una trayectoria circular de 0,4 m de radio. Calcular el módulo a de su aceleración si su celeridad (a) es constante y vale 0,6 m/s y (b) si vale 0,6 m/s pero aumenta a razón de 1,2 m/s cada segundo.

Resp. (a) $a = 0,9$ m/s^2, (b) $a = 1,5$ m/s^2

2.98 En la figura se muestran seis vectores aceleración para el automóvil cuyo vector velocidad apunta hacia adelante. Para cada uno de esos vectores aceleración describir con palabras el movimiento instantáneo del vehículo.

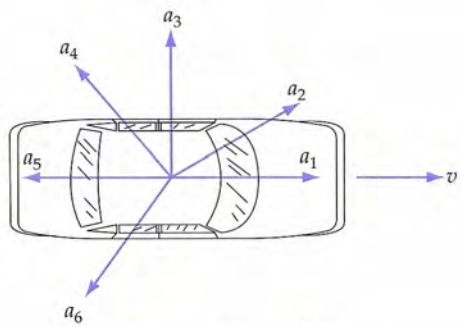


Figura problema **2.98**

2.99 Un punto material P describe una trayectoria circular de 3 m de radio. En el instante considerado su celeridad aumenta a razón de 6 m/s^2 y el módulo de su aceleración total vale 10 m/s^2. Hallar su celeridad v en ese instante.

Resp. $v = 4,90$ m/s

2.100 Un punto material describe la trayectoria curva representada. Si en el instante t_A el punto se encuentra en A con una celeridad de 12 m/s y en el instante t_B se encuentra en B con una celeridad de 13,5 m/s, hallar los valores medios de las aceleraciones normal y tangencial a la trayectoria entre ambos puntos.

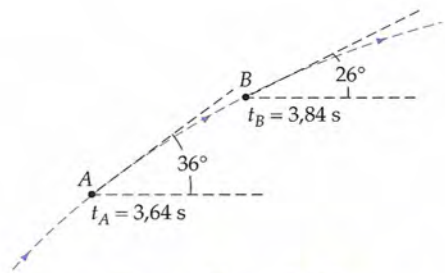


Figura problema **2.100**

2.101 El automóvil pasa por la depresión A de la carretera con una celeridad constante que confiere a su centro de masa G una aceleración que vale $0,5g$. Si el radio de curvatura de la carretera en A es 100 m, y si la distancia de la calzada al centro de masa G es de 0,6 m, hallar la celeridad v del vehículo.

Resp. $v = 79,5$ km/h

Figura problema **2.101**

2.102 El chofer del camión experimenta una aceleración de $0,4g$ cuando el vehículo pasa, a celeridad constante, por la cima A del cambio de rasante de la carretera. En ese punto el radio de curvatura de la carretera es 98 m y el centro de masa G del

http://gratislibrospdf.com/

chofer (considerado como partícula) se halla a 2 m por encima de la calzada. Calcular la celeridad v del camión.

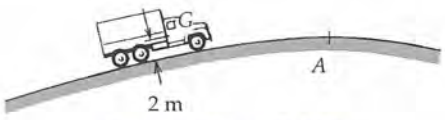


Figura problema 2.102

2.103 Una furgoneta se pone en marcha en la carretera de radio de curvatura constante de 40 m y peralte de 10°. El movimiento tiene lugar en un plano horizontal. Si la aceleración constante hacia adelante es 1,8 m/s^2, hallar el módulo a de la aceleración al cabo de 5 s de iniciado el movimiento.

Resp. $a = 2{,}71$ m/s^2

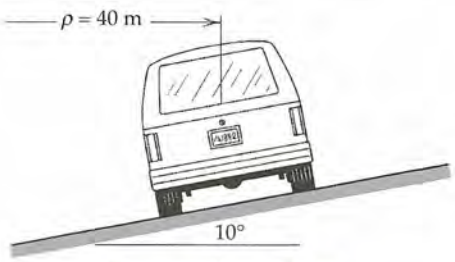


Figura problema 2.103

Problemas representativos

2.104 Un lanzadera espacial que describe una órbita circular a un altura $h = 240$ km sobre la superficie terrestre debe poseer una celeridad de 27 955 km/h. Calcular la aceleración gravitatoria g en esa altura. El radio medio de la Tierra es 6371 km. (Comprobar el resultado calculando g mediante la fórmula $g = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$, donde $g_0 = 9{,}821$ m/s^2 según la tabla D.2 del apéndice D.)

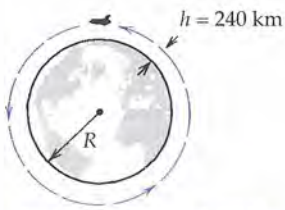


Figura problema 2.104

2.105 Con una celeridad constante v un satélite describe una órbita circular a 320 km sobre la superficie terrestre. Calcular v sabiendo que la aceleración del vehículo es la aceleración gravitatoria a esa altura. (*Observación*: Repasar el apartado 2/5 en lo necesario y emplear los valores medios de g y del radio de la Tierra. Compréndase además que v es el módulo de la velocidad del satélite respecto al centro de la Tierra.)

Resp. $v = 27{,}8(10^3)$ km/h

2.106 Considerar el eje polar de la Tierra fijo en el espacio y calcular el módulo de la aceleración a de un punto P de la superficie de la Tierra situado a 40 grados de latitud norte. El diámetro medio de la Tierra es 12 742 km y su velocidad angular es $0{,}729(10^{-4})$ rad/s.

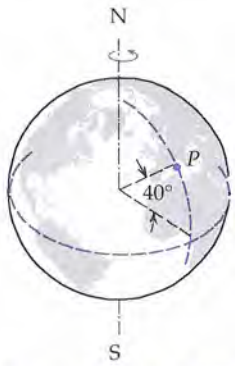


Figura problema 2.106

2.107 En una prueba de "ingravidez" un reactor de transporte que vuela a 800 km/h sigue una curva vertical tal como se indica en la figura. ¿A que razón $\dot{\beta}$ en grados por segundo debe inclinar el piloto la dirección de vuelo para conseguir en la cabina dicha condición de ingravidez ? La maniobra se realiza a una altura media de 8 km y la aceleración de la gravedad puede tomarse igual a 9,79 m/s^2.

Resp. $\dot{\beta} = 2{,}52$ grd/s

Figura problema 2.107

2.108 El anteproyecto de una estación espacial "pequeña" que debe girar alrededor de la Tierra en órbita circular consiste en un anillo (toro) de sección circular según se muestra. El espacio habitable dentro del toro corresponde a la sección A, donde el "nivel del suelo" está a 6 m del centro de la sección. Calcular la celeridad angular N en revoluciones por minuto necesaria para reproducir la gravedad normal en la superficie terrestre (9,81 g/m^2). Recuérdese que no se percibiría campo

http://gratislibrospdf.com/

gravitatorio alguno dentro de una nave espacial sin rotación que describiera una órbita circular en torno a la Tierra.

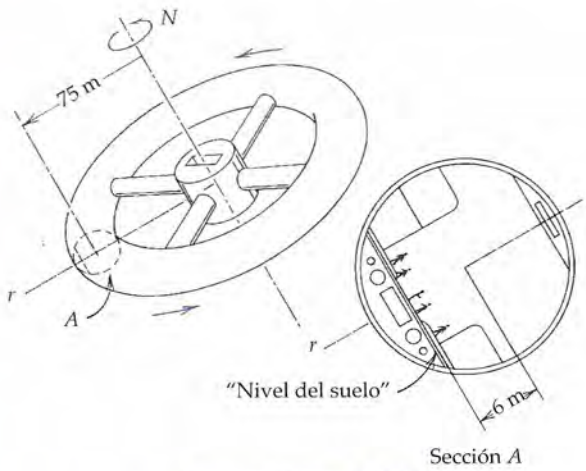


Figura problema 2.108

2.109 Se representa la distribución de un motor de automóvil de cuatro cilindros. Conforme el motor se acelera la velocidad de la correa varía uniformemente de 3 m/s a 6 m/s en un intervalo de dos segundos. Calcular los módulos de las aceleraciones de los puntos P_1 y P_2 en el instante medio de ese intervalo.

Resp. $a_{P_1} = 338\ \text{m/s}^2$, $a_{P_2} = 1{,}5\ \text{m/s}^2$

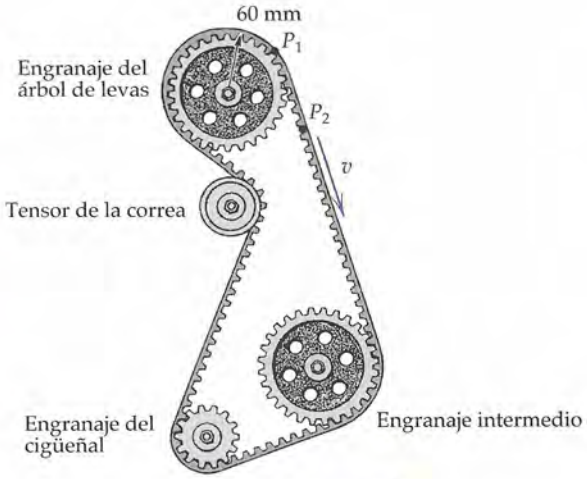


Figura problema 2.109

2.110 Escribir la expresión vectorial de la aceleración a del centro de masa G del péndulo simple en coordenadas n-t y en coordenadas x-y en el instante en que $\theta = 60°$ si $\dot{\theta} = 2{,}00\ \text{rad/s}$ y $\ddot{\theta} = 2{,}45\ \text{rad/s}^2$.

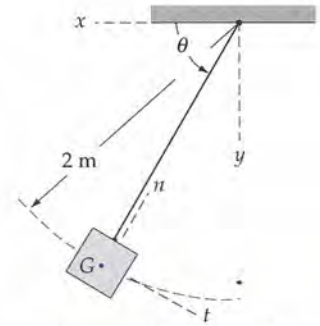


Figura problema 2.110

2.111 El jugador de béisbol lanza una pelota según las condiciones iniciales representadas. Hallar el radio de curvatura de la trayectoria (*a*) inmediatamente después del lanzamiento y (*b*) en el vértice. Calcular, en cada caso, la variación de celeridad por unidad de tiempo.

Resp. (*a*) $\rho = 105{,}9\ \text{m}$, $\dot{v} = -4{,}91\ \text{m/s}^2$; (*b*) $\rho = 68{,}8\ \text{m}$, $\dot{v} = 0$

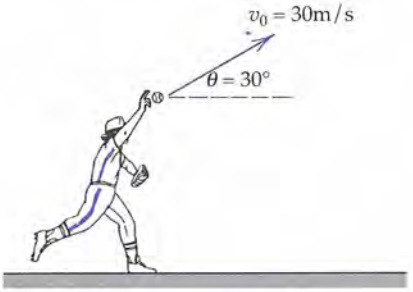


Figura problema 2.111

2.112 El pasador P de la manivela PO, enganchado a la ranura horizontal de la guía C, manda el movimiento de ésta sobre la varilla vertical fija. Hallar la velocidad $\dot{y}$ y la aceleración $\ddot{y}$ de C en función de θ si (*a*) $\dot{\theta} = \omega$ y $\ddot{\theta} = 0$ y (*b*) si $\dot{\theta} = 0$ y $\ddot{\theta} = \alpha$.

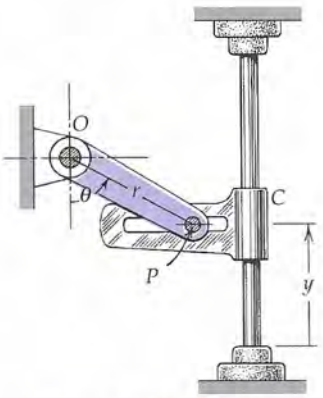


Figura problema 2.112

http://gratislibrospdf.com/

2.113 Un automóvil viaja por el tramo curvo de la carretera plana con una velocidad que disminuye a razón de 0,6 m/s cada segundo. Al pasar por el punto A, su velocidad es 16 m/s. Calcular el módulo de su aceleración total cuando pasa por el punto B situado 120 m más allá de A. En B el radio de curvatura de la carretera es 60 m.

Resp. $a = 1{,}961\ \text{m/s}^2$

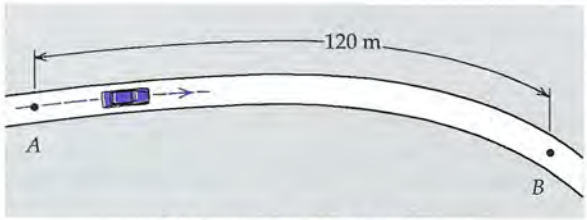


Figura problema 2.113

2.114 El automóvil C aumenta de celeridad uniformemente a razón de 1,5 m/s^2 cuando pasa por la curva. Si el módulo de la aceleración total del automóvil es 2,5 m/s^2 en el punto A donde el radio de curvatura es 200 m, calcular la celeridad v del automóvil en ese punto.

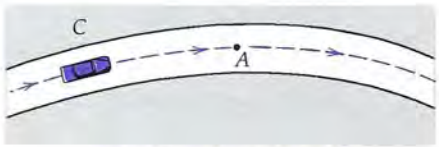


Figura problema 2.114

2.115 El movimiento del pasador A por la ranura circular fija está mandado por la guía B, que asciende por acción del husillo con una velocidad $v_0 = 2$ m/s durante un intervalo del movimiento. Calcular las componentes normal y tangencial de la aceleración del pasador A cuando pasa por la posición en que $\theta = 30°$.

Resp. $a_n = 21{,}3\ \text{m/s}^2$, $a_t = -12{,}32\ \text{m/s}^2$

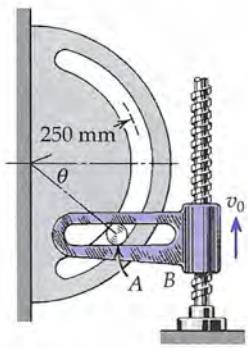


Figura problema 2.115

2.116 En el punto inferior A del rizo vertical interno, el módulo de la aceleración total del avión es $3g$. Si la velocidad aerodinámica (velocidad respecto al aire) es 800 km/h y ésta aumenta a razón de 20 km/h por segundo, calcular el radio de curvatura ρ de la trayectoria en A.

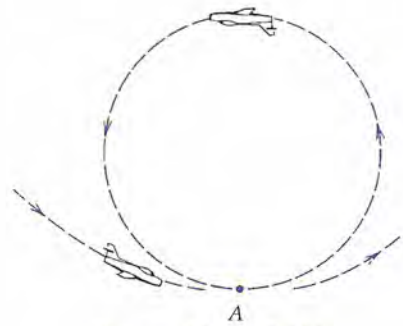


Figura problema 2.116

2.117 En un determinado punto de la reentrada de la lanzadera espacial en la atmósfera terrestre, la aceleración total del vehículo puede ser representada mediante dos componentes. Una de éstas es la aceleración gravitatoria a esa altitud, $g = 9{,}66\ \text{m/s}^2$. La segunda vale 12,90 m/s^2 y se debe a la resistencia de la atmósfera y es opuesta a la velocidad. La lanzadera se encuentra a una altura de 48,2 km y ha reducido su velocidad orbital de 28 300 km/h a 15 450 km/h en la dirección $\theta = 1{,}50°$. Para ese instante calcular el radio de curvatura ρ de la trayectoria y la variación $\dot{v}$ por unidad de tiempo de la celeridad.

Resp. $\dot{v} = -12{,}65\ \text{m/s}^2$, $\rho = 1907$ km

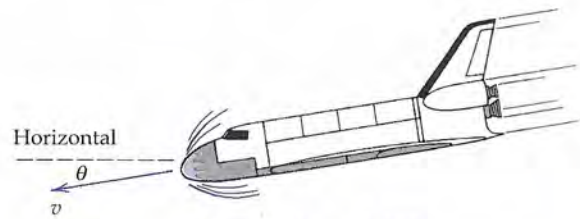


Figura problema 2.117

2.118 Una partícula se mueve con celeridad constante $v = 10$ m/s sobre la trayectoria circular de la figura de radio $r = 2$ m. Durante el movimiento de A a B la velocidad sufre una variación vectorial $\Delta\mathbf{v}$. Dividir esta variación por el intervalo de tiempo correspondiente al paso de uno a otro punto para obtener la aceleración normal media para (*a*) $\Delta\theta = 30°$, (*b*) $\Delta\theta = 15°$ y (*c*) $\Delta\theta = 5°$. Comparar estos valores con los de la aceleración normal instantánea.

http://gratislibrospdf.com/

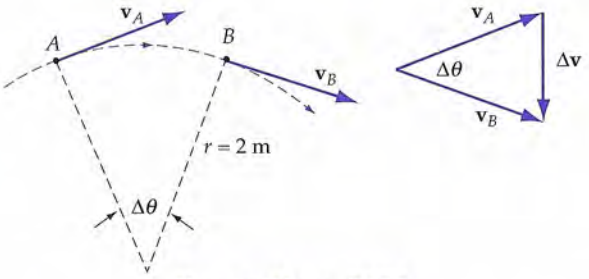


Figura problema 2.118

2.119 El auto de carreras A sigue la trayectoria a-a mientras que el B sigue la b-b sobre la pista no peraltada. Si ambos vehículos llevan una celeridad constante limitada a la correspondiente a una aceleración lateral (normal) de $0{,}8g$, hallar los tiempos t_A y t_B que respectivamente tardan los autos en recorrer la curva limitada por la recta C-C.

Resp. $t_A = 10{,}52$ s, $t_B = 10{,}86$ s

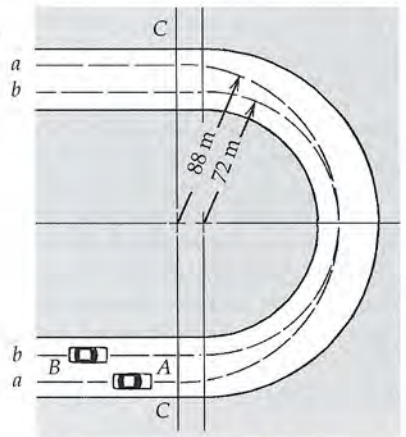


Figura problema 2.119

2.120 Un satélite terrestre situado en una órbita elíptica ecuatorial, tal como se muestra, lleva una velocidad v de 17 970 km/h cuando pasa por el extremo A del semieje menor. En la superficie terrestre el valor absoluto de g es 9,821 m/s^2 y el radio medio de la Tierra es 6371 km. Hallar el radio de curvatura ρ de la órbita en el punto A.

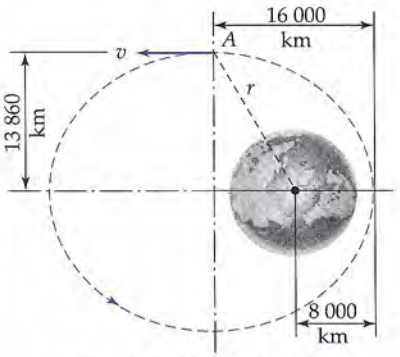


Figura problema 2.120

9.121 Cuando un bólido de carreras entra en una curva es deseable que la aceleración normal no la adquiera bruscamente, pues de otro modo podría generarse un comportamiento inestable. Para un vehículo que se mueva con una celeridad constante de 300 km/h, determinar la relación entre el radio de curvatura ρ de la curva y la distancia s a lo largo de la misma durante los primeros 200 m para que a_n varíe tal como se muestra en la gráfica.

Resp. $\rho = 1{,}573(10^5)/s$ (ρ y s en metros)

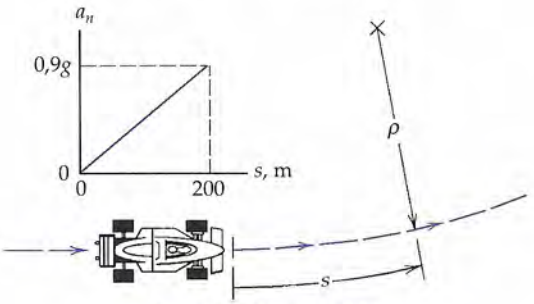


Figura problema 2.121

9.122 Un cohete en vuelo por encima de la atmósfera a una altura de 500 km tendría una aceleración de caída libre de $g = 8{,}43$ m/s^2 y en ausencia de otras fuerzas que las de atracción gravitatoria. Sin embargo, debido al empuje, el cohete tiene una componente de aceleración adicional a_1 de 8,80 m/s^2 tangente a la trayectoria, que en el instante considerado forma un ángulo de 30° con la vertical. Si en esta posición el cohete tiene una velocidad $v = 30\,000$ km/h, calcular el radio de curvatura ρ de la trayectoria y la variación de v por unidad de tiempo.

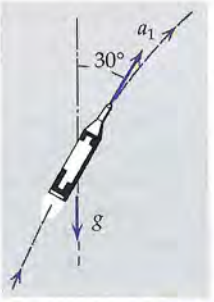


Figura problema 2.122

2.123 En un ordenador, la cinta magnética corre tal como se muestra por la polea loca. Si en el instante $t = 0$, cuando la velocidad de la cinta es de 4 m/s, la aceleración del punto P de la

http://gratislibrospdf.com/

cinta en contacto con la polea forma un ángulo de 4° con la tangente a ésta, hallar el tiempo t necesario para detener la polea con una desaceleración constante. Se supondrá que no hay resbalamiento entre la polea y la cinta.

Resp. $t = 2{,}10(10^{-3})$ s

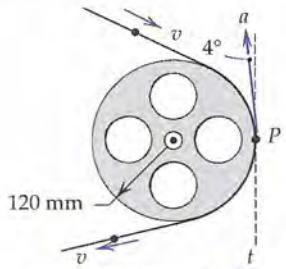


Figura problema 2.123

2.124 Una partícula P parte del punto O con una celeridad despreciable y la aumenta hasta el valor $v = \sqrt{2gy}$, donde y es la caída vertical desde O. Cuando $x = 15$ m, hallar la componente n de la aceleración de la partícula. (Véase el apartado C.10 del apéndice C con relación al radio de curvatura.)

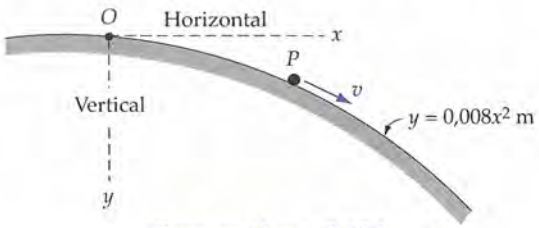


Figura problema 2.124

2.125 El vector de posición de un punto que se mueve en el plano x-y está dado por $\mathbf{r} = \frac{2}{3}t^2\mathbf{i} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{j}$, donde las unidades de $\mathbf{r}$ son metros y t son segundos. Calcular el radio de curvatura ρ de la trayectoria en la posición correspondiente a $t = 2$ s. Dibujar un esquema de la velocidad $\mathbf{v}$ y del radio de curvatura para el instante considerado.

Resp. $\rho = 41{,}7$ m

2.126 Como prueba de manejabilidad, un automóvil se conduce por la pista de "slalom" representada. Se supone que la trayectoria del vehículo es sinusoidal y que la aceleración lateral máxima es $0{,}7g$. Si los responsables de la prueba desean diseñar un "slalom" en el cual la celeridad máxima sea 80 km/h, ¿cuál debe ser la separación L de cono a cono?

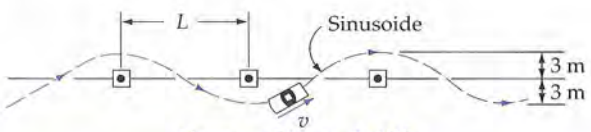


Figura problema 2.126

2.127 El conductor de un bólido que se mueve a 250 km/h en el tramo recto aplica los frenos en el punto A y reduce la velocidad uniformemente hasta 200 km/h en el punto C a lo largo de una distancia de 150 + 150 = 300 m. Calcular el módulo de la aceleración total del bólido un instante después de su paso por B.

Resp. $a = 8{,}42$ m/s^2

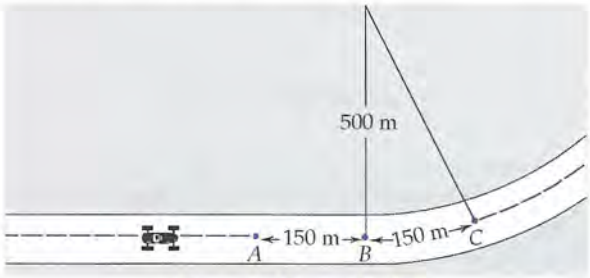


Figura problema 2.127

2.128 En un instante dado, un punto posee la siguiente posición, velocidad y aceración relativas a un sistema de coordenadas fijo: $x = -3$ m, $\dot{x} = 10$ m/s, $\ddot{x} = 2$ m/s^2, $y = 3$ m, $\dot{y} = 10$ m/s, $\ddot{y} = 9$ m/s^2. Hallar y esquematizar los vectores unitarios $\mathbf{e}_n$ y $\mathbf{e}_t$ en función de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Calcular v, a_t, a_n y ρ.

▶**2.129** El pasador P está obligado a moverse en las guías ranuradas, las cuales se desplazan perpendicularmente entre sí. En el instante representado, A tiene una velocidad hacia la derecha de 0,2 m/s que decrece a razón de 0,75 m/s cada segundo. Al mismo tiempo B se mueve hacia abajo con una velocidad de 0,15 m/s decreciente a razón de 0,5 m/s cada segundo. Calcular, para ese instante, el radio de curvatura ρ de la trayectoria seguida por P. ¿Es posible determinar la variación de ρ por unidad de tiempo?

Resp. $\rho = 1{,}25$ m

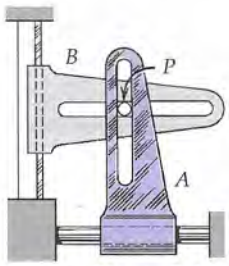


Figura problema 2.129

▶**2.130** Una partícula parte del reposo en el origen para recorrer la rama positiva de la curva $y = 2x^{3/2}$, de tal modo que la distancia s medida desde el origen a lo largo de la curva varía con el tiempo de acuerdo con $s = 2t^3$, donde x, y y z son milímetros y t son segundos. Hallar el módulo de su aceleración total $\mathbf{a}$ cuando $t = 1$ s. (Buscar la expresión de ρ en el apartado C.10 del apéndice C.)

Resp. $a = 12{,}17$ mm/s^2

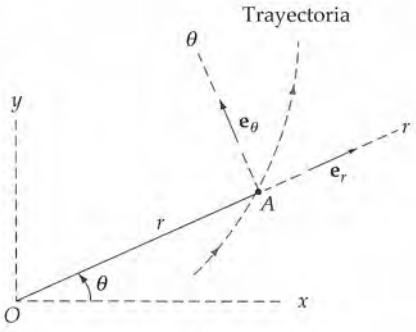
http://gratislibrospdf.com/

2.6 COORDENADAS POLARES (r-θ)

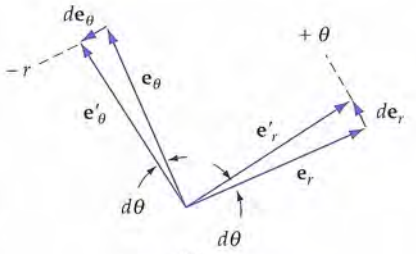
Pasamos a considerar ahora la tercera de las formas en que puede describirse el movimiento curvilíneo plano, es decir, mediante coordenadas polares, en cuyo caso la posición del punto material queda determinada por la longitud r de su vector de posición respecto de un polo y por el ángulo θ que forma aquél con una posición de referencia. Las coordenadas polares resultan especialmente útiles para los movimientos vinculados a través de condiciones impuestas a la distancia a un punto fijo o al valor de un ángulo, y cuando ha de observarse un movimiento no vinculado mediante las medidas de una distancia a un punto fijo y de una posición angular.

En la figura 2.13*a* se representan las coordenadas polares de un punto que describe una trayectoria curvilínea. Para medir θ se emplea una recta fija cualquiera, como puede ser el eje x. Los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ se establecen según los sentidos positivos de r y θ, respectivamente. El módulo del vector de posición $\mathbf{r}$ del punto A es la distancia radial r y su dirección y sentido están especificados por el vector unitario $\mathbf{e}_r$. Así pues, la situación del punto material A queda expresada por

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$



(*a*)



(*b*)

Figura 2.13

Al derivar esta relación respecto al tiempo para obtener $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, necesitaremos las derivadas temporales de los dos vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$. Las expresiones de $\dot{\mathbf{e}}_r$ y $\dot{\mathbf{e}}_\theta$ se obtienen exactamente de la misma forma en que se dedujo $\dot{\mathbf{e}}_t$ en el apartado precedente. Durante el intervalo de tiempo dt las direcciones coordenadas giran un ángulo $d\theta$ y los vectores unitarios giran también pasando de $\mathbf{e}_r$ a $\mathbf{e}_r'$ y de $\mathbf{e}_\theta$ a $\mathbf{e}_\theta'$ tal como se representa en la figura 2.13*b*. Obsérvese que la variación $d\mathbf{e}_r$ está orientada en el sentido de θ positivo y que $d\mathbf{e}_\theta$ está orientada en el sentido de r negativo. Como en el límite sus módulos son iguales al vector unitario correspondiente multiplicado por el ángulo $d\theta$ en radianes, podemos escribir $d\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta d\theta$ y $d\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r d\theta$. Dividiendo ambas ecuaciones por $d\theta$ resulta

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta \qquad \text{y} \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r$$

O bien, si dividimos por dt, tendremos $d\mathbf{e}_r/dt = (d\theta/dt)\mathbf{e}_\theta$ y $d\mathbf{e}_\theta/dt = -(d\theta/dt)\mathbf{e}_r$; es decir, simplemente

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad \text{y} \qquad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r \tag{2.12}$$

Con esto, ya estamos en disposición de derivar $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ respecto al tiempo. Aplicando la regla de derivación del producto de un escalar por un vector resulta

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$$

Aplicando la expresión de $\dot{\mathbf{e}}_r$ dada por 2.12, la expresión vectorial de la velocidad queda

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{2.13}$$

http://gratislibrospdf.com/

donde

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

La componente r de $\mathbf{v}$ no es sino la variación de longitud del vector $\mathbf{r}$ por unidad de tiempo. La componente θ de $\mathbf{v}$ se debe a la rotación de $\mathbf{r}$.

Diferenciemos ahora la expresión de $\mathbf{v}$ para obtener la aceleración $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$. Se ve que la derivada de $r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ origina tres términos ya que los tres factores son variables; entonces,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta)$$

Aplicando los valores de $\dot{\mathbf{e}}_r$ y $\dot{\mathbf{e}}_\theta$ dados por 2.12 y agrupando términos resulta

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \qquad (2.14)$$

donde

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

La componente θ de a podemos escribirla también como

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

lo que puede verificarse fácilmente llevando a cabo la derivación. Esta expresión de a_θ encontrará su aplicación en el capítulo siguiente cuando tratemos del momento cinético del punto material.

Sólo se llega a la adecuada interpretación de los términos de la ecuación 2.14 cuando se ve con claridad la configuración geométrica y las variaciones físicas. Con este objeto la figura 2.14*a* muestra los vectores velocidad y sus componentes r y θ en la posición A y la posición A' después de un movimiento infinitesimal. Cada una de estas magnitudes sufre una variación en módulo, dirección y sentido, como se ve en la figura 2.14*b*, donde se aprecian las siguientes:

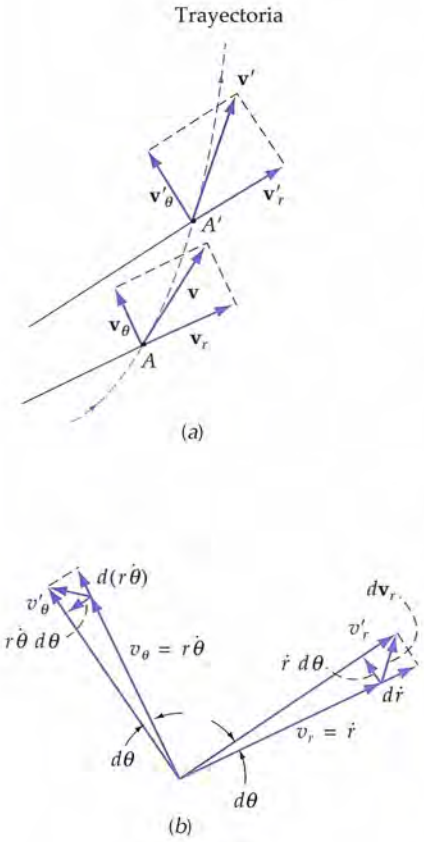


Figura 2.14

Variación del módulo de $\mathbf{v}_r$. Es sencillamente el incremento de longitud de v_r, o sea $dv_r = d\dot{r}$, y el término de aceleración correspondiente es $d\dot{r}/dt = \ddot{r}$ en el sentido de r positivo.

Variación de la dirección de $\mathbf{v}_r$. Según puede verse en la figura, esta variación es $v_r\, d\theta = \dot{r}\ d\theta$ y su contribución a la aceleración es $\dot{r}\ d\theta/dt = \dot{r}\dot{\theta}$ en el sentido de θ positivo.

Variación del módulo de $\mathbf{v}_\theta$. Este término es la variación de longitud de $\mathbf{v}_\theta$, o sea $d(r\dot{\theta})$ y su contribución a la aceleración es $d(r\dot{\theta})/dt = r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}$ en el sentido de θ positivo.

Variación de la dirección de $\mathbf{v}_\theta$. Esta variación vale $v_\theta\, d\theta = r\dot{\theta}\, d\theta$ y el término de aceleración correspondiente resulta ser $r\dot{\theta}(d\theta/dt) = r\dot{\theta}^2$ en el sentido de r negativo.

http://gratislibrospdf.com/

Agrupando términos resulta $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ y $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ como obtuvimos antes. Vemos que $\ddot{r}$ es la aceleración que tendría el punto material en dirección radial en ausencia de variación de θ. El término $-r\dot{\theta}^2$ es la componente normal de la aceleración en el caso en que r sea constante, como en el movimiento circular. El término $r\ddot{\theta}$ es la aceleración tangencial que tendría el punto si r fuese constante, pero sólo representa una parte de la aceleración debida a la variación del módulo de $\mathbf{v}_\theta$ cuando r es variable. Finalmente, el término $2\dot{r}\dot{\theta}$ se compone de dos efectos; el primero procede de la parte de la variación en magnitud $d(r\dot{\theta})$ de v_θ por la variación en r y, el segundo, por la variación en dirección de $\mathbf{v}_r$. Por consiguiente, el término $2\dot{r}\dot{\theta}$ representa una combinación de variaciones que no se aprecian con la misma facilidad que los otros términos de la aceleración.

Obsérvese bien la diferencia existente entre la diferencial $d\mathbf{v}_r$ del vector $\mathbf{v}_r$ y la variación dv_r del módulo de v_r. Igualmente, la diferencial vectorial $d\mathbf{v}_\theta$ no es lo mismo que la diferencial dv_θ del módulo de v_θ. Al dividir esas diferenciales por dt para obtener las expresiones de las derivadas, se ve claramente que el módulo de la derivada $|d\mathbf{v}_r/dt|$ y la derivada del módulo dv_r/dt *no son* iguales. Por lo mismo, se tendrá muy en cuenta que a_r no es $\dot{v}_r$ y que a_θ no es $\dot{v}_\theta$.

En la figura 2.15 se representan la aceleración a y sus componentes. Cuando **a** tenga una componente normal a la trayectoria sabemos que, según el estudio de las componentes t y n realizado en el apartado 2.5 anterior, el sentido de la componente n debe ser hacia el centro de curvatura.

En los casos de trayectorias circulares, en que r es constante, las ecuaciones 2.13 y 2.14 pasan a ser sencillamente

$$v_r = 0 \qquad v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$a_r = -r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta}$$

Esta descripción es la misma que la obtenida con las componentes t y n, coincidiendo las direcciones de θ y t y siendo opuestos los sentidos de r y n. Por ello, en el caso de movimiento circular centrado en el origen de coordendas polares $a_r = -a_n$.

Las expresiones de a_r y a_θ en forma escalar pueden obtenerse también por derivación directa de las relaciones entre coordenadas $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, obteniéndose $a_x = \ddot{x}$ y $a_y = \ddot{y}$. Cada una de estas componentes rectangulares de la aceleración se puede descomponer en las componentes radial y transversal, las cuales, combinadas, darán las expresiones de las ecuaciones 2.14.

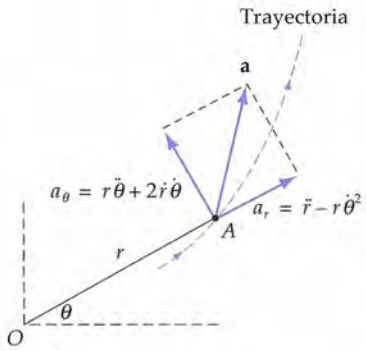
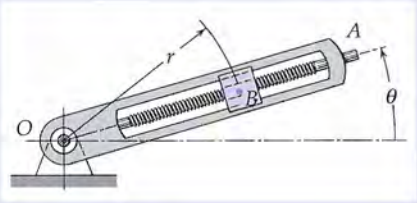


Figura 2.15

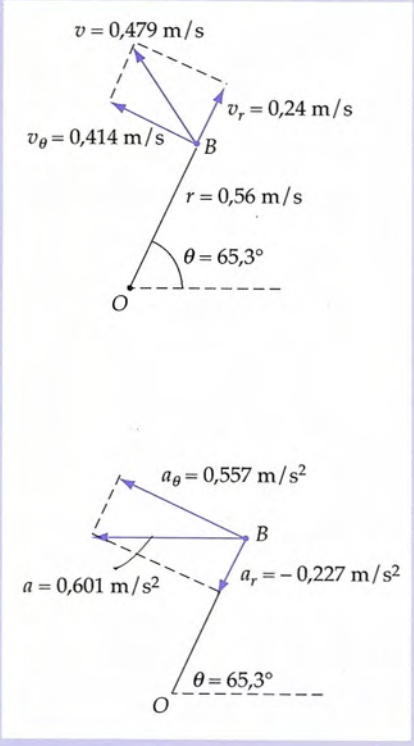
PROBLEMA TIPO 2.9

El giro del brazo radial ranurado está regido por $\theta = 0{,}2t + 0{,}02t^3$, donde θ está en radianes y t está en segundos. Simultáneamente, el husillo motorizado acciona el cursor B y controla su distancia a O según $r = 0{,}2 + 0{,}04t^2$, donde r está en metros y t está en segundos. Calcular la velocidad y la aceleración del cursor en el instante $t = 3$ s.



http://gratislibrospdf.com/

① **Podemos ver que este problema es un caso de movimiento vinculado en el que el centro *B* del cursor está ligado mecánicamente al giro del brazo ranurado y a la rotación del husillo.**



Solución. Hallemos primeramente, para $t = 3$, el valor de las coordenadas y de sus derivadas temporales que aparecen en las expresiones de la velocidad y de la aceleración en coordenadas polares. ①

$$r = 0{,}2 + 0{,}04t^2 \qquad r_3 = 0{,}2 + 0{,}04(3^2) = 0{,}56 \text{ m}$$

$$\dot{r} = 0{,}08t \qquad \dot{r}_3 = 0{,}08(3) = 0{,}24 \text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = 0{,}08 \qquad \ddot{r}_3 = 0{,}08 \text{ m/s}^2$$

$$\theta = 0{,}2t + 0{,}02t^3 \qquad \theta_3 = 0{,}2(3) + 0{,}02(3^3) = 1{,}14 \text{ rad}$$

$$\text{o sea } \theta_3 = 1{,}14(180/\pi) = 65{,}3°$$

$$\dot{\theta} = 0{,}2 + 0{,}06t^2 \qquad \dot{\theta}_3 = 0{,}2 + 0{,}06(3^2) = 0{,}74 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\theta} = 0{,}12t \qquad \ddot{\theta}_3 = 0{,}12(3) = 0{,}36 \text{ rad/s}^2$$

De la ecuación 2.13 se obtienen las componentes de la velocidad que, para $t = 3$ s, son

$$[v_r = \dot{r}] \qquad v_r = 0{,}24 \text{ m/s}$$

$$[v_\theta = r\dot{\theta}] \qquad v_\theta = 0{,}56(0{,}74) = 0{,}414 \text{ m/s}$$

$$[v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}] \qquad v = \sqrt{(0{,}24)^2 + (0{,}414)^2} = 0{,}479 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Se representan la velocidad y sus componentes para la posición del brazo especificada.

La ecuación 2.4 nos da las componentes de la aceleración, que para $t = 3$ s son

$$[a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \qquad a_r = 0{,}08 - 0{,}56(0{,}74)^2 = -0{,}227 \text{ m/s}^2$$

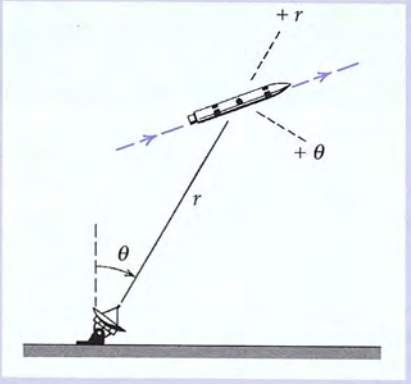
$$[a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}] \qquad a_\theta = 0{,}56(0{,}36) + 2(0{,}24)(0{,}74) = 0{,}557 \text{ m/s}^2$$

$$[a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}] \qquad a = \sqrt{(-0{,}227)^2 + (0{,}557)^2} = 0{,}601 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Se representan también la aceleración y sus componentes para la posición de 65,3° del brazo.

PROBLEMA TIPO 2.10

Un radar de seguimiento se encuentra en el mismo plano vertical que la trayectoria balística de un cohete que realiza un vuelo no propulsado por encima de la atmósfera. En el instante en que $\theta = 30°$ los datos de seguimiento son $r = 8(10^4)$ m, $\dot{r} = 1200$ m/s y $\dot{\theta} = 0{,}80$ grd/s. La aceleración del cohete es únicamente la vertical descendente debida a la gravedad que a la altura considerada es $g = 9{,}20$ m/s^2. En estas condiciones, determinar la velocidad del cohete y los valores de $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$.



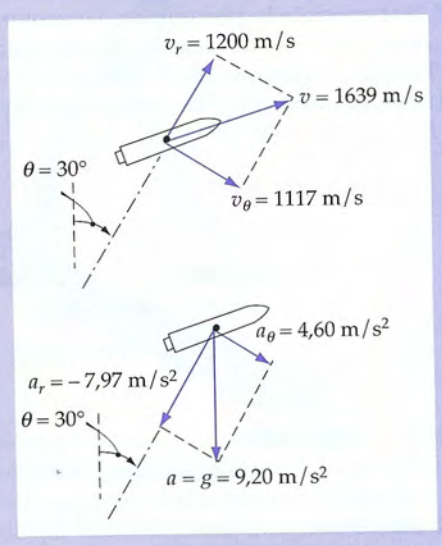
http://gratislibrospdf.com/

Solución. Según la ecuación 2.13, las componentes de la velocidad son

$$[v_r = \dot{r}] \qquad v_r = 1200 \text{ m/s}$$

$$[v_\theta = r\dot{\theta}] \qquad v_\theta = 8(10^4)(0{,}80)\left(\frac{\pi}{180}\right) = 1117 \text{ m/s} \quad (1)$$

$$[v = \sqrt{v_r{}^2 + v_\theta{}^2}] \qquad v = \sqrt{(1200)^2 + (1117)^2} = 1369 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$



Como la aceleración total del cohete es $g = 9{,}20$ m/s^2 dirigida hacia abajo, podemos hallar fácilmente sus componentes r y θ para la posición dada. Tal como se representa en la figura son

$$a_r = -9{,}20 \cos 30° = -7{,}97 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = 9{,}20 \operatorname{sen} 30° = 4{,}60 \text{ m/s}^2 \quad (2)$$

A continuación, igualamos estos valores a las expresiones de a_r y a_θ en coordenadas polares en las que aparecen las incógnitas $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$. Así, según la ecuación 2.14

$$[a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \qquad -7{,}97 = \ddot{r} - 8(10^4)\left(0{,}80\frac{\pi}{180}\right)^2 \quad (3)$$

$$\ddot{r} = 7{,}63 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

$$[a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}] \qquad 4{,}60 = 8(10^4)\ddot{\theta} + 2(1200)\left(0{,}80\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\ddot{\theta} = -3{,}61(10^{-4}) \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

(1) **Observemos que en coordenadas polares no es siempre necesario tomar el ángulo θ en sentido antihorario.**

(2) **Obsérvese que la componente r de la aceleración tiene el sentido de r negativo, por lo que lleva el signo menos.**

(3) **No hay que olvidarse de pasar $\dot{\theta}$ de grd/s a rad/s.**

PROBLEMAS

Problemas introductorios

2.131 La pluma OAB gira en torno al punto O a la vez que el tramo AB se extiende desde el interior del tramo OA. Hallar la velocidad y la aceleración del centro B de la polea para las condiciones siguientes: $\theta = 20°$, $\dot{\theta} = 5\ °/\text{s}$, $\ddot{\theta} = 2°/\text{s}^2$, $l = 2$ m, $\dot{l} = 0{,}5$ m/s, $\ddot{l} = 1{,}2$ m/s^2. Las cantidades $\dot{l}$ y $\ddot{l}$ son las derivadas temporales primera y segunda, respectivamente, de la longitud del tramo l AB.

Resp. $\mathbf{v} = 0{,}5\mathbf{e}_r + 0{,}785\mathbf{e}_\theta$ m/s

$\mathbf{a} = -1{,}269\mathbf{e}_r + 0{,}401\mathbf{e}_\theta$ m/s^2

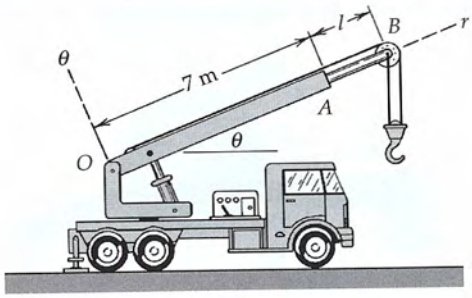


Figura problema 2.131

http://gratislibrospdf.com/

2.132 La posición del cursor P en el brazo ranurado giratorio OA está controlada por un tornillo motorizado tal como se muestra. En el instante representado $\dot{\theta} = 8$ rad/s y $\ddot{\theta} = -20$ rad/s^2. También, en ese instante, $r = 200$ mm, $\dot{r} = -300$ mm/s y $\ddot{r} = 0$. Hallar, en ese instante, las componentes r y θ de la aceleración de P.

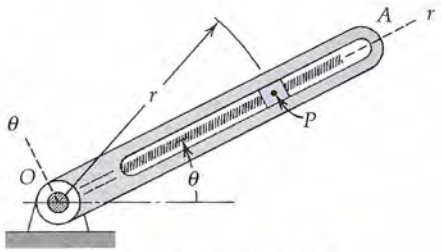


Figura problema 2.132

2.133 Cuando el cilindro hidráulico rota en torno a O, la presión del aceite en su interior controla la longitud l al descubierto de la biela P. Si la velocidad uniforme de rotación del cilindro es $\dot{\theta} = 60$ grd/s y l disminuye constantemente a razón de 150 mm/s, calcular los módulos de la velocidad **v** y la aceleración **a** del extremo B cuando $l = 125$ mm.

Resp. $v = 545$ mm/s, $a = 632$ mm/s^2

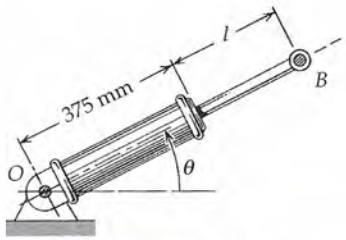


Figura problema 2.133

2.134 La boquilla de la figura gira a la velocidad angular constante Ω en torno a un eje horizontal fijo que pasa por O. A consecuencia del cambio de diámetro según un factor de 2, la celeridad del agua con relación a la boquilla es v en A y $4v$ en B. Tanto en A como en B la celeridad del agua es constante. Hallar la velocidad y la celeridad de una partícula de agua cuando pasa por (*a*) el punto A y (*b*) por el punto B.

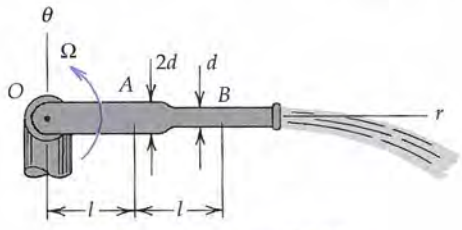


Figura problema 2.134

2.135 Merced a un mecanismo interno, la velocidad angular de la nave espacial se mantiene constante en el valor $\Omega = 0{,}05$ rad/s alrededor del eje z mientras las plumas telescópicas se extienden a velocidad constante. La longitud l varía desde prácticamente cero hasta 3 m. La aceleración máxima a la que pueden someterse los módulos experimentales sensibles P es 0,011 m/s^2. Hallar la velocidad de extensión máxima permitida $\dot{l}$ de las plumas.

Resp. $\dot{l} = 32{,}8$ mm/s

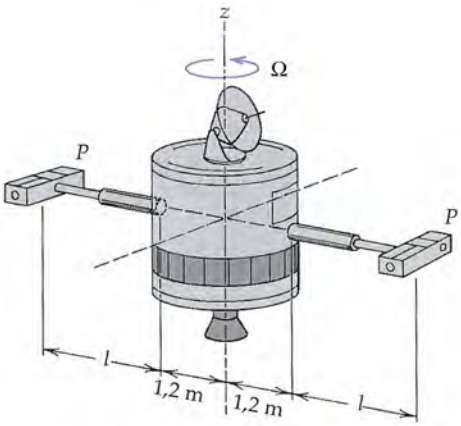


Figura problema 2.135

2.136 El movimiento curvilíneo de un punto material está regido por las coordenadas polares $r = t^3/3$ y $\theta = 2\cos(\pi t/6)$, donde r está en metros, θ en radianes y t en segundos. Especificar la velocidad **v** y la aceleración **a** del punto cuando $t = 2$ s.

2.137 El cohete ha sido disparado verticalmente y es seguido por el radar que se representa. Cuando θ llega a 60°, las

Figura problema 2.137

http://gratislibrospdf.com/

otras mediciones correspondientes dan los valores $r = 9$ km, $\ddot{r} = 21\ \text{m/s}^2$ y $\dot{\theta} = 0{,}02\ \text{rad/s}$. Hallar la velocidad y la aceleración del cohete para esa posición.

Resp. $v = 360\ \text{m/s}$, $a = 20{,}10\ \text{m/s}^2$

Problemas representativos

2.138 En coordenadas polares, el movimiento curvilíneo de un punto material es tal que el producto $r^2\dot{\theta}$, en m/s^2, varía con el tiempo t, en segundos, del modo que se representa durante el periodo indicado. Calcular, aproximadamente, la componente θ de su aceleración en el instante $t = 5$ s para el que $r = 1/3$ m.

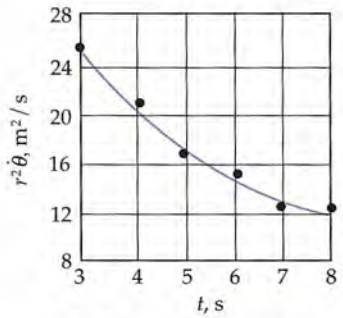


Figura problema 2.138

2.139 El automóvil A se desplaza a velocidad constante v sobre la autopista recta y plana. El agente de policía trata de medir esa velocidad v con el radar de su automóvil P estacionado. Si el radar mide la velocidad "según su visual", ¿cuál será la velocidad v' que observe el agente? Particularizar la expresión general deducida para los valores $v = 115$ km/h, $L = 150$ m y $D = 6$ m y extraer las conclusiones pertinentes.

Resp. $v' = v\dfrac{L}{\sqrt{L^2 + D^2}}$, $v' = 114{,}9\ \text{km/h}$

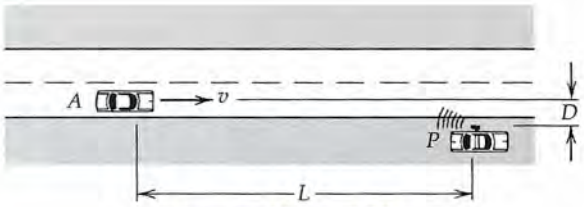


Figura problema 2.139

2.140 La pieza AB gira entre dos valores del ángulo β y su extremo A hace que gire también la pieza ranurada AC. Para el instante representado, en que $\beta = 60°$ y $\dot{\beta} = 0{,}6\ \text{rad/s}$ constante, hallar los valores correspondientes de $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$. Emplear las ecuaciones 2.13 y 2.14.

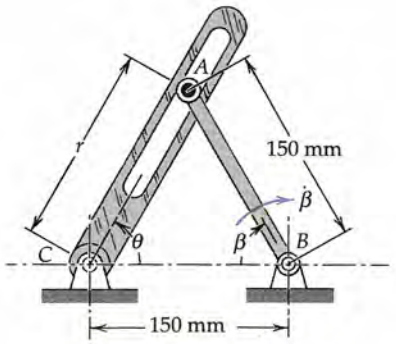


Figura problema 2.140

2.141 En el instante representado, la estación de radar O mide la variación por unidad de tiempo de la distancia a que se halla la lanzadera espacial P supuesto fijo el punto O hallando $\dot{r} = -3472\ \text{m/s}$. Sabiendo que la lanzadera se encuentra en una órbita circular a una altura $h = 240$ km, hallar con esta información la celeridad orbital de la lanzadera.

Resp. $v = 7766\ \text{m/s}$

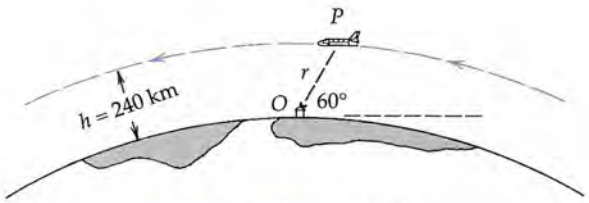


Figura problema 2.141

2.142 Un satélite m se mueve en una órbita elíptica en torno a la Tierra. No hay fuerza sobre el satélite en dirección transversal, por lo que $a_\theta = 0$. Probar la segunda ley de Kepler para el movimiento planetario, según la cual el radio vector r barre áreas iguales en tiempos iguales. El área dA barrida por el radio vector durante el tiempo dt aparece sombreada en la figura.

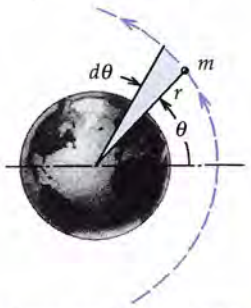


Figura problema 2.142

http://gratislibrospdf.com/

2.143 Un punto material P se mueve a lo largo de la trayectoria $r = f(\theta)$, simétrica respecto a la recta $\theta = 0$. Cuando el punto pasa por la posición $\theta = 0$, donde el radio de curvatura de la trayectoria es ρ, su velocidad es v. Deducir una expresión de $\dot{r}$ en función de v, r y ρ para el movimiento del punto en esa posición.

Resp. $\ddot{r} = -v^2\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)$

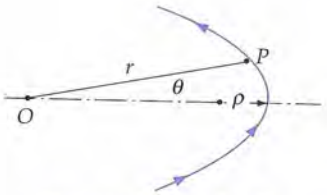


Figura problema 2.143

2.144 Mientras el brazo ranurado gira en torno al punto O, el cursor P puede desplazarse hacia el interior mediante el cordel S. La posición angular del brazo está dada por $\theta = 0{,}8t - \frac{t^2}{20}$, donde θ está en radianes y t en segundos. Cuando $t = 0$, el cursor se halla en $r = 1{,}6$ m, instante a partir del cual es llevado hacia adentro a razón de 0,2 m/s. Hallar el módulo, dirección y sentido del cursor cuando $t = 4$ s (expresado mediante el ángulo α respecto al eje x).

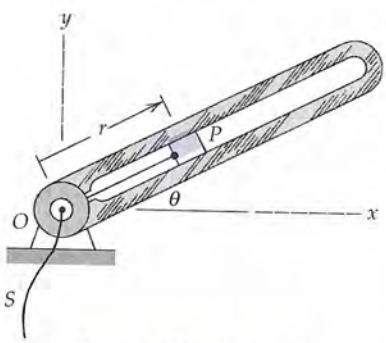


Figura problema 2.144

2.145 La leva tiene una forma tal que el centro del rodillo A que sigue su contorno se mueve sobre la cardioide definida por $r = b - c\cos\theta$, donde $b > c$. Si la leva no gira, determinar la aceleración a de A en función de θ si el brazo ranurado gira con una velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega$, en sentido antihorario.

Resp. $a = \omega^2\sqrt{4c^2 - 4bc\cos\theta + b^2}$

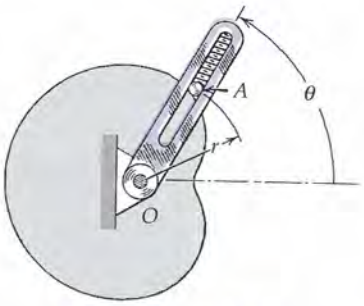


Figura problema 2.145

2.146 El brazo robótico se está elevando y extendiendo a la vez. En un instante dado, $\theta = 30°$, $\dot{\theta} = 10$ grd/s = cte., $l = 0{,}5$ m, $\dot{l} = 0{,}2$ m/s y $\ddot{l} = -0{,}3$ m/s^2. Calcular los módulos de la velocidad **v** y la aceleración **a** de la pieza asida P. Además, expresar **v** y **a** en función de los vectores unitarios **i** y **j**.

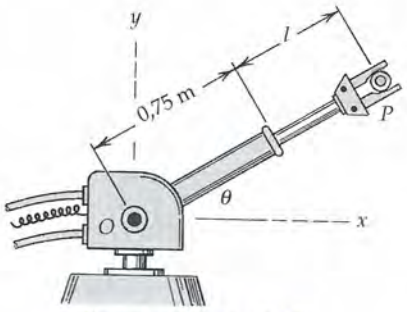


Figura problema 2.146

2.147 Por la guía horizontal fija se mueven el cursor y el pasador P cuyo movimiento lo manda el brazo ranurado giratorio OA. Si, durante un intervalo del movimiento, el brazo gira a una velocidad constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s, hallar los módulos de la velocidad y la aceleración del cursor en la ranura en el instante

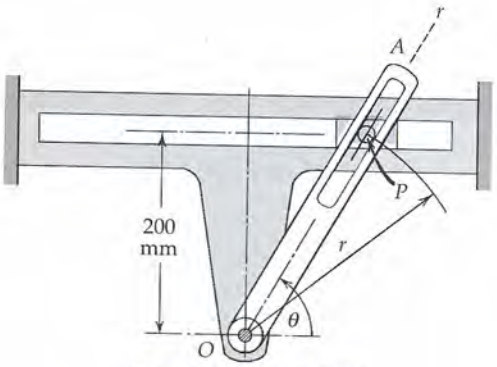


Figura problema 2.147

http://gratislibrospdf.com/

en que $\theta = 60°$. Hallar asimismo las componentes r de la velocidad y la aceleración.

Resp. $v = 533$ mm/s, $v_r = -267$ mm/s,
$a = 1232$ mm/s^2, $a_r = 616$ mm/s^2

2.148 Un avión que vuela en línea recta ascendente formando un ángulo β con la horizontal es seguido por un radar situado exactamente debajo de la trayectoria de vuelo. En cierto instante se registran los datos siguientes: $r = 3600$ m, $\dot{r} = 110$ m/s, $\ddot{r} = 6$ m/s^2, $\theta = 30°$ y $\dot{\theta} = 2{,}20$ grd/s. Hallar, para ese instante, la velocidad v, el ángulo de subida β, $\ddot{\theta}$ y la aceleración a.

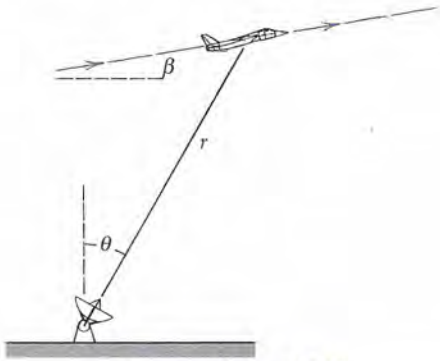


Figura problema 2.148

2.149 En un instante dado, un punto material posee las siguientes componentes de la posición, la velocidad y la aceleración respecto a un sistema de coordenadas fijo x-y: $x = 4$ m, $y = 2$ m, $\dot{x} = 2\sqrt{3}$ m/s, $\dot{y} = -2$ m/s, $\ddot{x} = -5$ m/^{2}, $\ddot{y} = 5$m/s^2. Determinar los valores siguientes asociados a las coordenadas polares: θ, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, r, $\dot{r}$ y $\ddot{r}$. Acompañar el proceso de cálculo con un esquema geométrico.

Resp. $\theta = 26{,}6°$, $\dot{\theta} = -0{,}746$ rad/s
$\ddot{\theta} = 2{,}24$ rad/s^2
$r = 2\sqrt{5}$ m, $\dot{r} = 2{,}20$ m/s, $\ddot{r} = 0{,}255$ m/s^2

2.150 El brazo ranurado OA obliga al pequeño vástago a moverse en la guía espiral definida por $r = K\theta$. El brazo OA parte del reposo en $\theta = \pi/4$ y tiene una aceleración angular constante, $\ddot{\theta} = \alpha$, en sentido antihorario. Hallar la aceleración del vástago cuando $\theta = 3\pi/4$

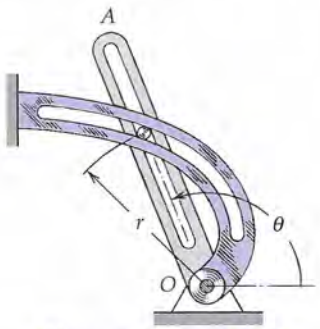


Figura problema 2.150

2.151 Durante un intervalo del movimiento el cilindro hidráulico comunica al pasador A una velocidad $v = 2$ m/s a lo largo de su eje, lo que a su vez hace que el brazo ranurado rote en torno a O. Hallar los valores de $\dot{r}$, $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$ en el instante en que $\theta = 30°$. (*Indicación*: Recuérdese que todas las componentes de la aceleración son cero cuando la velocidad es constante.)

Resp. $\dot{r} = 1{,}732$ m/s
$\ddot{r} = 3{,}33$ m/s^2, $\ddot{\theta} = -38{,}5$ rad/s^2

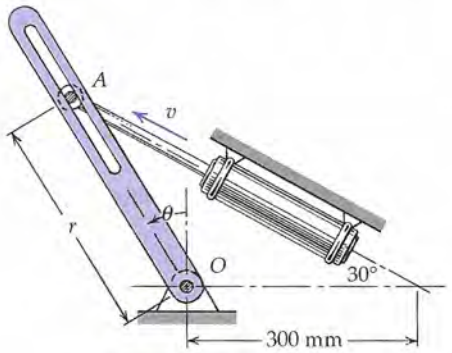


Figura problema 2.151

2.152 Un disco circular gira alrededor de su centro O con una velocidad angular constante $\omega = \dot{\theta}$ y lleva dos pistones cargados por resortes tal como se muestra. La distancia b que sobresale cada pistón del borde del disco varía de acuerdo con $b = b_0 \operatorname{sen} 2\pi nt$, donde b_0 es la longitud máxima que sobresale, n es la frecuencia constante de oscilación de los pistones en las ranuras radiales y t es el tiempo. Hallar los valores máximos de las componentes r y θ de la aceleración de los extremos A de los pistones durante su movimiento.

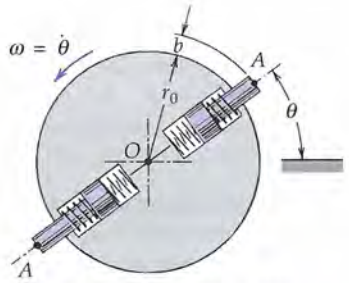


Figura problema 2.152

2.153 Se representa nuevamente el satélite del problema 2.120, que lleva una velocidad $v = 17\,970$ km/h cuando pasa por el extremo A del semieje menor. Calculando según la ley de la gra-

http://gratislibrospdf.com/

vitación, la atracción gravitatoria produce una aceleración $a = a_r = -1556\ \text{m/s}^2$. Para esa posición, calcular la variación de $\dot{v}$ por unidad de tiempo de la celeridad del satélite y el valor de $\ddot{r}$.

Resp. $\dot{v} = -0{,}778\ \text{m/s}^2$, $\ddot{r} = -0{,}388\ \text{m/s}^2$

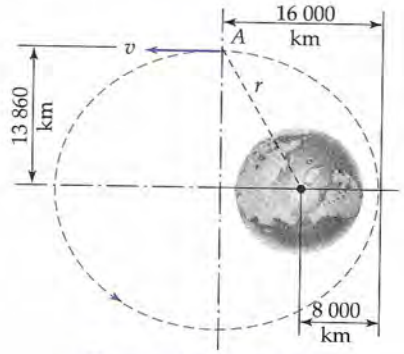


Figura problema 2.153

2.154 En el instante $t = 0$ el pequeño bloque P parte del reposo en el punto A y sube por el plano inclinado con una aceleración constante a. Expresar $\dot{r}$ en función del tiempo.

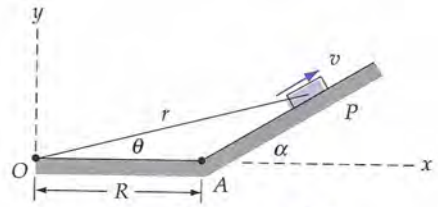


Figura problema 2.154

2.155 Para las condiciones del problema 2.154, expresar $\dot{\theta}$ en función del tiempo.

$$\textit{Resp. } \dot{\theta} = \frac{Rat \operatorname{sen} \alpha}{R^2 + Rat^2 \cos \alpha + \frac{1}{4}a^2t^4}$$

2.156 Un cohete que sigue una trayectoria en el plano vertical es seguido por un radar A. En cierto instante, el radar da las medidas $r = 10{,}5$ km, $\dot{r} = 480$ m/s, $\dot{\theta} = 0$ y $\ddot{\theta} = -0{,}00720\ \text{rad/s}^2$. Dibujar la posición del cohete en ese instante y hallar el radio de curvatura ρ de la trayectoria en esa posición.

2.157 El brazo ranurado, en cuyo interior se mueve el cursor C, gira en torno a O. La posición de C dentro de la ranura está controlada por el cordel que está sujeto en D y se mantiene tenso. Durante un intervalo del movimiento el brazo gira en sentido antihorario con la velocidad angular constante $\dot{\theta} = 4\ \text{rad/s}$. La longitud DBC del cordel vale R, con lo que $r = 0$ cuando $\theta = 0$. Hallar el módulo a de la aceleración del cursor en la posición $\theta = 30°$. La longitud R es 375 mm.

Resp. $a = 12{,}22\ \text{m/s}^2$

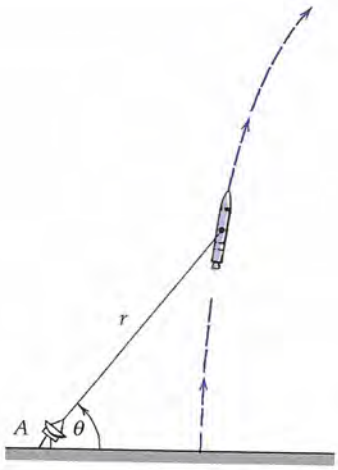


Figura problema 2.156

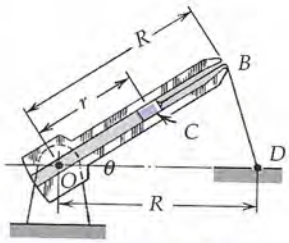


Figura problema 2.157

2.158 El radar A sigue al cohete desde la posición de lanzamiento A. A los 10 segundos de vuelo el radar registra las mediciones siguientes: $r = 2200$ m, $\dot{r} = 500$ m/s, $\ddot{r} = 4{,}66\ \text{m/s}^2$, $\theta = 22°$, $\dot{\theta} = 0{,}0788\ \text{rad/s}$ y $\ddot{\theta} = -0{,}0341\ \text{rad/s}^2$. Para ese instante

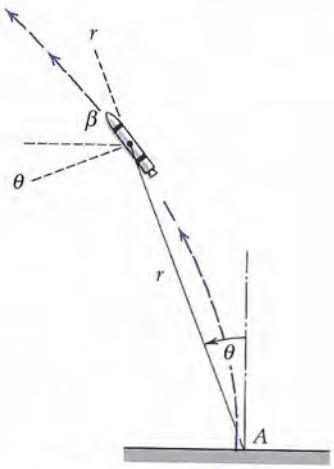


Figura problema 2.158

http://gratislibrospdf.com/

hallar el ángulo β que forman la horizontal y la tangente a la trayectoria del cohete y los módulos de la velocidad **v** y la aceleración **a** del mismo.

2.159 El bloque P se desliza por la superficie representada a la celeridad constante $v = 0{,}6$ m/s y pasa por el punto O en el instante $t = 0$. Siendo $R = 1{,}2$ m, hallar los valores de r, θ, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$ en el instante $t = 2\left(1 + \frac{\pi}{3}\right)$.

Resp. $r = 2{,}32$ m, $\dot{r} = 0{,}424$ m/s

$\ddot{r} = -0{,}1345$ m/s^2

$\theta = 15°$, $\dot{\theta} = 0{,}1830$ rad/s, $\ddot{\theta} = 0{,}025$ rad/s^2

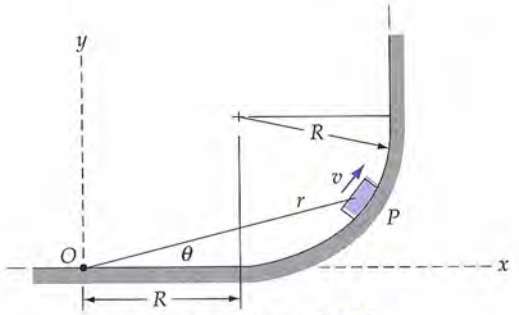


Figura problema 2.159

2.160 El brazo ranurado OA oscila en torno de O dentro de los límites indicados y arrastra a la manivela CP a través del pasador P. Durante un intervalo del movimiento, $\dot{\theta} = K$, constante. Hallar el valor de la correspondiente aceleración total de P para todo valor de θ comprendido entre los límites en que $\dot{\theta} = K$. Emplear las coordenadas polares r y θ. Demostrar que permanecen constantes los módulos de la velocidad y la aceleración de P en su trayectoria circular.

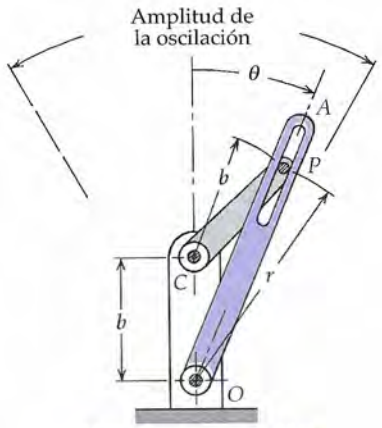


Figura problema 2.160

2.161 Durante una parte de un rizo vertical un avión describe un arco de radio $\rho = 600$ m con una celeridad $v = 400$ km/h. Estando en A, el ángulo que forma **v** con la horizontal es $\beta = 30°$ y los datos del seguimiento del radar son $r = 800$ m y $\theta = 30°$. Calcular v_r, v_θ, a_r y $\ddot{\theta}$.

Resp. $v_r = 96{,}2$ m/s, $v_\theta = 55{,}6$ m/s

$a_r = 10{,}29$ m/s^2, $\ddot{\theta} = -0{,}0390$ rad/s^2

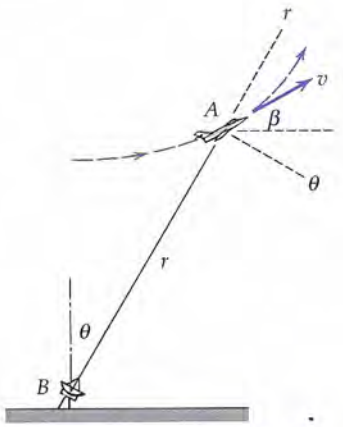


Figura problema 2.161

2.162 Un cable sujeto al vehículo A pasa por la pequeña polea fija B y se arrolla en el tambor C. Si el vehículo se mueve con una celeridad constante $v_0 = \dot{x}$, hallar la expresión de la aceleración de un punto P del cable, situado entre B y C, en función de θ. Expresar $\ddot{\theta}$ también en función de θ. (*Observación*: Adviértase que las componentes r y θ de la aceleración de A son ambas nulas.)

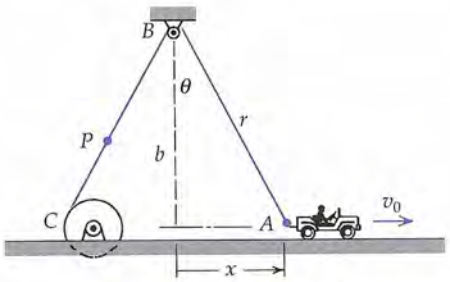


Figura problema 2.162

2.163 El pivote A describe una circunferencia de radio 90 mm mientras la manivela AC gira a la velocidad constante $\dot{\beta} = 60$ rad/s. La pieza ranurada gira en torno del punto O

http://gratislibrospdf.com/

mientras que el vástago unido a A se mueve en vaivén dentro de la ranura. Para la posición $\beta = 30°$, hallar $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$.

Resp. $\dot{r} = 3{,}58$ m/s, $\ddot{r} = 315$ m/s^2

$\dot{\theta} = 17{,}86$ rad/s

$\ddot{\theta} = -1510$ rad/s^2

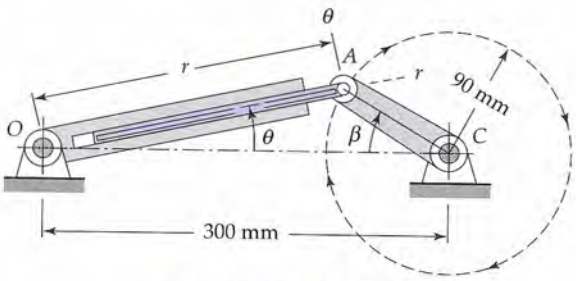


Figura problema 2.163

2.164 Se presenta otra vez el jugador de béisbol del problema 2.111 y se añade más información. En el instante $t = 0$, la pelota sale proyectada con una velocidad inicial de 30 m/s que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Hallar los valores de r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, θ, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ en el sistema de coordenadas x-y indicado para el instante $t = 0{,}5$ s.

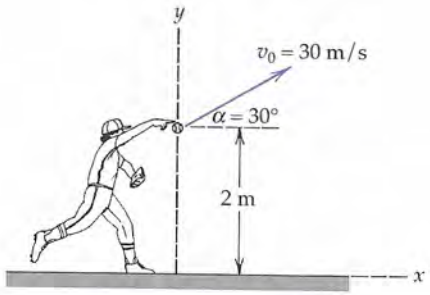


Figura problema 2.164

2.165 Durante su regreso una cápsula espacial A es seguida por la estación de radar B situada en el plano vertical de la trayectoria. Los valores de r y θ se leen en función del tiempo y se registran en la tabla adjunta. Hallar la velocidad v de la cápsula cuando $t = 40$ s. Explicar cómo puede calcularse la aceleración de la cápsula a partir de los datos tabulados.

Resp. $v = 1020$ km/h

t, s	r, km	θ, grados	t, s	r, km	θ, grados
0	36,4	110,5	60	19,0	45,0
5	29,9	100,0	70	18,8	38,5
10	26,2	91,0	80	18,7	32,8
15	24,1	83,7	90	18,7	27,0
20	22,7	77,7	100	18,7	21,6
30	20,9	67,7	110	18,7	16,8
40	20,1	58,6	120	19,0	12,0
50	19,3	52,0			

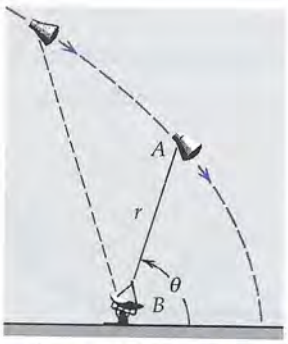


Figura problema 2.165

2.166 Si el brazo ranurado (problema 2.145) gira en sentido antihorario a una velocidad constante de 40 rpm y la leva gira en sentido opuesto a 30 rpm, hallar la aceleración a del centro del rodillo A cuando brazo y leva se hallan en una posición relativa tal que $\theta = 0$. Los parámetros de la cardioide son $b = 100$ mm y $c = 75$ mm. (*Atención*: Redefinir, según convenga, las coordenadas tras observar que el ángulo θ de la expresión $r = b - c\cos\theta$ no es el ángulo absoluto que figura en la ecuación 2.14.)

Resp. $a = 3{,}68$ m/s^2

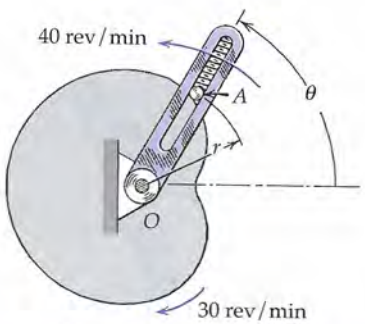


Figura problema 2.166

http://gratislibrospdf.com/

2.7 MOVIMIENTO CURVILÍNEO EN EL ESPACIO

El caso general de movimiento tridimensional de un punto material a lo largo de una curva del espacio fue presentado en el apartado 2.1 e ilustrado en la figura 2.1. Ya se mencionaron los tres sistemas de coordenadas, rectangulares (x-y-z), cilíndricas (r-θ-z) y esféricas (R-θ-ϕ) corrientemente utilizados para describir esta clase de movimientos. En la figura 2.16 se representan dichos sistemas y en la misma se indican también los vectores unitarios correspondientes a cada sistema[1].

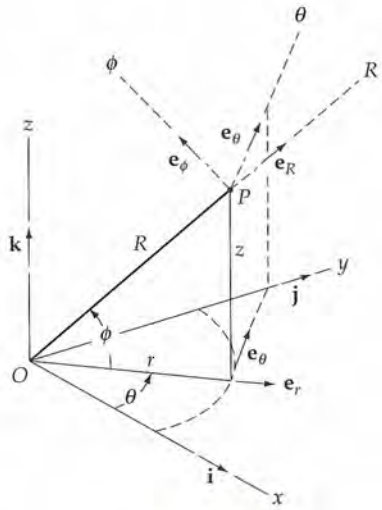


Figura 2.16

Antes de exponer el uso de estos sistemas de coordenadas podemos observar que puede emplearse la descripción mediante las variables locales, descritas en el apartado 2.5, utilizando las coordenadas n y t dentro del plano osculador. Este plano fue definido anteriormente como el plano que contiene a la curva en dicha posición. Vemos que la velocidad $\mathbf{v}$, que es tangente a la curva, se halla en el plano osculador. La aceleración $\mathbf{a}$ del punto también se halla en el plano osculador y como en el caso del movimiento plano, puede representarse en función de su componente $a_t = \dot{v}$ tangente a la trayectoria, debida a la variación del módulo de la velocidad y de su componente $a_n = v^2/\rho$ normal a la curva, debida a la variación de dirección de la velocidad. Como antes, ρ es el radio de curvatura de la trayectoria en la posición considerada y sería medido dentro del plano osculador. Esta descripción del movimiento, que encontramos natural y directa para muchos problemas de movimiento plano, es de poca utilidad en el caso del movimiento espacial porque el plano osculador cambia de orientación continuamente, por lo que su empleo como referencia resulta embarazoso. Por tanto, limitaremos nuestra atención a los tres sistemas de coordenadas fijas representados en la figura 2.16.

(a) Coordenadas rectangulares (x-y-z). La ampliación de dos dimensiones a tres dimensiones no ofrece dificultad especial. Basta simplemente añadir la coordenada z y sus dos derivadas temporales a las expresiones bidimensionales 2.6, de forma que el vector de posición $\mathbf{R}$, la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ se hacen

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{R}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \\ \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Obsérvese que en tres dimensiones el vector de posición se representa con $\mathbf{R}$ y no con $\mathbf{r}$.

(b) Coordenadas cilíndricas (r-θ-z). Si se ha comprendido la descripción del movimiento plano en coordenadas polares, no debe existir dificultad alguna respecto a las coordenadas cilíndricas, puesto que sólo se necesita añadir la coordenada z y sus dos derivadas temporales. En coordenadas cilíndricas, el vector de posición $\mathbf{R}$ de un punto material es sencillamente

$$\mathbf{R} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{k}$$

1 En una variante de las coordenadas esféricas bastante empleada, el ángulo ϕ se sustituye por su complemento.

http://gratislibrospdf.com/

En lugar de la ecuación 2.13 relativa al movimiento plano, la velocidad puede escribirse

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k} \tag{2.16}$$

donde

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$
$$v_z = \dot{z}$$
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2}$$

Análogamente, la aceleración se escribe añadiendo la componente z a la ecuación 2.14, lo que nos da

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k} \tag{2.17}$$

donde

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$
$$a_z = \ddot{z}$$
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$$

En tanto que los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ poseen derivadas temporales a causa de que sus direcciones son variables, obsérvese que el vector unitario $\mathbf{k}$ de la dirección z no varía de dirección y en consecuencia carece de derivadas temporales.

(c) Coordenadas esféricas (R-θ-ϕ). Cuando para situar la posición de un punto se emplean una distancia radial y dos ángulos, como, por ejemplo, es el caso del radar, se aplican coordenadas esféricas. La deducción de la expresión de la velocidad $\mathbf{v}$ se realiza fácilmente; pero la de la expresión de la aceleración $\mathbf{a}$ es más complicada a causa de la geometría adicional necesaria. Por ello sólo daremos aquí los resultados. Empezamos señalando los vectores unitarios $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ tal como se muestran en la figura 2.16. Obsérvese que el sentido del vector $\mathbf{e}_R$ es el que tendría el movimiento del punto P si R aumentara pero manteniéndose constantes θ y ϕ. Asimismo, el sentido de $\mathbf{e}_\phi$ es el que tendría el movimiento de P si ϕ aumentara pero manteniéndose constantes R y ϕ. Finalmente, el sentido de $\mathbf{e}_\phi$ es el que tendría el movimiento de P si ϕ aumentara pero manteniéndose constantes R y θ. Las expresiones de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ resultantes son

$$\mathbf{v} = v_R\mathbf{e}_R + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\phi\mathbf{e}_\phi \tag{2.18}$$

donde

$$v_R = \dot{R}$$
$$v_\theta = R\dot{\theta}\cos\phi$$
$$v_\phi = R\dot{\phi}$$

http://gratislibrospdf.com/

y

$$\mathbf{a} = a_R\mathbf{e}_R + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\phi\mathbf{e}_\phi \qquad (2.19)$$

donde

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\cos^2\phi$$

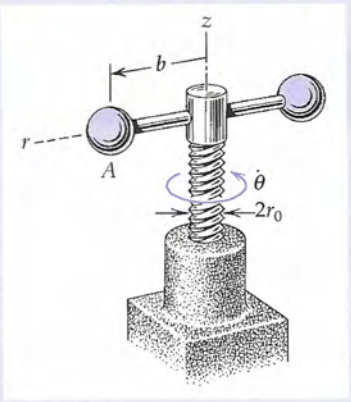
$$a_\theta = \frac{\cos\phi}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\theta}) - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\,\text{sen}\,\phi$$

$$a_\phi = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi}) + R\dot{\theta}^2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi$$

Debemos mencionar que pueden desarrollarse transformaciones algebraicas lineales entre dos cualesquiera de las tres expresiones de la velocidad y la aceleración en los tres sistemas de coordenadas. Con estas transformaciones es posible, por ejemplo, expresar las variables del movimiento en coordenadas rectangulares si aquéllas se conocen en coordenadas esféricas, o viceversa. El manejo de estas transformaciones es fácil con ayuda del álgebra matricial y un sencillo programa de ordenador.

PROBLEMA TIPO 2.11

El tornillo motorizado parte del reposo y recibe una velocidad rotacional que aumenta uniformemente con el tiempo t según $\dot{\theta} = kt$, donde k es una constante. Determinar las expresiones de la velocidad v y la aceleración a del centro de la bola A cuando el tornillo haya girado una vuelta completa. El paso del tornillo (avance por vuelta) es L.



Solución. El centro de la bola A describe una hélice contenida en una superficie cilíndrica de radio b y las coordenadas cilíndricas r, θ y z quedan claramente indicadas.

Al integrar la expresión de $\dot{\theta}$ dada resulta $\theta = \Delta\theta = \int \dot{\theta}\,dt = \frac{1}{2}kt^2$. Para una vuelta a partir del reposo tenemos

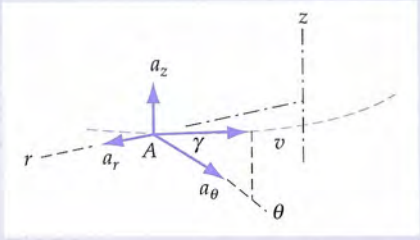
$$2\pi = \tfrac{1}{2}kt^2$$

con lo que

$$t = 2\sqrt{\pi/k}$$

Y así, la velocidad angular al cabo de una vuelta es

$$\dot{\theta} = kt = k(2\sqrt{\pi/k}) = 2\sqrt{\pi k}$$



(1) A menos que se comprenda que el ángulo del paso de la trayectoria helicoidal gobierna el movimiento z con relación al giro del tornillo, no es posible finalizar el problema. Además, debemos tener cuidado en dividir el paso L por el perímetro $2\pi b$ y no por el diámetro $2b$ para obtener tg γ. Si quedan dudas, desarrollar una vuelta de la hélice descrita por el centro de la bola.

http://gratislibrospdf.com/

② **Dibujar un triángulo rectángulo y recordar que si** $\text{tg}\,\beta = a/b$, **el coseno de** β **se hace** $b/\sqrt{a^2+b^2}$

El ángulo γ del paso de la hélice descrita por el centro de la bola gobierna la relación entre las componentes θ y z de la velocidad y está dado por $\text{tg}\,\gamma = L/(2\pi b)$. Entonces vemos en la figura que $v_\theta = v\cos\gamma$. Sustituyendo por el valor $v_\theta = r\dot{\theta} = b\dot{\theta}$ dado por la ecuación 2.16 resulta $v = v_\theta/\cos\gamma = b\dot{\theta}/\cos\gamma$. Obteniendo $\cos\gamma$ a partir de $\text{tg}\,\gamma$ y siendo $\dot{\theta} = 2\sqrt{\pi k}$, tenemos para la posición correspondiente al final de una vuelta

$$v = 2b\sqrt{\pi k}\,\frac{\sqrt{L+4\pi^2b^2}}{2\pi b} = \sqrt{\frac{k}{\pi}}\,\sqrt{L+4\pi^2b^2} \qquad \textit{Resp.}$$

③ **El signo negativo de** a_r **es compatible con nuestro conocimiento anterior acerca de la componente normal de la aceleración.**

Las componentes de la aceleración dadas por 2.17 se hacen

③
$$[a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \qquad a_r = 0 - b(2\sqrt{\pi k})^2 = -4b\pi k$$

$$[a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}] \qquad a_\theta = bk + 2(0)(2\sqrt{\pi k}) = bk$$

$$[a_z = \ddot{z} = \dot{v}_z] \qquad a_z = \frac{d}{dt}(v_z) = \frac{d}{dt}(v_\theta\,\text{tg}\,\gamma) = \frac{d}{dt}(b\dot{\theta}\,\text{tg}\,\gamma)$$

$$= (b\,\tan\gamma)\ddot{\theta} = b\,\frac{L}{2\pi b}\,k = \frac{kL}{2\pi}$$

Ahora, combinando las componentes para obtener la aceleración total, tenemos

$$a = \sqrt{(-4b\pi k)^2 + (bk)^2 + \left(\frac{kL}{2\pi}\right)^2} \qquad \textit{Resp.}$$

$$= bk\sqrt{(1+16\pi^2) + L^2/(4\pi^2b^2)}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

2.167 Supóngase que el tornillo motorizado del problema tipo 2.11 tiene un paso de 30 mm. Si $b = 150$ mm y si el tornillo gira a una velocidad constante de 4 rps, calcular los valores de la velocidad y aceleración del centro de la bola A.

Resp. $v = 3{,}77$ m/s, $a = 94{,}7$ m/s^2

2.168 En cierto instante la velocidad y la aceleración de un punto material son $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ m/s y $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ m/s^2. Hallar el ángulo β que forman $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ y el radio de curvatura ρ en el plano osculador.

2.169 Las coordenadas rectangulares de un punto material son $x = r\cos\frac{v_0}{r}t$, $y = r\,\text{sen}\,\frac{v_0}{r}t$ y $z = v_0t + \frac{1}{2}bt^2$. Dibujar la trayectoria y hallar los módulos de la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ como funciones del tiempo t. Las cantidades r, v_0 y b son constantes.

Resp. $v = \sqrt{2v_0{}^2 + 2v_0bt + b^2t^2}$, $a = \sqrt{\frac{v_0{}^4}{r^2} + b^2}$

2.170 Una atracción de feria llamada el "sacacorchos" lleva a los pasajeros a lo largo del lado interno de una hélice cilíndrica horizontal. La velocidad de los vagones cuando pasan por A es 15 m/s y en dicho punto la componente de la aceleración según la tangente a la trayectoria es $g\cos\gamma$. El radio efectivo de la hélice cilíndrica es 5 m y el ángulo del paso de la hélice $\gamma = 40°$. Calcular el valor de la aceleración de los pasajeros cuando pasan por el punto A.

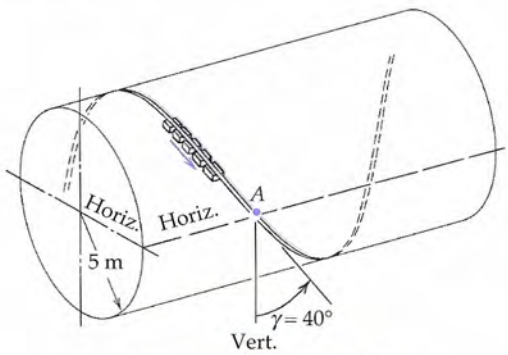


Figura problema 2.170

2.171 El órgano rotatorio de una cámara mezcladora ejecuta un movimiento axial periódico $z = z_0\,\text{sen}\,2\pi nt$ mientras gira

http://gratislibrospdf.com/

con velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega$. Hallar la expresión del módulo máximo de la aceleración de un punto A del borde de radio r. La frecuencia n de la oscilación vertical es constante.

Resp. $a_{max} = \sqrt{r^2\omega^4 + 16n^4\pi^4 z_0{}^2}$

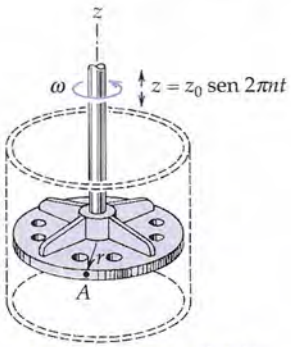


Figura problema 2.171

Problemas representativos

2.172 La antena del radar P efectúa el seguimiento del avión a reacción A que vuela horizontalmente con una celeridad u y a una altura h por encima de P. Hallar las expresiones de las componentes de la velocidad en las coordenadas esféricas centradas definidas por el movimiento de la antena.

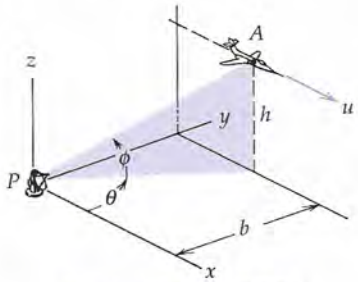


Figura problema 2.172

2.173 La boquilla giratoria rocía una gran superficie circular horizontal y gira a la velocidad angular constante $\dot{\theta} = K$. El agua se mueve por el tubo a la velocidad constante $\dot{l} = c$ relativa al tubo. Escribir las expresiones de los módulos de la velocidad y de la aceleración de una partícula de agua P cuando pasa por una posición dada l del tubo giratorio.

Resp. $v = \sqrt{c^2 + K^2 l^2 \operatorname{sen}\beta}$

$a = K \operatorname{sen}\beta \sqrt{K^2 l^2 + 4c^2}$

2.174 El pequeño bloque P describe con la celeridad constante v la trayectoria circular de radio r contenida en la superficie inclinada. Si es $\theta = 0$ en el instante $t = 0$, hallar las componentes x, y y z de la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo.

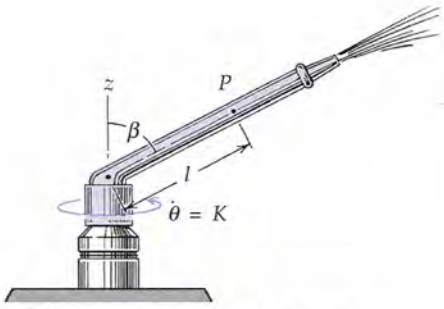


Figura problema 2.173

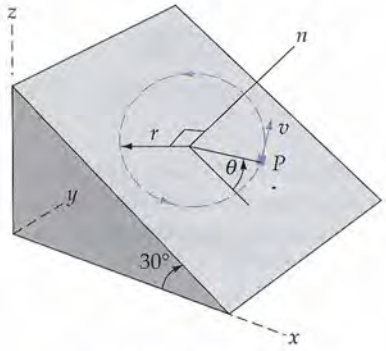


Figura problema 2.174

2.175 Un avión P despega en A con una velocidad v_0 de 250 km/h y sube dentro del plano vertical y'-z' bajo un ángulo constante de 15° animado de una aceleración de 0,8 m/s^2 según la trayectoria de vuelo. El radar O observa la evolución del vuelo. Descomponer la velocidad de P en sus componentes cilíndricas a los 60 segundos del despegue y determinar $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{z}$ en ese instante. (*Sugerencia*: Dibujar y relacionar las proyecciones en los planos x-y y x-z de las componentes de la velocidad.)

Resp. $\dot{r} = 99{,}2$ m/s $\dot{\theta} = 8{,}88(10^{-3})$ rad/s, $\dot{z} = 30{,}4$ m/s

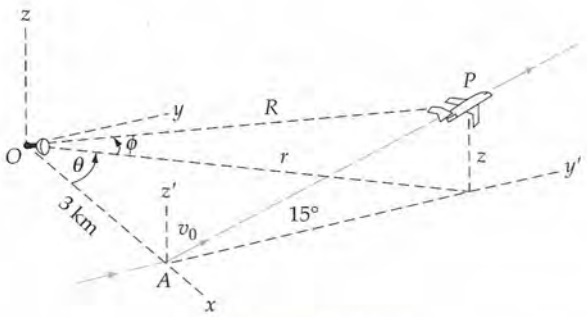


Figura problema 2.175

http://gratislibrospdf.com/

2.176 El mecanismo robótico gira alrededor de un eje vertical fijo a la vez que el brazo se alarga y se eleva. En un instante dado, $\phi = 30°$, $\dot{\phi} = 10$ grd/s = cte., $l = 0{,}5$ m, $\dot{l} = 0{,}2$ m/s, $\ddot{l} = -0{,}3$ m/s^2 y $\Omega = 20$ grd/s = cte. Hallar los módulos de la velocidad **v** y la aceleración **v** de la pieza P asida.

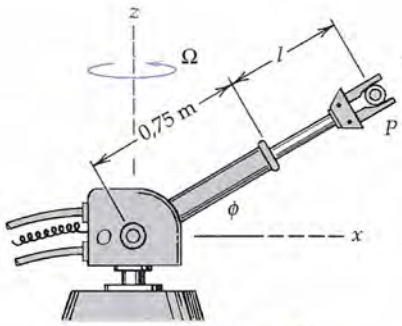


Figura problema 2.176

2.177 La estructura de la base de la escalera del coche de bomberos gira alrededor de un eje vertical que pasa por O con una velocidad angular constante $\Omega = 10$ grd/s. Al mismo tiempo, la escalera OB se eleva a la velocidad constante $\dot{\phi} = 7$ grd/s y el tramo AB avanza desde el tramo OA a la velocidad constante de 0,5 m/s. En el instante considerado, $\phi = 30°$, $\overline{OA} = 9$ m y $\overline{AB} = 6$ m. Hallar los módulos de la velocidad y aceleración del extremo B de la escalera.

Resp. $v = 2{,}96$ m/s, $a = 0{,}672$ m/s^2

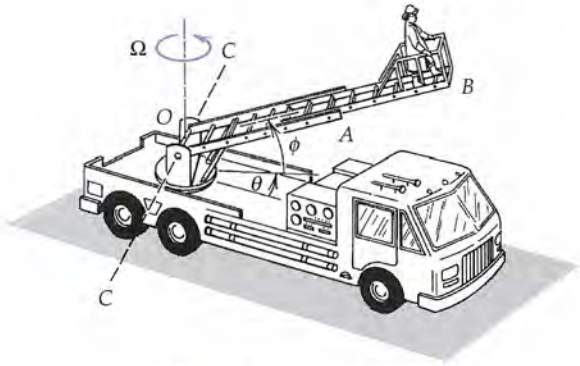


Figura problema 2.177

2.178 En una prueba del mecanismo de accionamiento de la antena telescópica de una nave espacial, el eje de sujeción gira alrededor del eje fijo z a la velocidad angular constante $\dot{\theta}$. Hallar las componentes R, θ y ϕ de la aceleración **a** del extremo de la antena en el instante en que $L = 1{,}2$ m y $\beta = 45°$ si durante el movimiento permanecen constantes las velocidades $\dot{\theta} = 2$ rad/s, $\dot{\beta} = \frac{3}{2}$ rad/s y $\dot{L} = 0{,}9$ m/s.

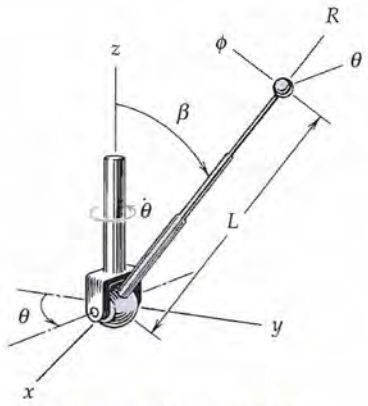


Figura problema 2.178

2.179 A una altura h, un avión describe un círculo horizontal de radio b a una celeridad constante u. En C está situado un radar de seguimiento. Escribir las expresiones de la velocidad del avión para las coordenadas esféricas definidas por el radar en función de la posición β de aquél.

$$\textit{Resp. } v_R = \frac{bu \operatorname{sen} \beta}{\sqrt{4b^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} + h^2}}, \quad v_\theta = u \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}$$

$$v_\phi = \frac{-hu \cos \frac{\beta}{2}}{\sqrt{4b^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} + h^2}}$$

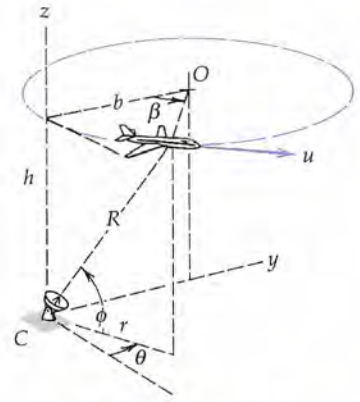


Figura problema 2.179

2.180 Para las condiciones del problema 2.175 descomponer la velocidad del avión P en sus componentes esféricas a los 60 segundos del despegue y hallar $\dot{R}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$ en ese instante. (*Sugerencia*: Dibujar y relacionar las proyeccioones de la velocidad en el plano x-y y en el plano vertical que contiene a r y R.)

http://gratislibrospdf.com/

2.181 El disco A rota en torno al eje vertical z con una velocidad constante $\omega = \dot{\theta} = \pi/3$ rad/s. Simultáneamente, el brazo articulado OB se eleva a la velocidad constante $\dot{\phi} = 2\pi/3$ rad/s. En el instante $t = 0$, es $\theta = \phi = 0$. El ángulo θ se mide desde el eje de referencia fijo x. La esferita se desliza hacia afuera por la varilla según $R = 50 + 200\,t^2$, donde R son milímetros y t son segundos. Hallar el módulo de la aceleración total **a** de P cuando $t = 0{,}5$ s.

Resp. $a = 0{,}904$ m/s^2

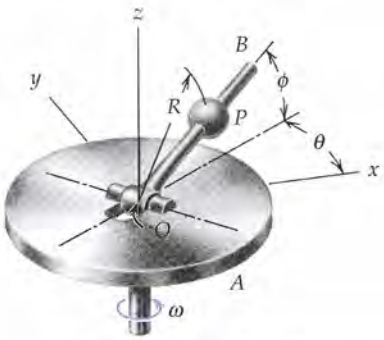


Figura problema 2.181

2.182 En la figura 2.16 asignar los vectores unitarios $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ a las direcciones de la coordenadas esféricas y hallar $\dot{\mathbf{e}}_R$, $\dot{\mathbf{e}}_\theta$ y $\dot{\mathbf{e}}_\phi$.

Resp. $\dot{\mathbf{e}}_R = \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + (\dot{\theta}\cos\phi)\mathbf{e}_\theta$

$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -(\dot{\theta}\cos\phi)\mathbf{e}_R + (\dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi)\mathbf{e}_\phi$

$\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\dot{\phi}\mathbf{e}_R - (\dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi)\mathbf{e}_\theta$

2.183 Aprovechar los resultados del problema 2.182 para obtener las componentes de la aceleración en coordenadas esféricas (ecs. 2.19) diferenciando directamente el vector de posición $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_R$.

2.184 Los carros de una de las instalaciones de un parque de atracciones están sujetos a unos brazos de longitud R, los cuales están articulados en un plato central giratorio que arrastra al conjunto en torno al eje vertical, con una velocidad constante $\omega = \dot{\theta}$. Los carros suben y bajan por la pista siguiendo la relación $z = (h/2)(1 - \cos 2\theta)$. Hallar las expresiones de R, θ y ϕ de la velocidad **v** de cada carro cuando éste pasa por la posición $\theta = \pi/4$.

Resp. $v_R = 0$, $v_\theta = R\omega\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2R}\right)^2}$

$$v_\phi = \frac{h\omega}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2R}\right)^2}}$$

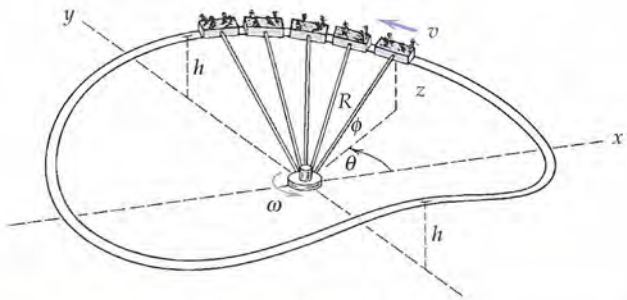


Figura problema 2.184

2.8 MOVIMIENTO RELATIVO (EJES EN TRASLACIÓN)

En los apartados precedentes de este capítulo hemos descrito el movimiento de los puntos materiales utilizando coordenadas referidas a ejes de referencia fijos. Los desplazamientos, velocidades y aceleraciones determinados de esta forma se llaman *absolutos*. No obstante, no siempre es útil ni conveniente emplear un conjunto de ejes fijos para observar un movimiento y en la práctica existen numerosos problemas en los que se simplifica el estudio del movimiento empleando mediciones efectuadas respecto a un sistema de referencia móvil. Tales mediciones, cuando se combinan con el movimiento absoluto del sistema de coordenadas móvil, nos permiten determinar el movimiento absoluto en cuestión. Este procedimiento se conoce como análisis por *movimiento absoluto*.

El movimiento del sistema de coordenadas móvil se especifica respecto a un sistema de coordenadas fijo. En sentido estricto, tal sistema fijo sería, según la Mecánica Clásica de Newton, el sistema inercial fundamental constituido

http://gratislibrospdf.com/

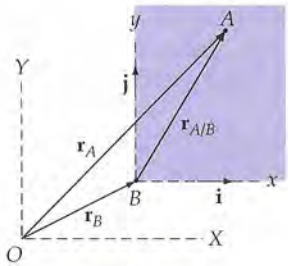


Figura 2.17

por un sistema de ejes que se suponen fijos en el espacio. Para las aplicaciones prácticas cotidianas, puede tomarse como sistema fijo cualquier sistema cuyo movimiento absoluto sea despreciable en lo que respecta al problema tratado. En la mayoría de los problemas de ingeniería planteados en la superficie terrestre, nos resultará suficientemente preciso tomar como sistema de referencia fijo un sistema de ejes fijos a la Tierra, despreciando el movimiento de ésta. Para los problemas en los que interviene el movimiento de satélites en torno a la Tierra, una referencia conveniente está formada por un sistema de coordenadas cuyo origen se encuentre en el eje de rotación de la Tierra. Para describir un viaje interplanetario, será apropiado un sistema de referencia no giratorio fijo en el centro del Sol. Así pues, la elección del sistema fijo depende de la clase de problema en cuestión.

En este apartado vamos a limitar nuestra atención a sistemas de referencia en movimiento que se trasladan pero no giran. El movimiento observado desde sistemas en rotación será examinado en el apartado 5.7 del capítulo 5, que trata de la cinemática de los cuerpos rígidos y donde dicho procedimiento recibe una aplicación concreta pero de gran importancia. Además, vamos a limitar también nuestra atención al análisis por movimiento relativo del movimiento curvilíneo plano.

Consideremos ahora dos puntos materiales A y B que pueden estar dotados de sendos movimientos curvilíneos en un plano dado o en planos paralelos (fig. 2.17). Arbitrariamente, fijamos en el punto B el origen de un sistema de ejes x-y en traslación (no giratorios) y observamos el movimiento de A desde nuestra posición móvil de B. El vector de posición de A observado relativamente al sistema x-y es $\mathbf{r}_{A/B} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, donde el subíndice "$A/B$" significa "$A$ con relación a B" o "A respecto a B". Los vectores unitarios según los ejes x e y son $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, y x e y son las coordenadas de A medidas en los ejes x-y. La posición absoluta de B está definida por el vector $\mathbf{r}_B$ medido desde el origen de los ejes fijos X-Y. Se ve, por tanto, que la posición absoluta de A está determinada por el vector

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}$$

Derivemos ahora esta ecuación vectorial respecto del tiempo, una vez para obtener velocidades y dos veces para obtener aceleraciones. Así pues,

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + \dot{\mathbf{r}}_{A/B} \qquad \text{o bien} \qquad \boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}} \qquad (2.20)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \ddot{\mathbf{r}}_B + \ddot{\mathbf{r}}_{A/B} \qquad \text{o bien} \qquad \boxed{\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}} \qquad (2.21)$$

En la ecuación 2.20, la velocidad de A que observamos desde nuestra posición B ligada a los ejes móviles x-y es $\dot{\mathbf{r}}_{A/B} = \mathbf{v}_{A/B} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$. Este término es la velocidad de A respecto a B. Análogamente, en la ecuación 2.21 la aceleración de A que observamos desde nuestra posición no giratoria de B es $\ddot{\mathbf{r}}_{A/B} = \dot{\mathbf{v}}_{A/B} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$. Este término es la aceleración de A respecto a B. Tengamos buen cuidado en observar que los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ carecen de derivadas puesto que sus direcciones, además de sus módulos, permanecen invariables. (Más adelante, cuando tratemos de los ejes de referencia en rotación, deberemos tener en cuenta las derivadas de los vectores unitarios cuando éstos cambien de dirección.)

http://gratislibrospdf.com/

La ecuación 2.20 (o la 2.21) dice que la velocidad (o la aceleración) absoluta de A es igual a la velocidad (o la aceleración) absoluta de B más, vectorialmente, la velocidad (o la aceleración) de A relativa a B, que mediría un observador que se moviera con B. Los términos del movimiento relativo pueden expresarse en cualquier sistema móvil de coordenadas que sea conveniente —rectangular, normal y tangencial o polar— y a tal fin pueden emplearse las formulaciones de los apartados anteriores. El sistema fijo apropiado según dichos apartados se convierte en el sistema móvil del apartado presente.

La selección del punto móvil B para asociarle el sistema de coordenadas es arbitraria. Igualmente se podría utilizar el punto A para asociarle el sistema móvil, en cuyo caso las tres ecuaciones del movimiento relativo correspondientes a la posición, velocidad y aceleración serían

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \qquad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

Se ve, por tanto, que $\mathbf{r}_{B/A} = -\mathbf{r}_{A/B}$, $\mathbf{v}_{B/A} = -\mathbf{v}_{A/B}$ y $\mathbf{a}_{B/A} = -\mathbf{a}_{A/B}$

En el análisis del movimiento relativo importa percatarse de que la aceleración de una partícula observada desde un sistema en traslación x-y es igual que la observada desde un sistema X-Y si el sistema móvil lleva velocidad constante. Esta conclusión amplía la aplicabilidad de la segunda ley de Newton, tratada en el capítulo 3. En consecuencia, concluimos que todo sistema de ejes dotado de velocidad absoluta constante puede ser utilizado en lugar de un sistema "fijo" para la determinación de aceleraciones. Todo sistema de referencia en traslación que no posea aceleración se conoce como *sistema inercial*.

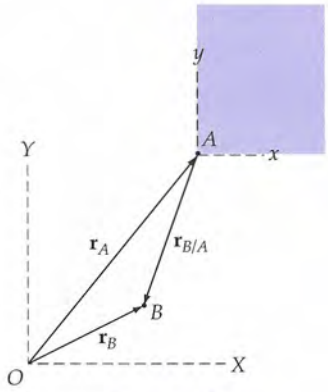
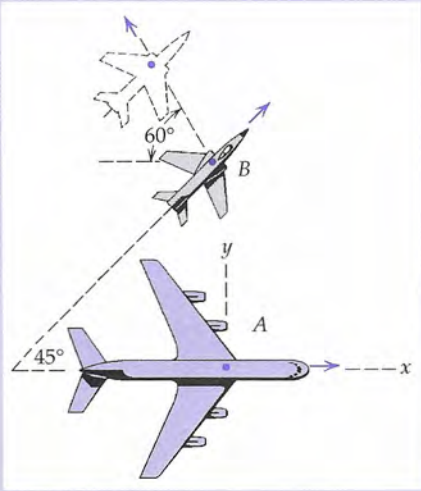


Figura 2.18

PROBLEMA TIPO 2.12

Los pasajeros que viajan en el reactor comercial A que vuela hacia el este con una celeridad constante de 800 km/h observan un segundo reactor B que pasa por debajo del primero volando horizontalmente. Aunque el morro de B está señalando en la dirección 45° nordeste, el avión B se presenta a los pasajeros de A como separándose de éste bajo el ángulo de 60° representado. Hallar la velocidad verdadera de B.



http://gratislibrospdf.com/

Solución. Los ejes de referencia móviles x-y están ligados a A donde se efectúan la observaciones relativas. Por tanto, escribamos

(1) Cada avión es tratado como punto material.

(1) $$\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

Identifiquemos seguidamente datos e incógnitas. La velocidad $\mathbf{v}_A$ es conocida, tanto en módulo como en dirección. El ángulo de 60° de la dirección de $\mathbf{v}_{B/A}$, ve-

(2) Suponemos que no hay viento lateral que produzca deriva.

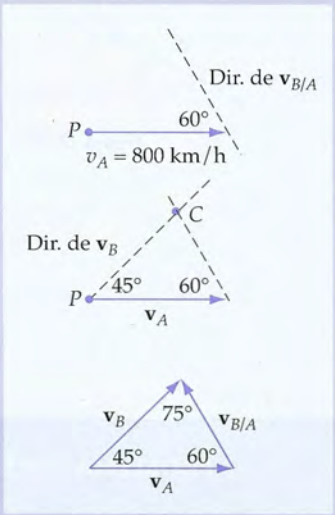
(2) locidad que parece tener B a los observadores en movimiento de A, es conocido y la velocidad verdadera de B tiene la dirección de 45° según la cual está dirigida. Las dos incógnitas que quedan son los módulos de $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_{B/A}$. Podemos resol-

(3) Conviene familiarizarse con las tres soluciones.

(3) ver la ecuación vectorial por tres procedimientos diferentes.

(I) Gráfica. Comencemos la suma de vectores desde un punto P dibujando $\mathbf{v}_A$ a la escala conveniente y después tracemos una recta por el extremo de $\mathbf{v}_A$ que tenga la dirección conocida de $\mathbf{v}_{B/A}$. A continuación, tracemos por P la dirección conocida de $\mathbf{v}_B$ y el punto de corte C de ambas rectas nos da la única solución que nos permite completar el triángulo de vectores y medir a escala los valores desconocidos, que resultan ser

$$v_{B/A} = 586 \text{ km/h} \qquad \text{y} \qquad v_B = 717 \text{ km/h} \qquad \textit{Resp.}$$



(II) Trigonométrica. Se hace un esquema del triángulo de vectores para evidenciar la geometría, lo que nos da

(4) $$\frac{v_B}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{v_A}{\operatorname{sen} 75^\circ} \qquad v_B = 800\frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ} = 717 \text{ km/h} \qquad \textit{Resp.}$$

(III) Algebraica vectorial. Empleando los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ podemos expresar como sigue en forma vectorial cada una de las velocidades

$$\mathbf{v}_A = 800\mathbf{i} \text{ km/h} \qquad \mathbf{v}_B = (v_B \cos 45^\circ)\mathbf{i} + (v_B \operatorname{sen} 45^\circ)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v}_{B/A} = (v_{B/A} \cos 60^\circ)(-\mathbf{i}) + (v_{B/A} \operatorname{sen} 60^\circ)\mathbf{j}$$

(4) Debemos estar dispuestos a identificar cuál es la relación trigonométrica apropiada, que en este caso es el teorema de los senos.

Aplicando estas expresiones en la ecuación de la velocidad relativa y operando con las componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ resulta

$$(\text{Componentes } \mathbf{i}) \qquad v_B \cos 45^\circ = 800 - v_{B/A} \cos 60^\circ$$
$$(\text{Componentes } \mathbf{j}) \qquad v_B \operatorname{sen} 45^\circ = v_{B/A} \operatorname{sen} 60^\circ$$

(5) Vemos que en este problema concreto las soluciones gráfica y trigonométrica son más breves que la algebraica vectorial.

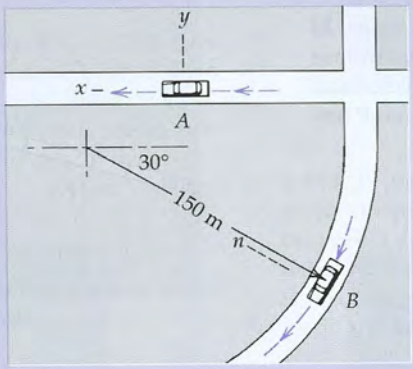
(5) Resolviendo este sistema de ecuaciones resultan los módulos de las velocidades desconocidos

$$v_{B/A} = 586 \text{ km/h} \qquad \text{y} \qquad v_B = 717 \text{ km/h} \qquad \textit{Resp.}$$

Vale la pena observar cuál sería la solución de este problema desde el punto de vista de un observador de B. Fijando en B unos ejes de referencia, escribiríamos $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{B/A}$; entonces, la velocidad aparente de A observada desde B es $\mathbf{v}_{A/B}$, opuesta a $\mathbf{v}_{B/A}$.

http://gratislibrospdf.com/

El automóvil A está acelerándose en la dirección de su movimiento a razón de 1,2 m/s². El automóvil B está tomando una curva de 150 m de radio con una celeridad constante de 54 km/h. Hallar la velocidad y la aceleración aparentes del automóvil B respecto a un observador que viaje en el automóvil A si éste ha alcanzado una celeridad de 72 km/h en las posiciones representadas.



Solución. Como se trata del movimiento de B respecto a A, tomamos unos ejes de referencia no giratorios fijos en A.

Velocidad. La ecuación de la velocidad relativa es

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

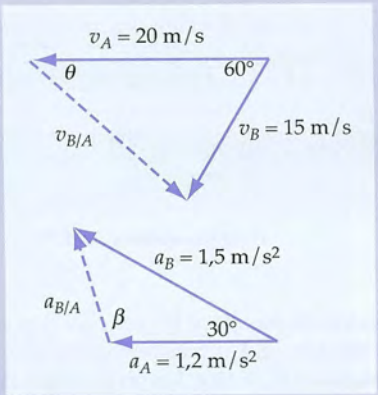
y los módulos de las velocidades de A y B en la posición considerada son

$$v_A = 7{,}2/3{,}6 = 20 \text{ m/s} \qquad v_B = 54/3{,}6 = 15 \text{ m/s}$$

Dibujando el triángulo de velocidades en el orden indicado por la ecuación y aplicando los teoremas del coseno y de los senos resulta

$$v_{B/A} = 18{,}03 \text{ m/s} \qquad \theta = 46{,}1^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

① También podría haberse seguido un procedimiento gráfico o algebraico vectorial.



Aceleración. La ecuación de la aceleración relativa es

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

La aceleración de A se conoce y la aceleración de B es normal a la curva en la dirección n y su módulo es

$$[a_n = v^2/\rho] \qquad a_B = (15^2)/150 = 1{,}5 \text{ m/s}^2$$

Trazando, tal como se muestra, el triángulo de aceleraciones en el orden marcado por la ecuación y proyectando en las direcciones x e y se obtienen las correspondientes componentes de $\mathbf{a}_{B/A}$

$$(a_{B/A})_x = 1{,}5 \cos 30^\circ - 1{,}2 = 0{,}099 \text{ m/s}^2$$

$$(a_{B/A})_y = 1{,}5 \operatorname{sen} 30^\circ = 0{,}750 \text{ m/s}^2$$

de donde $a_{B/A} = \sqrt{(0{,}099)^2 + (0{,}750)^2} = 0{,}757 \text{ m/s}^2$ *Resp.*

La dirección de $\mathbf{a}_{B/A}$ puede especificarse mediante el ángulo β que, según el teorema de los senos, será

$$\frac{1{,}5}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{0{,}757}{\operatorname{sen} 30^\circ} \qquad \beta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1{,}5}{0{,}757}\,0{,}5\right) = 97{,}5^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

② Póngase cuidado para elegir entre los dos valores 82,5° y 180 – 82,5 = 97,5°.

Sugerencia: Para aumentar la familiarización con el manejo de ecuaciones vectoriales, se sugiere escribir nuevamente las ecuaciones del movimiento relativo en la forma $\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A$ y dibujar otra vez los polígonos vectoriales de forma que se adapten a estas otras expresiones.

Advertencia. Hasta aquí sólo estamos en disposición de manejar el movimiento relativo a ejes *no giratorios.* Si hubiéramos fijado los ejes de referencia rígidamente al automóvil B, éstos girarían con el automóvil y hallaríamos que los términos de velocidad y aceleración relativos a los ejes giratorios no son opuestos a los medidos en los ejes no giratorios que se mueven con A. Los ejes giratorios se tratan en el apartado 5.7.

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMAS

Problemas introductorios

2.185 Los trenes A y B viajan por sendas vías paralelas. El tren A posee una celeridad de 80 km/h y está desacelerándose a razón de 2 m/s^2, mientras que el B mantiene una celeridad de 40 km/h. Hallar la velocidad y la aceleración del tren B respecto al A.

Resp. $\mathbf{v}_{B/A} = 120\mathbf{i}$ km/h, $\mathbf{a}_{B/A} = -2\mathbf{i}$ m/s^2

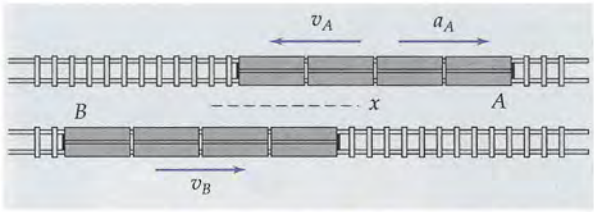


Figura problema 2.185

2.186 El avión de pasajeros B vuela hacia el este con una velocidad $v_B = 800$ km/h. Un reactor militar que viaja hacia el sur con una velocidad $v_A = 1200$ km/h pasa por debajo de B volando un poco más bajo. ¿Qué velocidad les parece que lleva A a los pasajeros de B y cuál es la dirección de esa velocidad aparente?

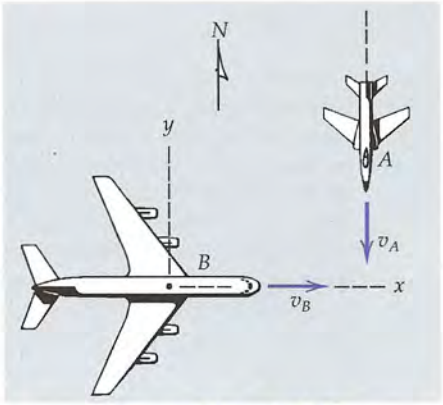


Figura problema 2.186

2.187 El tren A viaja con una celeridad constante $v_A = 120$ km/h por la vía recta y plana. El conductor del automóvil B, previendo el paso a nivel C disminuye la velocidad de 90 km/h de su vehículo a razón de 3 m/s^2. Hallar la velocidad y la aceleración del tren respecto al automóvil.

Resp. $\mathbf{v}_{A/B} = 70{,}9\mathbf{i} - 46{,}9\mathbf{j}$ km/h

$\mathbf{a}_{A/B} = 1{,}5\mathbf{i} + 2{,}60\mathbf{j}$ m/s^2

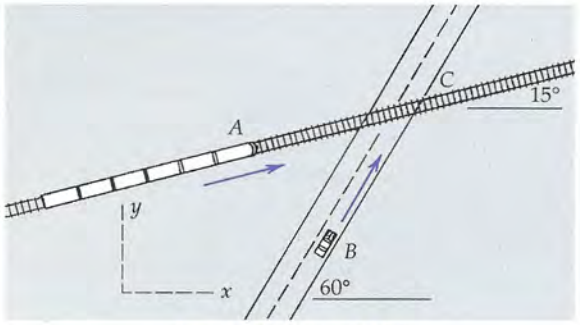


Figura problema 2.187

2.188 Un velero ciñe por babor con viento norte. La corredera registra una celeridad del casco de 6,5 nudos. El "axiómetro" (cordel ligero atado al aparejo) indica que la dirección aparente del viento forma un ángulo de 35° con el eje del barco. ¿Cuál es la verdadera celeridad del viento v_w?

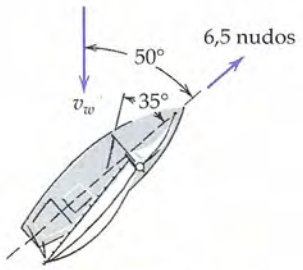


Figura problema 2.188

2.189 Para aumentar de velocidad, el esquiador acuático A corta por la estela de la lancha de remolque B, que posee una velocidad de 60 km/h. En el instante en que $\theta = 30°$, la trayectoria verdadera del esquiador forma un ángulo $\beta = 50°$ con el

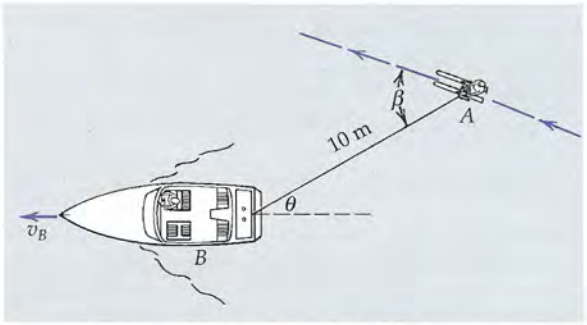


Figura problema 2.189

http://gratislibrospdf.com/

cabo de enganche. Para esa posición hallar la velocidad v_A del esquiador y el valor de $\dot{\theta}$.

Resp. $v_A = 80{,}8$ km/h, $\dot{\theta} = 0{,}887$ rad/s

Problemas representativos

2.190 Se representan dos automóviles A y B que viajan por calzadas rectas. Si el incremento por unidad de tiempo de la distancia $\overline{AB}$ que separa a ambos es igual al módulo de la velocidad relativa entre ellos que está quieto, ¿que puede afirmarse acerca de las velocidades de los vehículos?

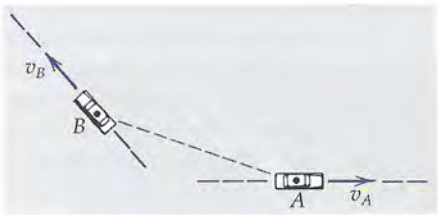


Figura problema 2.190

2.191 El automóvil A posee una celeridad hacia adelante de 18 km/h y está acelerando a 3 m/s^2. Hallar la velocidad y la aceleración del vehículo respecto al observador B, que está subido en una barquilla no giratoria de la noria. Ésta posee una velocidad angular constante $\Omega = 3$ rpm.

Resp. $\mathbf{v}_{A/B} = 3,00\mathbf{i} + 2,00\mathbf{j}$ km/h

$\mathbf{a}_{A/B} = 3{,}63\mathbf{i} + 0{,}628\mathbf{j}$ m/s^2

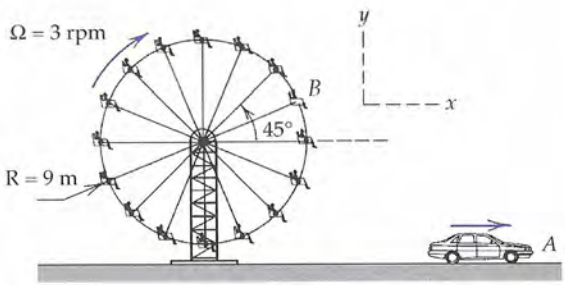


Figura problema 2.191

2.192 Un barco pequeño capaz de desarrollar 6 nudos en aguas tranquilas se mantiene proa al este mientras que es impulsado hacia el sur por una corriente oceánica. El rumbo verdadero del barco es de A a B, separados una distancia de 10 millas náuticas que requiere 2 horas exactamente. Determinar la celeridad v_w de la corriente y su dirección medida en sentido horario desde el norte.

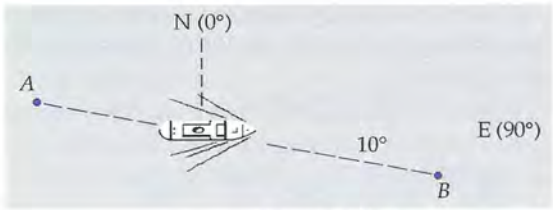


Figura problema 2.192

2.193 El jugador de hockey A guía el disco con su bastón en la dirección que se indica con una celeridad $v_A = 4$ m/s. Al hacer un pase a su compañero de equipo B, que está quieto, ¿cuál debe ser el ángulo de tiro α respecto a su visual si lanza con una celeridad inicial de 7 m/s respecto a sí mismo?

Resp. $\alpha = 23{,}8°$

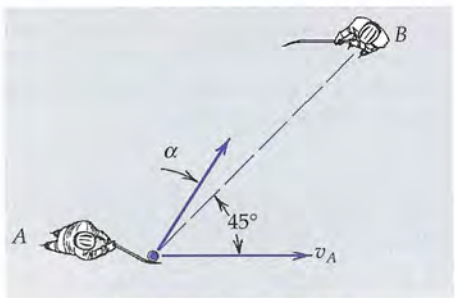


Figura problema 2.193

2.194 El barco A navega con rumbo oeste a 15 nudos y el B con rumbo sudoeste. La marcación θ de B relativa a A es de 80° y no varía. Si a las tres de la tarde la distancia entre A y B es de 8 millas náuticas, ¿cuándo ocurrirá la colisión si ninguno de los dos cambia el rumbo o la velocidad? ¿A qué velocidad navega B?

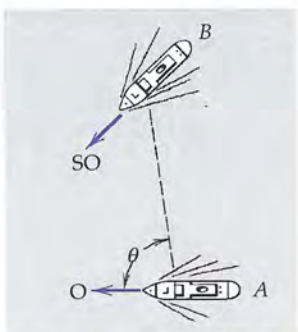


Figura problema 2.194

2.195 En el instante representado la velocidad del automóvil A es de 100 km/h y aumenta a razón de 8 km/h cada segundo. A la vez, el automóvil B lleva una velocidad de 100 km/h cuan-

http://gratislibrospdf.com/

do toma la curva y disminuye de velocidad a razón de 8 km/h cada segundo. Hallar la aceleración que los pasajeros del automóvil A aprecian en el B.

Resp. $\mathbf{a}_{B/A} = -4{,}4\mathbf{i} + 2{,}57\mathbf{j}\ \text{m/s}^2$

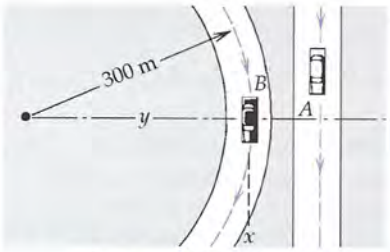


Figura problema 2.195

2.196 En el instante representado el automóvil A marcha por la curva circular a la velocidad constante de 50 km/h, mientras que el B disminuye de velocidad a razón de 8 km/h por segundo. Hallar la aceleración que el automóvil A parece llevar a un observador que viaje en el automóvil B.

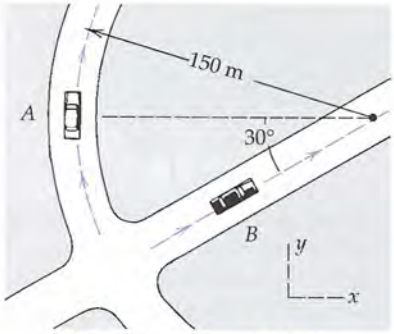


Figura problema 2.196

2.197 Los satélites A y B describen la misma órbita circular de altura $h = 1500$ km. Hallar el módulo de la aceleración del satélite B con relación a un observador sin rotación situado en el satélite A. Emplear $g_0 = 9{,}825\ \text{m/s}^2$ como aceleración gravitatoria en la superficie de la Tierra y $R = 6371$ km como radio de la misma.

Resp. $a_{B/A} = 9{,}10\ \text{m/s}^2$

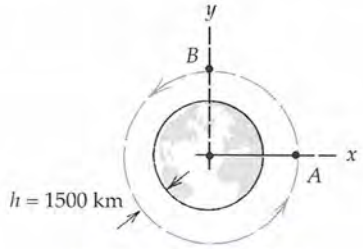


Figura problema 2.197

2.198 Para tres puntos materiales que se mueven en un mismo plano o en planos paralelos, demostrar que la velocidad y la aceleración relativas respecto a ejes sin rotación cumplen las ecuaciones $\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_{A/C} + \mathbf{v}_{C/B}$ y $\mathbf{a}_{A/B} = \mathbf{a}_{A/C} + \mathbf{a}_{C/B}$.

2.199 En el instante representado la aceleración del automóvil A tiene la dirección de su movimiento y el automóvil B tiene una celeridad de 72 km/h que está aumentando. Si la aceleración de B observada desde A es cero en ese instante, hallar la aceleración de A y la variación por unidad de tiempo de la celeridad de B.

Resp. $a_A = 3{,}14\ \text{m/s}^2$, $\dot{v}_B = 2{,}22\ \text{m/s}^2$

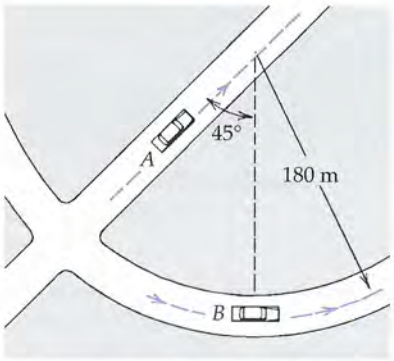


Figura problema 2.199

2.200 Dos aviones, A y B, vuelan horizontalmente en el mismo plano vertical a las altitudes respectivas de 2,40 km y 1,80 km y a las respectivas velocidades de 800 km/h y 600 km/h. Cuando el ángulo θ de la visual de B a A llega a los 30°, hallar la variaciones por unidad de tiempo con que aumentan la distancia $r_{A/B}$ de a A a B y el ángulo θ.

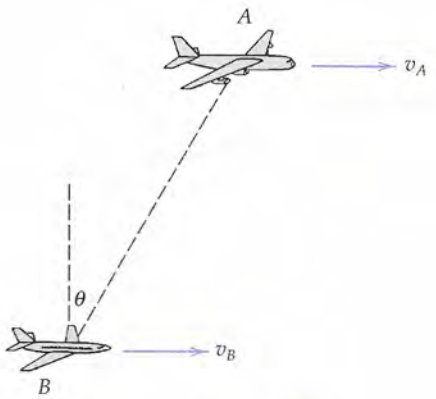


Figura problema 2.200

http://gratislibrospdf.com/

2.201 Un satélite terrestre está situado en una órbita circular polar a una altura de 240 km, que requiere una velocidad orbital de 27 940 km/h con relación al centro de la Tierra, considerado éste fijo en el espacio. Si va de sur a norte, cuando pasa sobre un observador en el Ecuador ¿en qué dirección le parecerá a éste que se mueve? El radio ecuatorial de la Tierra es 6378 km y su velocidad angular $0{,}729(10^{-4})$ rad/s.

Resp. Dirección aparente, 3,43° del norte hacia el oeste (356,57°)

2.202 El avión B vuela a una celeridad constante $v_B = 600$ km/h a una altura de 1800 m. Cuando el avión A se encuentra a una altura de 3000 m, su visual a B se halla en el plano vertical que contiene a la trayectoria de vuelo de B y forma un ángulo $\theta = 30°$ con la vertical. Hallar el valor de la velocidad que debería mantener A para que se produjera una colisión. ¿Que tiempo transcurriría desde el instante descrito hasta la colisión si no se efectuara alguna maniobra evasiva?

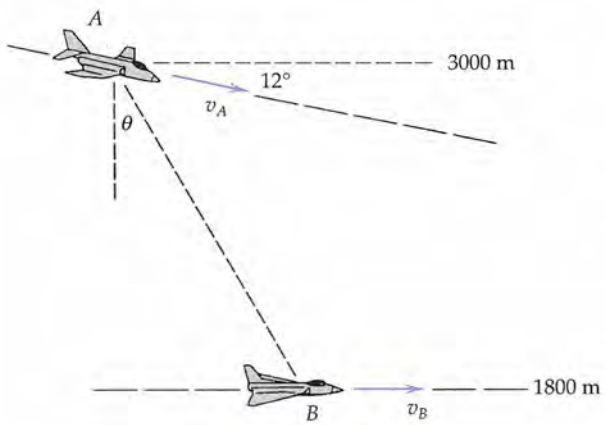


Figura problema 2.202

2.203 El aeroplano A vuela horizontalmente a la velocidad constante de 200 km/h remolcando al planeador B, que está ganando altitud. Si la longitud del cable de remolque es $r = 60$ m y θ aumenta constantemente a razón de 5 grados por segundo, hallar los módulos de la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ del planeador en el instante en que $\theta = 15°$.

Resp. $v_B = 206$ km/h, $a_B = 0{,}457$ m/s^2 de B a A

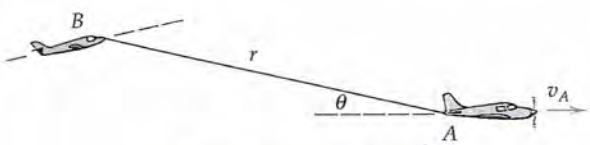


Figura problema 2.203

2.204 Arrancando de la posición marcada con "x", un jugador de fútbol americano B ejecuta la carrera que se muestra en la figura y a partir del quiebro en P corre con una celeridad constante $v_B = 7$ m/s en la dirección indicada. El interior Q lanza la pelota con una velocidad horizontal de 30 m/s en el momento en que el receptor B pasa por P. Hallar el ángulo α con que el interior debe lanzar la pelota y la velocidad de ésta con relación al receptor en el momento en que éste la recoge. Despreciar el movimiento vertical de la pelota.

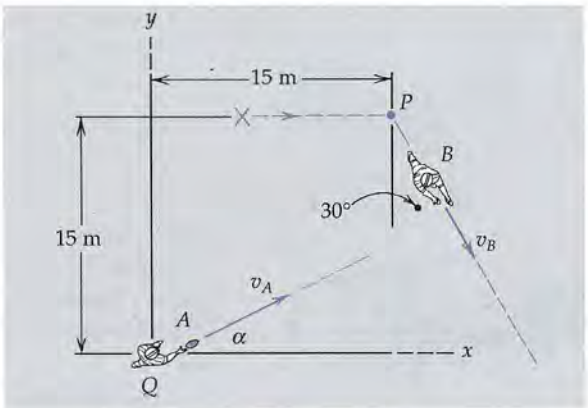


Figura problema 2.204

▶**2.205** Un bateador golpea la pelota A con una velocidad inicial de $v_0 = 30$ m/s directamente hacia el jugador B y formando un ángulo de 30° con la horizontal; la pelota se halla inicialmente a 0,90 m del suelo. El jugador B necesita 0,25 s para estimar donde debe recoger la pelota y comienza a desplazarse hacia esa posición a celeridad constante. Gracias a su gran experiencia, el jugador B ajusta su carrera de modo que llega a la "posición de recogida" a la vez que la pelota. La posición de recogida es el punto del campo en que la altura de la pelota es 2,1 m. Hallar la velocidad de la pelota con relación al jugador en el momento en que se hace con ella.

Resp. $\mathbf{v}_{A/B} = 21{,}5\mathbf{i} + 14{,}19\mathbf{j}$ m/s

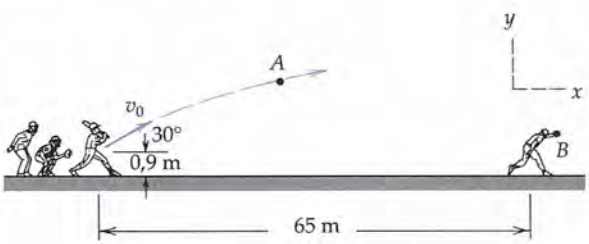


Figura problema 2.205

http://gratislibrospdf.com/

▶2.206 El avión A, con equipo detector de radar, vuela horizontalmente a 12 km de altura y aumenta su celeridad a razón de 1,2 m/s cada segundo. Su radar detecta un avión que vuela en la misma dirección y en el mismo plano vertical a una altura de 18 km. Si la celeridad de A es de 1000 km/h en el instante en que $\theta = 30°$, determinar los valores de $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$ en ese mismo instante si B tiene una celeridad constante de 1500 km/h.

Resp. $\ddot{r} = -0{,}637\ \text{m/s}^2$

$\ddot{\theta} = 0{,}1660(10^{-3})\ \text{rad/s}^2$

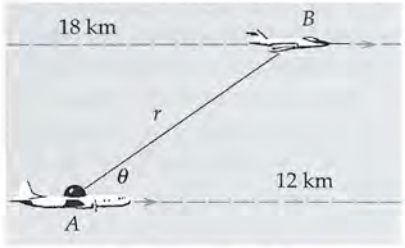


Figura problema 2.206

2.9 MOVIMIENTO VINCULADO DE PUNTOS MATERIALES CONECTADOS

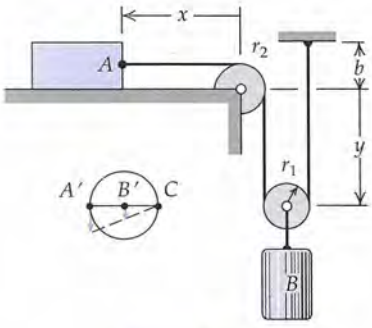


Figura 2.19

Hay ocasiones en que los movimientos de puntos materiales están interrelacionados en virtud de los vínculos que establecen miembros que conectan unos a otros y se hace necesario tener en cuenta tales vínculos, o ligaduras, cuando hay que determinar los movimientos respectivos de los distintos puntos.

Consideremos primero el sencillo sistema de dos puntos interconectados A y B de la figura 2.19. Aunque sea perfectamente evidente que el movimiento horizontal de A es doble que el movimiento vertical de B, emplearemos este ejemplo para ilustrar el método de análisis que luego trasladaremos a situaciones más complicadas, en las que los resultados no pueden deducirse por mera observación. Es obvio que el movimiento de B es el mismo que el del centro de su polea, por lo que estableceremos las coordenadas de posición x e y medidas desde una referencia adecuada. La longitud total del cable es

$$L = x + \frac{\pi r_2}{2} + 2y + \pi r_1 + b$$

Siendo constantes L, r_2, r_1 y b, las dos primeras derivadas temporales de esta ecuación dan

$$0 = \dot{x} + 2\dot{y} \qquad \text{o sea} \qquad 0 = v_A + 2v_B$$

$$0 = \ddot{x} + 2\ddot{y} \qquad \text{o sea} \qquad 0 = a_A + 2a_B$$

Las ecuaciones de ligadura de la velocidad y la aceleración indican que, para las coordenadas elegidas, el signo de la velocidad de A debe ser opuesto al de la velocidad de B y lo mismo para las aceleraciones. La ecuaciones de ligadura son válidas para el movimiento del sistema en uno u otro sentido.

Como los resultados no dependen de las longitudes ni de los radios de las poleas, podemos analizar el movimiento sin considerar esos parámetros. En la parte izquierda de la figura 2.19 se representa una vista ampliada del diámetro horizontal $A'B'C$ de la polea horizontal en un instante cualquiera. Es evidente

http://gratislibrospdf.com/

que A y A' tienen las mismas magnitudes cinemáticas, al igual que B y B'. Durante un desplazamiento infinitesimal de A' se ve fácilmente que B' se desplaza la mitad, ya que el punto C considerado como punto del cable no se mueve. Así, derivando respecto al tiempo mentalmente, deducimos por inspección las relaciones entre las velocidades y entre las aceleraciones. De hecho, la polea es una rueda que gira sobre el cable vertical fijo. (La cinemática de la rueda se trata con mayor extensión en el capítulo 5, dedicado al movimiento del cuerpo rígido.) Del sistema de la figura 2.19 se dice que tiene *un grado de libertad* puesto que basta con una variable, x o y, para definir las posiciones de todas sus partes.

En la figura 2.20 se representa un sistema de *dos grados de libertad*. Aquí la posición del cilindro inferior depende de los valores independientes de las dos coordenadas y_A e y_B. Las longitudes de los cables unidos a los cilindros A y B pueden escribirse, respectivamente,

$$L_A = y_A + 2y_D + \text{cte}$$
$$L_B = y_B + y_C + (y_C - y_D) + \text{cte}$$

y sus derivadas temporales son

$$0 = \dot{y}_A + 2\dot{y}_D \qquad \text{y} \qquad 0 = \dot{y}_B + 2\dot{y}_C - \dot{y}_D$$
$$0 = \ddot{y}_A + 2\ddot{y}_D \qquad \text{y} \qquad 0 = \ddot{y}_B + 2\ddot{y}_C - \ddot{y}_D$$

Eliminando los términos en $\dot{y}_D$ y en $\ddot{y}_D$ resulta

$$\dot{y}_A + 2\dot{y}_B + 4\dot{y}_C = 0 \qquad \text{o bien} \qquad v_A + 2v_B + 4v_C = 0$$
$$\ddot{y}_A + 2\ddot{y}_B + 4\ddot{y}_C = 0 \qquad \text{o bien} \qquad a_A + 2a_B + 4a_C = 0$$

Evidentemente, los signos de los tres términos no pueden ser positivos a la vez. Así, por ejemplo, si tanto A como B tienen velocidades descendentes (positivas), la velocidad de C será ascendente (negativa).

A los mismos resultados se llega observando el movimiento de las dos poleas C y D. Con un incremento dy_A (con y_B fija), el centro de D se mueve hacia arriba una distancia $dy_A/2$ y hace que el centro de C se mueva hacia arriba una distancia $dy_A/4$. Con un incremento dy_B (con y_A fija), el centro de C sube una distancia $dy_B/2$. La combinación de los dos movimientos da un movimiento ascendente

$$-dy_C = \frac{dy_A}{4} + \frac{dy_B}{2}$$

con lo que $-v_C = v_A/4 + v_B/2$ como antes. Una habilidad muy importante es la capacidad para representarse mentalmente la geometría real del movimiento.

En el segundo de los problemas tipo que siguen se ilustra una segunda clase de vínculo en la que el miembro de enlace cambia de dirección con el movimiento.

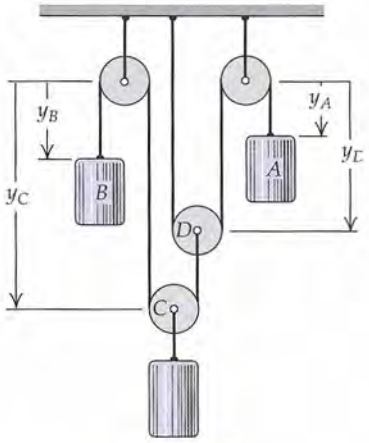
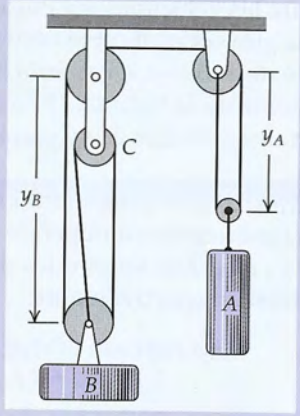
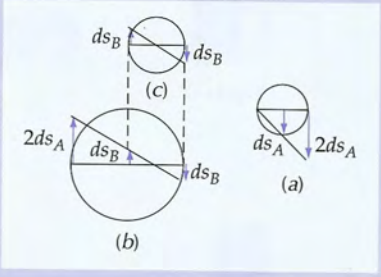


Figura 2.20

http://gratislibrospdf.com/



En el aparejo de la figura el cilindro A posee una velocidad descendente de 0,3 m/s. Hallar la velocidad ascendente de B. Resolver por dos procedimientos.



Solución (I). Los centros de las poleas A y B los ubicamos mediante las coordenadas y_A e y_B medidas desde posiciones fijas. La longitud constante del cable del aparejo es

$$L = 3y_B + 2y_A + \text{constantes} \qquad (1)$$

donde las constantes comprenden las longitudes fijas de cable en contacto con los perímetros de las poleas y la separación vertical constante entre las dos poleas de arriba a la izquierda. Derivando respecto al tiempo resulta

$$0 = 3\dot{y}_B + 2\dot{y}_A$$

Sustituyendo por $v_A = \dot{y}_A = 0{,}3$ m/s y por $v_B = \dot{y}_B$ resulta

$$0 = 3(v_B) + 2(0{,}3) \qquad \text{o bien} \qquad v_B = -0{,}2 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

(1) Despreciamos la leve oblicuidad de los cables entre B y C.

(2) El signo negativo indica que la velocidad de B es en sentido *ascendente*.

Solución (II). Se acompaña un diagrama ampliado de las poleas en A, B y C. Durante un movimiento infinitesimal ds_A del centro de A, el extremo izquierdo de su diámetro horizontal no se mueve porque está en contacto con la parte fija del cable. Por tanto, tal como se muestra, el extremo derecho se mueve $2ds_A$. Este movimiento se transmite al extremo izquierdo del diámetro horizontal de B. Además, como C tiene su centro inmóvil, vemos que los desplazamientos en cada lado son iguales y opuestos. Entonces, en la polea B, el extremo derecho del diámetro tiene un desplazamiento descendente igual al ascendente ds_B de su centro. Observando la geometría concluimos que

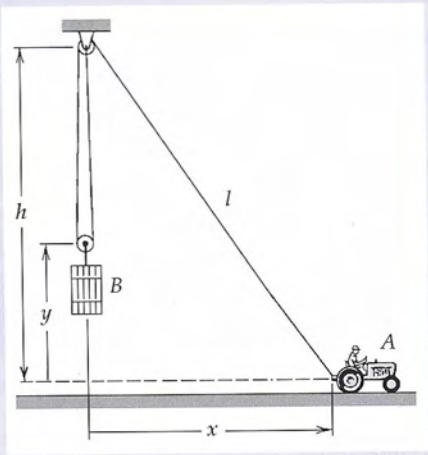
$$2ds_A = 2ds_B \qquad \text{o bien} \qquad ds_B = \tfrac{2}{3}ds_A$$

Dividiendo por dt resulta

$$|v_B| = \tfrac{2}{3}v_A = \tfrac{2}{3}(0{,}3) = 0{,}2 \text{ m/s (ascendente)} \qquad \textit{Resp.}$$

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMA TIPO 2.15



El tractor A se emplea para izar el embalaje con el aparejo representado. Si A posee una velocidad v_A hacia adelante, hallar, en función de x, la velocidad hacia arriba v_B del embalaje.

Solución. La posición del tractor la especificamos con la coordenada x, y la del embalaje con la coordenada y, medidas ambas desde la misma referencia fija. La longitud total constante del cable es

$$L = 2(h-y) + l = 2(h-y) + \sqrt{h^2 + x^2}$$

① Derivando respecto al tiempo resulta

$$0 = -2\dot{y} + \frac{x\dot{x}}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

Con las sustituciones por $v_A = \dot{x}$ y por $v_B = \dot{y}$ queda

$$v_B = \frac{1}{2}\frac{xv_A}{\sqrt{h^2 + x^2}} \qquad \textit{Resp.}$$

① En Mecánica se presenta con frecuencia la necesidad de derivar la relación existente entre los lados de un triángulo rectángulo.

PROBLEMAS

Problemas introductorios

2.207 Si el bloque B está animado de una velocidad de 1,2 m/s hacia la izquierda, hallar la velocidad del cilindro A.

Resp. $v_A = 0{,}4$ m/s hacia abajo

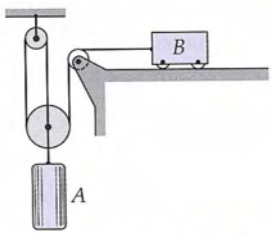


Figura problema 2.207

2.208 El torno que equipa al camión tira de éste pendiente arriba mediante la disposición de cable y polea que se muestra. Si el cable se arrolla en el tambor a razón de 40 mm/s, ¿cuánto tarda el camión en ascender 4 m pendiente arriba?

http://gratislibrospdf.com/

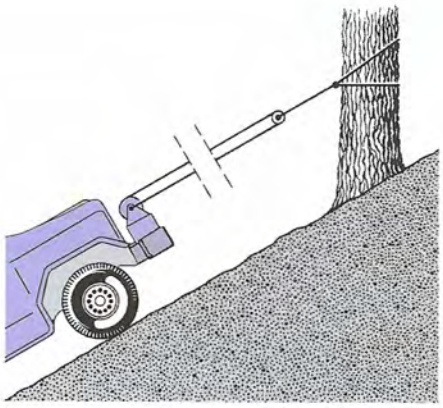


Figura problema 2.208

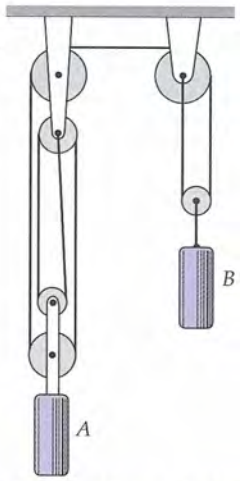


Figura problema 2.210

2.209 El cilindro B desciende a 0,6 m/s y tiene una aceleración ascendente de 0,15 m/s^2. Calcular la velocidad y aceleración del bloque A.

Resp. $v_A = 0{,}9$ m/s (hacia arriba),
$a_A = 0{,}225$ m/s^2 (hacia abajo)

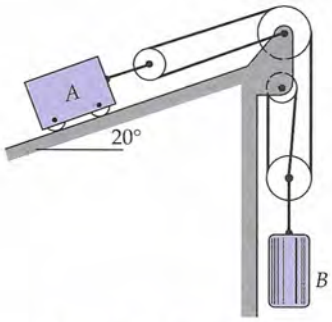


Figura problema 2.209

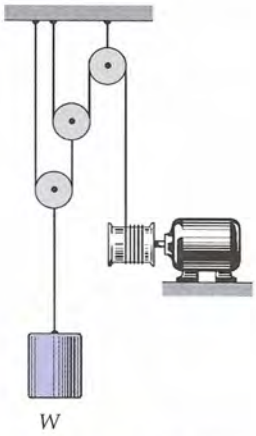


Figura problema 2.211

2.210 La velocidad descendente del bloque B, en metros por segundo, está dada por $v_B = t^2/2 + t^3/6$. Calcular la aceleración de A cuando $t = 2$ s.

2.211 Hallar la distancia h que sube la carga W durante 5 segundos si el tambor del mecanismo de izado arrolla el cable a razón de 320 mm/s.

Resp. $h = 400$ mm

2.212 Hallar la ecuación de ligadura que relaciona las aceleraciones de los cuerpos A y B. Supóngase que la superficie superior de A permanece horizontal.

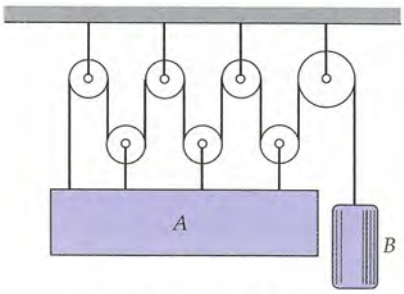


Figura problema 2.212

http://gratislibrospdf.com/

Problemas representativos

2.213 Hallar la relación que rige las velocidades de los cuatro cilindros. Expresar como positivas las velocidades descendentes. ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

Resp. $4v_A + 8v_B + 4v_C + v_D = 0$, tres grados de libertad

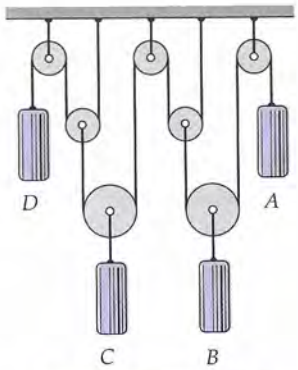


Figura problema 2.213

2.214 Los tornos eléctricos del andamio permiten elevarlo o bajarlo. Cuando giran en el sentido indicado, el andamio sube. Si los tornos tienen unos tambores de 200 mm de diámetro y giran a 40 rpm, hallar la velocidad ascendente v del andamio.

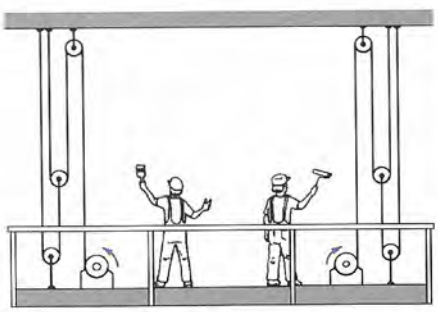


Figura problema 2.214

2.215 El andamio del problema 2.214 se modifica montando los tornos en el suelo y no en el mismo andamio. Las demás condiciones son las mismas. Hallar la velocidad ascendente v del andamio.

Resp. $v = 104{,}7$ mm/s

2.216 Los cursores A y B se deslizan por las barras fijas perpendiculares y están enlazados por una cuerda de longitud L. Hallar la aceleración a_x del cursor B en función de y si el cursor A está animado de una velocidad ascendente constante v_A.

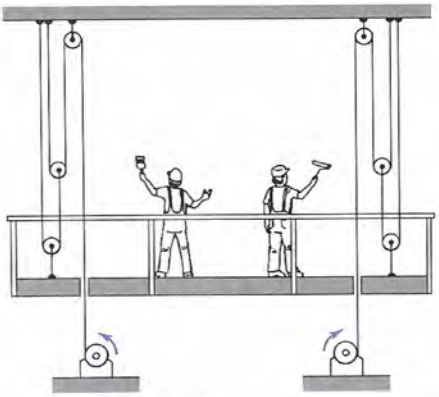


Figura problema 2.215

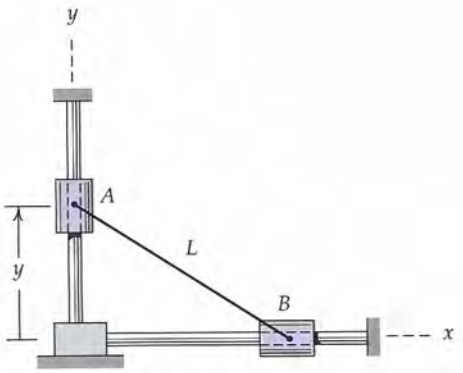


Figura problema 2.216

2.217 Los cursores A y B se deslizan a lo largo de las barras fijas y están enlazados por una cuerda de longitud L. Si el cursor A posee una velocidad $v_A = \dot{x}$ hacia la derecha, expresar la velocidad $v_B = -\dot{s}$ de B en función de x, v_A y s.

Resp. $v_B = \dfrac{s + \sqrt{2}x}{x + \sqrt{2}s} v_A$

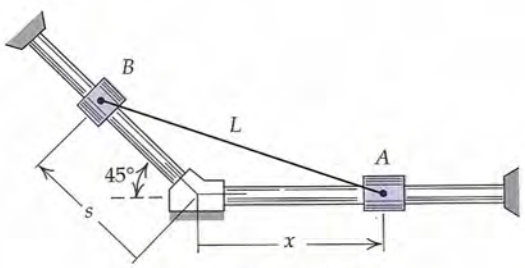


Figura problema 2.217

http://gratislibrospdf.com/

2.218 Para un valor dado de y, hallar la velocidad ascendente de A en función de la velocidad descendente de B. Despreciar los diámetros de las poleas.

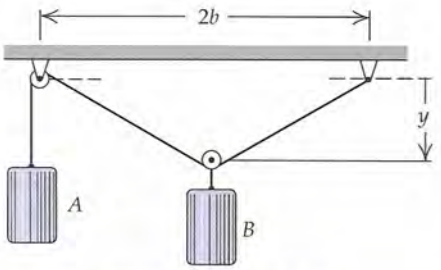


Figura problema 2.218

2.219 Para acelerar el izado de embalajes que se representa en el problema tipo 2.15, el aparejo se modifica del modo que se muestra. Si el tractor A avanza con una velocidad v_A, hallar una expresión para la velocidad ascendente v_B del embalaje en función de x. Despreciar la pequeña distancia entre el tractor y su polea de modo que ambos tengan esencialmente la misma velocidad. Comparar los resultados con los del problema tipo 2.15.

$$Resp.\ v_B = \frac{2xv_A}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

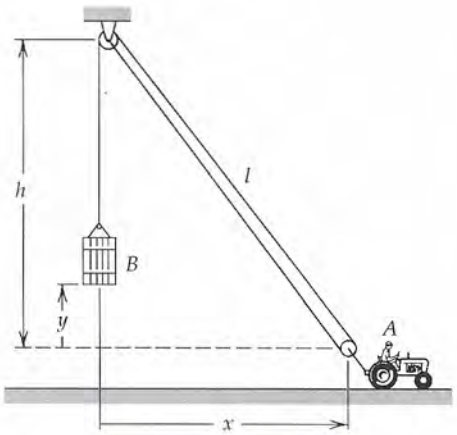


Figura problema 2.219

2.220 El pequeño cuerpo A, asimilable a una partícula, está montado en una varilla sin peso que puede girar en torno a O y, por tanto, está obligado a moverse en un arco circular de radio r. Hallar la velocidad de A en función de la velocidad descendente v_B del contrapeso y del ángulo θ.

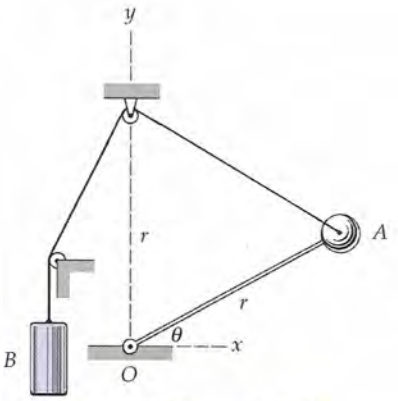


Figura problema 2.220

▶**2.221** Bajo la acción de la fuerza P, el bloque B está animado de una aceleración de 3 m/s² hacia la derecha. En el instante en que la velocidad de B es 2 m/s, también hacia la derecha, hallar la velocidad y la aceleración de B relativas a A y la velocidad absoluta del punto C del cable.

$$Resp.\ v_{B/A} = 0{,}5\ \text{m/s},\ a_{B/A} = 0{,}75\ \text{m/s}^2,$$
$$v_C = 1\ \text{m/s, todas hacia la derecha}$$

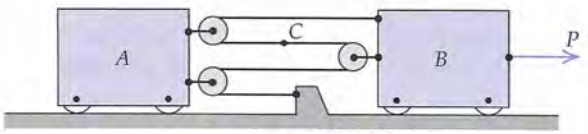


Figura problema 2.221

▶**2.222** Despreciar el diámetro de la pequeña polea sujeta al cuerpo A y hallar el módulo de la velocidad total de B en función de la velocidad v_A con que el cuerpo A se mueve hacia la derecha. Se supondrá que el cable entre B y la polea permanece vertical y el resultado se escribirá para cualquier valor de x.

$$Resp.\ v_B = v_A\sqrt{\frac{2x^2+h^2}{x^2+h^2}}$$

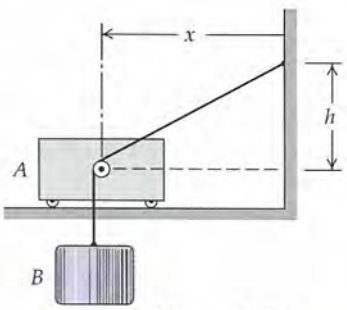


Figura problema 2.222

http://gratislibrospdf.com/

2.10 REPASO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este capítulo hemos desarrollado e ilustrado los elementos fundamentales de la teoría y aplicaciones que describen el movimiento de los puntos materiales. Es importante que el lector revise esta materia antes de proseguir con la consolidación y ampliación de sus conocimientos de la cinemática del punto. Los conceptos y procedimientos desarrollados y expuestos en este capítulo constituyen la base sobre la que descansa por completo toda la Dinámica y el avance satisfactorio en los temas que siguen sólo se conseguirá conociendo a fondo el contenido de este capítulo.

La derivada temporal de un vector es con mucho el concepto más importante comprendido en este capítulo y ciertamente ocurre que las contribuciones independientes de las variaciones en módulo y dirección de la derivada son fundamentales. A medida que avancemos en el estudio de la Dinámica tendremos más ocasiones para examinar derivadas temporales de vectores diferentes a las relativas al vector de posición y a la velocidad y aplicaremos directamente los fundamentos y métodos desarrollados en este capítulo 2.

Cuando nos concentramos en los aspectos concretos de un tema, no siempre se comprenden con claridad las relaciones existentes entre sus partes. Por otra parte, cuando el estudiante dispone de la pauta que marca una lección determinada acerca de un tema, puede reconocer automáticamente la categoría de un problema y el método adecuado para su solución; sin embargo, cuando carezca de dicha pauta, deberá elegir por sí mismo el método de resolución. La capacidad para elegir el procedimiento más apropiado es, sin duda, la clave para plantear y resolver acertadamente los problemas de ingeniería y una de las mejores maneras para adquirir esta capacidad es comparar los distintos métodos posibles tras haber analizado cada uno.

Para facilitar esta comparación será muy provechoso que seamos capaces de descomponer un problema y clasificar como sigue sus siguientes aspectos.

(a) Tipo de movimiento. Existen tres categorías:

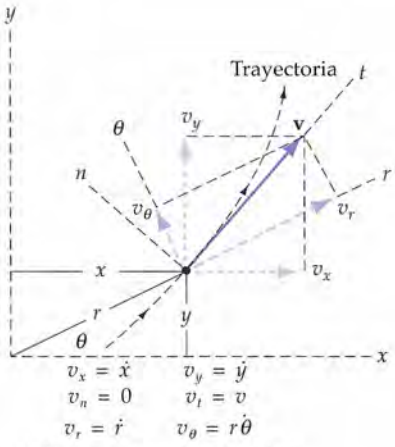
Movimiento rectilíneo (una coordenada)
Movimiento curvilíneo plano (dos coordenadas)
Movimiento curvilíneo en el espacio (tres coordenadas)

Generalmente, la propia geometría de cada problema permite efectuar de inmediato esta identificación. Como excepción a esta división en categorías se señala el caso en que sólo interesan las cantidades cinemáticas medidas a lo largo de la trayectoria; en tales situaciones, puede emplearse como coordenada la distancia medida a lo largo de la trayectoria curva en unión de sus derivadas temporales escalares que proporcionan la celeridad $|\dot{s}|$ y la aceleración tangencial $\ddot{s}$.

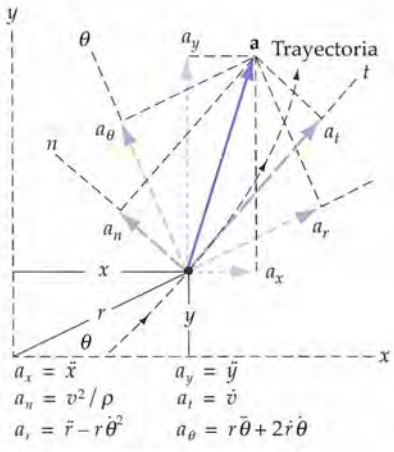
El movimiento plano es más sencillo de generar y controlar, especialmente en la maquinaria, que el movimiento en el espacio, por lo que una gran proporción de los problemas de movimiento que ocuparán nuestra atención caen en la categoría de rectilíneo o curvilíneo plano.

(b) Inmovilidad de la referencia. Corrientemente, las mediciones cinemáticas se efectúan respecto a ejes de referencia fijos (movimiento absoluto) y respecto a ejes en movimiento (movimiento relativo). La elección de los ejes adecuados depende del problema. Para la mayor parte de los problemas técnicos, unos ejes ligados a la Tierra son suficientemente "fijos", aunque entre excepciones de importancia se cuentan el movimiento interplanetario y de satélites artificiales, trayectorias balísticas de precisión, navegación y otras. Las ecuaciones

http://gratislibrospdf.com/



(*a*) Componentes de velocidad



(*b*) Componentes de aceleración

Figura 2.21

del movimiento relativo tratadas en este capítulo 2 se limitan a los ejes de referencia en traslación.

(c) Coordenadas. De importancia básica es la elección de las coordenadas. La descripción del movimiento se ha llevado a cabo empleando

Coordenadas (x-y) y (x-y-z) cartesianas (rectangulares)
Coordenadas normales y tangenciales (n-t)
Coordenadas polares (r-θ)
Coordenadas cilíndricas (r-θ-z)
Coordenadas esféricas (R-θ-ϕ)

Si no se especifican las coordenadas, la elección de éstas dependerá habitualmente de cómo se genera o se mide el movimiento. Así, en el caso de un punto material que se deslice radialmente a lo largo de una varilla giratoria, lo natural será emplear coordenadas polares. Un seguimiento por radar reclama el empleo de coordenadas polares o esféricas. Si medimos a lo largo de una trayectoria curvilínea, lo indicado son las coordenadas normal y tangencial. Un trazador de dos coordenadas hace intervenir evidentemente coordenadas rectangulares.

En la figura 2.21 se reúnen las representaciones de la velocidad **v** y la aceleración **a** del movimiento curvilíneo en coordenadas x-y, n-t y r-θ. Muchas veces puede ser necesario pasar la descripción de un movimiento de sistema de coordenadas a otro y la figura 2.21 contiene la información precisa para ello.

(d) Aproximaciones. Una de las habilidades más importantes que debe adquirirse es la de efectuar las aproximaciones apropiadas. La hipótesis de aceleración constante es válida cuando las fuerzas que causan la aceleración no varían apreciablemente. Si los datos relativos al movimiento se adquieren empíricamente, debemos emplear estos datos no exactos para conseguir la descripción mejor posible, a menudo con ayuda de aproximaciones gráficas o numéricas.

(e) Procedimiento matemático. Con frecuencia es posible elegir el procedimiento de resolución entre álgebra escalar, álgebra vectorial, trigonometría y geometría. Se han expuesto todos ellos y es importante aprenderlos todos. El método elegido depende de la geometría del problema, de cómo aparecen los datos y de la precisión deseada. Por cuanto que por propia naturaleza la Mecánica es geométrica, se anima al lector a que desarrolle su habilidad para esquematizar gráficamente relaciones vectoriales como ayuda para descubrir las relaciones geométricas y trigonométricas adecuadas y como medio para resolver gráficamente ecuaciones vectoriales. La representación geométrica constituye la descripción más directa en la inmensa mayoría de los problemas de Mecánica.

PROBLEMAS DE REPASO

2.223 La posición de un punto en una línea recta está dada por $s = 8e^{-0,4t} - 6t + t^2$, donde s está en metros y t en segundos. Hallar la velocidad v cuando la aceleración es 3 m/s^2.

Resp. $v = -7,27$ m/s

2.224 Las coordenadas polares de un punto material son $r =$ 30 mm, constante, y $\theta = 2t$ radianes, donde t son segundos. Hallar $\ddot{y}$ cuando $\theta = 60°$.

2.225 Un diseñador inexperto del terraplén para un nuevo tren de gran velocidad propone unir un tramo recto de vía a un tramo circular de 600 m de radio, tal como se muestra. Para un tren que viaje a la celeridad de 150 km/h, representar gráficamente el valor absoluto de su aceleración como función de la distancia entre los puntos A y C y explicar por qué este diseño es inaceptable.

Resp. $a_n = 2,89$ m/s^2 (de B a C)

http://gratislibrospdf.com/

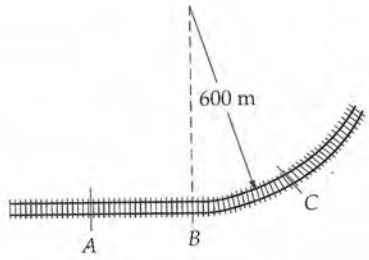


Figura problema 2.225

2.226 Inmediatamente tras ser golpeada por el bastón, una pelota de golf adquiere una velocidad de 38 m/s que forma un ángulo de 35° con la horizontal. Localizar la posición del punto de caída.

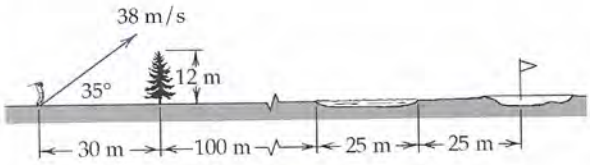


Figura problema 2.226

2.227 En el polipasto diferencial de la figura las dos poleas superiores son solidarias. El cable está arrollado alrededor de la más pequeña con su extremo fijo a ella para que no resbale. Hallar la aceleración ascendente a_B del cilindro B, si el cilindro A posee una aceleración descendente de 2 m/s^2. (*Sugerencia*: Analizar geométricamente las consecuencias de un movimiento infinitesimal del cilindro A.)

Resp. $a_B = 0{,}25$ m/s^2

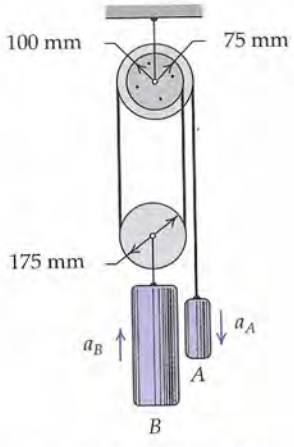


Figura problema 2.227

2.228 Al pequeño cilindro se le comunica un movimiento a lo largo de la varilla giratoria dado por $r = r_0 + b \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{\tau}$ que ejecuta entre $r = r_0 + b$ y $r = r_0 - b$, siendo t el tiempo transcurrido desde el instante en que el cilindro pasa por la posición $r = r_0$ y τ es el periodo de oscilación (el tiempo que dura una oscilación completa). Simultáneamente, la varilla gira en torno al eje vertical con una velocidad angular constante $\dot{\theta}$. Hallar el valor de r para el cual es nula la aceleración radial (o sea, en la dirección r).

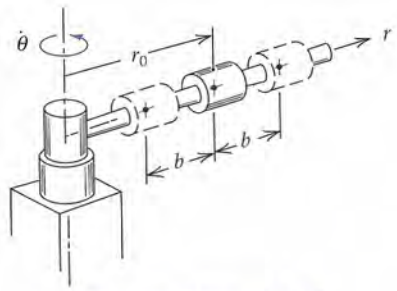


Figura problema 2.228

2.229 En la figura se representa el disparo de un pequeño proyectil con una velocidad inicial de 500 m/s^2 y un ángulo de 60° respecto a la horizontal. Despreciar la resistencia atmosférica y las variaciones de g y calcular el radio de curvatura ρ de la trayectoria del proyectil 30 s después del disparo.

Resp. $\rho = 9{,}53$ km

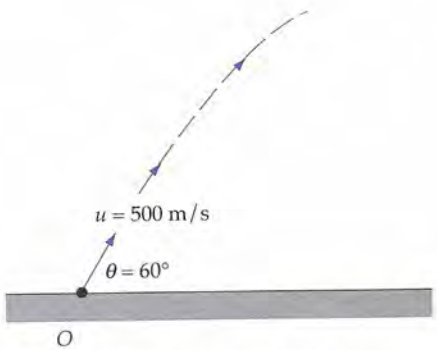


Figura problema 2.229

2.230 Se arroja una piedra pendiente abajo tal como se muestra. Hallar el módulo u y la dirección θ de su velocidad inicial para que se eleve 12 m y alcance una distancia de 50 m a lo largo de la pendiente.

http://gratislibrospdf.com/

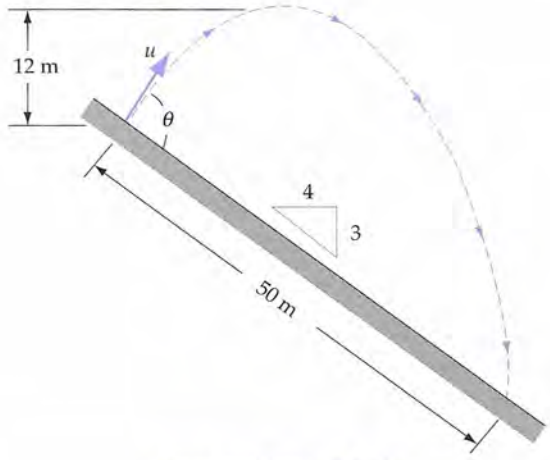


Figura problema 2.230

2.231 La tercera fase de un cohete se separa de la segunda con una velocidad u de 15 000 km/h en A y realiza a continuación un vuelo balístico hasta B. En este punto, donde la trayectoria forma con la horizontal el ángulo de 20° se procede al encendido del cohete motor. La operación se realiza prácticamente por encima de la atmósfera, pudiendo considerarse que en todo el intervalo la aceleración de la gravedad se mantiene constante en dirección y sentido siendo su valor de 9 m/s^2. Calcular el tiempo t empleado en ir de A a B. (Esta cantidad se necesita para el diseño del sistema de encendido.) Hallar también el correspondiente incremento de altura h.

Resp. $t = 3$ min 28 s, $h = 418$ km

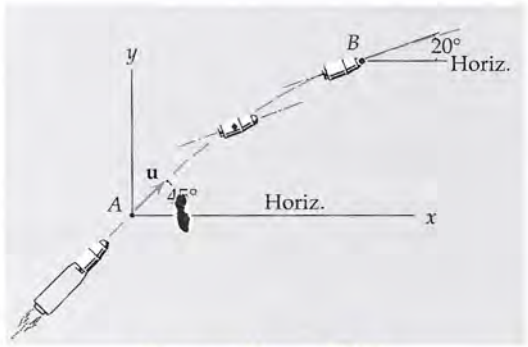


Figura problema 2.231

2.232 El desplazamiento angular de la centrífuga está dado por $\theta = 4[t + 30e^{-0,03t} - 30]$ rad, donde t son segundos y es $t = 0$ en el momento de la puesta en marcha. Si la persona pierde el conocimiento para un umbral de aceleración de $10g$, hallar en qué instante ocurre tal cosa. Comprobar que la aceleración tangencial es despreciable cuando la aceleración normal se acerca al valor $10g$.

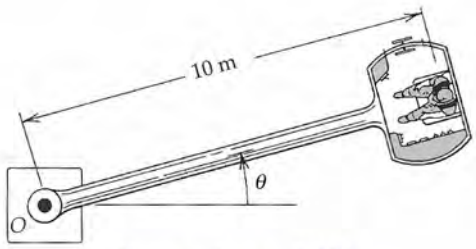


Figura problema 2.232

2.333 Se dispara verticalmente un cohete cuya trayectoria es seguida por el radar del problema 2.137 que aquí vuelve a representarse. En el instante en que $\theta = 60°$, las mediciones señalan $\dot{\theta} = 0,03$ rad/s y $r = 7500$ mm y se encuentra que la aceleración vertical del cohete es $a = 20$ m/s^2. Para dicho instante hallar los valores de $\ddot{r}$ y $\dot{\theta}$.

Resp. $\ddot{r} = 24,1$ m/s^2

$\ddot{\theta} = -1,784(10^{-3})$ rad/s^2

Figura problema 2.233

2.234 Como parte de un ejercicio de entrenamiento, el piloto del avión A ajusta su velocidad aerodinámica (o velocidad relativa al viento) a 220 km/h mientras aún se encuentra en la porción horizontal de la trayectoria de aproximación y después mantiene una velocidad constante mientras recorre la trayectoria de planeo que forma un ángulo de 10° con la horizontal. La velocidad absoluta del portaviones es 30 km/h y la del viento es 48 km/h. ¿Cuál será, para un observador situado en el barco, el ángulo β que forme con la horizontal la trayectoria de planeo?

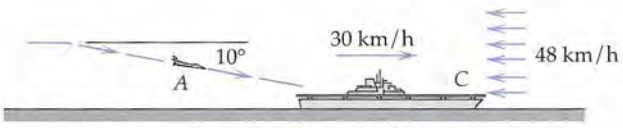


Figura problema 2.234

http://gratislibrospdf.com/

2.235 La rotación del brazo OP está controlada por el movimiento horizontal del vástago ranurado vertical. Si $\dot{x} = 1{,}2$ m/s y $\ddot{x} = 9$ m/s^2 cuando $x = 50$ mm, hallar $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ en ese instante.

Resp. $\dot{\theta} = 13{,}86$ rad/s, $\ddot{\theta} = 215$ rad/s^2

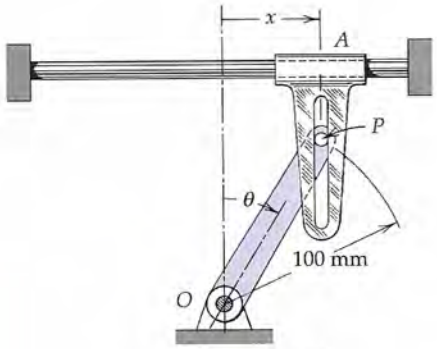


Figura problema 2.235

2.236 Un punto P que describe una trayectoria circular plana está localizado por las coordenadas polares representadas. En un instante determinado $r = 2$m, $\theta = 60°$, $v_r = 3$ m/s, $v_\theta = 4$ m/s, $a_r = -10$ m/s y $a_\theta = -5$ m/s^2. Para dicho instante, calcular el radio de curvatura ρ de la trayectoria. Además, situar gráficamente el centro de curvatura C.

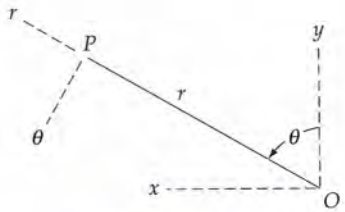


Figura problema 2.236

2.237 El cilindro A posee una celeridad constante hacia abajo de 1 m/s. Calcular la velocidad del cilindro B para (*a*) $\theta = 45°$, (*b*) $\theta = 30°$ y (*c*) $\theta = 15°$. El resorte se encuentra estirado durante el intervalo de movimiento que interesa y las poleas están conectadas por el cable de longitud constante.

Resp. (*a*) $v_B = 0{,}293$ m/s (hacia la derecha)
(*b*) $v_B = 0$, (*c*) $v_B = 0{,}250$ m/s (hacia la izquierda)

2.238 Un punto posee las siguientes componentes de posición, velocidad y aceleración: $x = 50$ m, $y = 25$ m, $\dot{x} = -10$ m/s, $\dot{y} = 10$ m/s, $\ddot{x} = -10$ m/s^2, $\ddot{y} = 5$ m/s^2. Calcular los valores de v, a, $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_n$, a_t, $\mathbf{a}_t$, a_n, $\mathbf{a}_n$, ρ, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, v_r, $\mathbf{v}_r$, v_θ, $\mathbf{v}_\theta$, a_r, $\mathbf{a}_r$, a_θ, $\mathbf{a}_\theta$, r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, θ, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$. Expresar todos los vectores en función de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ y representarlos gráficamente en unos ejes x-y a medida que se van obteniendo los valores necesarios.

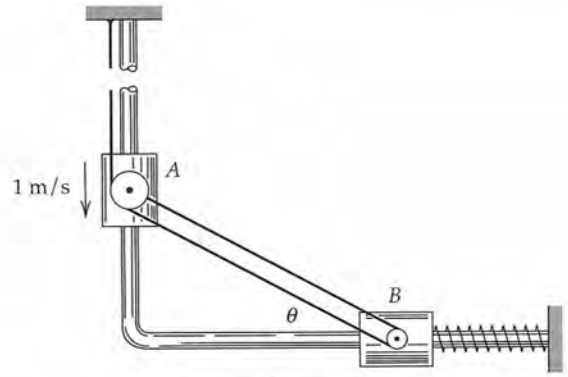


Figura problema 2.237

2.239 La varilla OA se mantiene con un ángulo constante $\beta = 30°$ y gira alrededor de la vertical con celeridad angular constante de 120 rpm. Simultáneamente el cursor P oscila a lo largo de la varilla a una distancia variable del pivote fijo O dada en milímetros por $R = 400 + 100 \operatorname{sen} 2\pi nt$, donde la frecuencia de oscilación n, a lo largo de la varilla, es constante e igual a 2 ciclos por segundo, y el tiempo se mide en segundos. Calcular la aceleración del cursor en el instante en que su velocidad $\dot{R}$ a lo largo de la varilla sea máxima.

Resp. $a = 35{,}3$ m/s^2

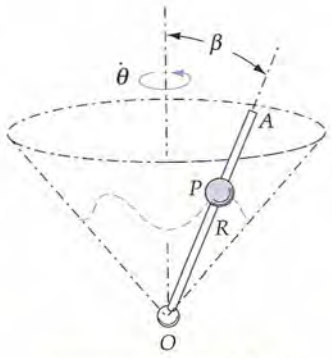


Figura problema 2.239

2.240 La antena del radar seguidor oscila en torno a su eje vertical según $\theta = \theta_0 \cos \omega t$, donde ω es la pulsación constante y $2\theta_0$ es la amplitud de la oscilación. Simultáneamente, el ángulo de elevación ϕ aumenta uniformemente a razón de $\dot{\phi} = K$. Encontrar la expresión del módulo a de la aceleración del cornete emisor (*a*) cuando pasa por la posición A y (*b*) cuando pasa por la posición superior B, suponiendo que $\theta = 0$ en ese instante.

Resp. (*a*) $a = b\sqrt{K^4 + \omega^4\theta_0^2 \cos^2 \phi}$

(*b*) $a = bK\sqrt{K^2 + 4\omega^4\theta_0^2}$

http://gratislibrospdf.com/

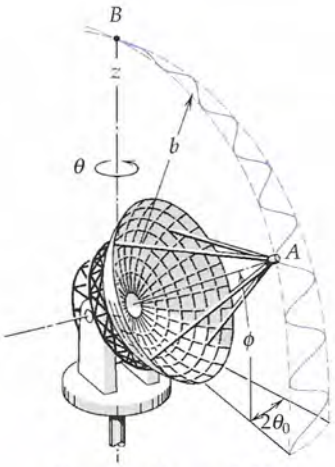


Figura problema 2.240

*PROBLEMAS ESPECIALES PARA ORDENADOR

*2.241 Dos puntos A y B parten del reposo en $x = 0$ y se mueven siguiendo trayectorias paralelas según $x_A = 0{,}16 \text{ sen } \frac{\pi t}{2}$ y $x_B = 0{,}08t$, donde x_A y x_B están en metros y t está en segundos contados desde el inicio del movimiento. Hallar el instante t (donde $t > 0$) en que ambos puntos tienen el mismo desplazamiento y calcular ese desplazamiento x.

Resp. $t = 1{,}473$s, $x = 0{,}1178$ m

*2.242 Retornamos a la leva fija y brazo rotatorio del problema 2.166. La forma de la leva hace que el seguidor A se mueva siguiendo una cardioide de ecuación $r = b - c \cos \theta$, con $b > c$. Si $b = 100$ mm, $c = 50$ mm y el brazo gira a la velocidad constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s, representar gráficamente los módulos de la velocidad **v** y la aceleración **a** del pasador A entre $\theta = 0$ y $\theta = 180°$. Justificar el valor de la aceleración para $\theta = 0$.

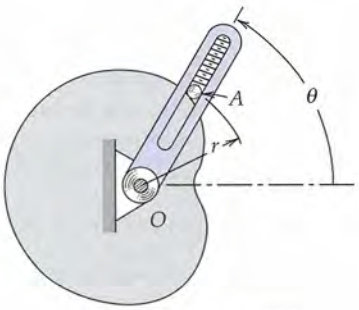


Figura problema 2.242

*2.243 Se representa otra vez el "drágster" del problema 2.47. La aceleración está dada por $a = c_1 - c_2 v^2$, donde c_1 se sabe que vale 9,15 m/s^2 pero c_2 se desconoce. Hallar c_2 sabiendo que el piloto realiza el recorrido de 400 m en 9,4 s. A continuación, representar gráficamente la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

Resp. $c_2 = 7{,}93(10^{-5})$ m^{-1}

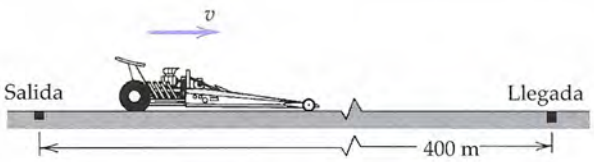


Figura problema 2.243

*2.244 La guía con la ranura vertical recibe un movimiento oscilatorio horizontal definido por $x = 100$ sen $2t$, donde x son milímetros y t son segundos. La oscilación obliga al pasador P a moverse por la ranura parabólica fija cuya forma responde a $y = x^2/100$, siendo y también milímetros. Representar gráficamente, en función del tiempo, el módulo v de la velocidad del pasador durante el intervalo necesario para que P se desplace desde el centro hasta el extremo en que $x = 100$ mm. Hallar y localizar el valor máximo de v y comprobar analíticamente los resultados.

http://gratislibrospdf.com/

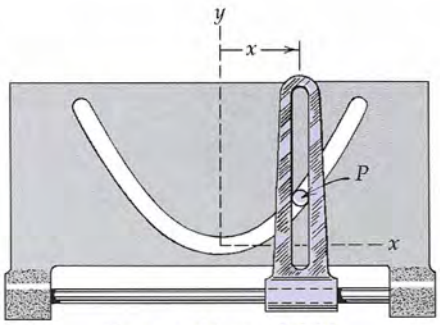


Figura problema 2.244

*2.245 Se dispara una bala verticalmente hacia arriba con una velocidad en boca de 610 m/s y alcanza una altura de 1,6 km. La resistencia del aire produce una aceleración adicional kv^2 hacia abajo proporcional al cuadrado de la velocidad v. Tomando $g = 9{,}81$ m/s^2, constante, calcular el coeficiente k.

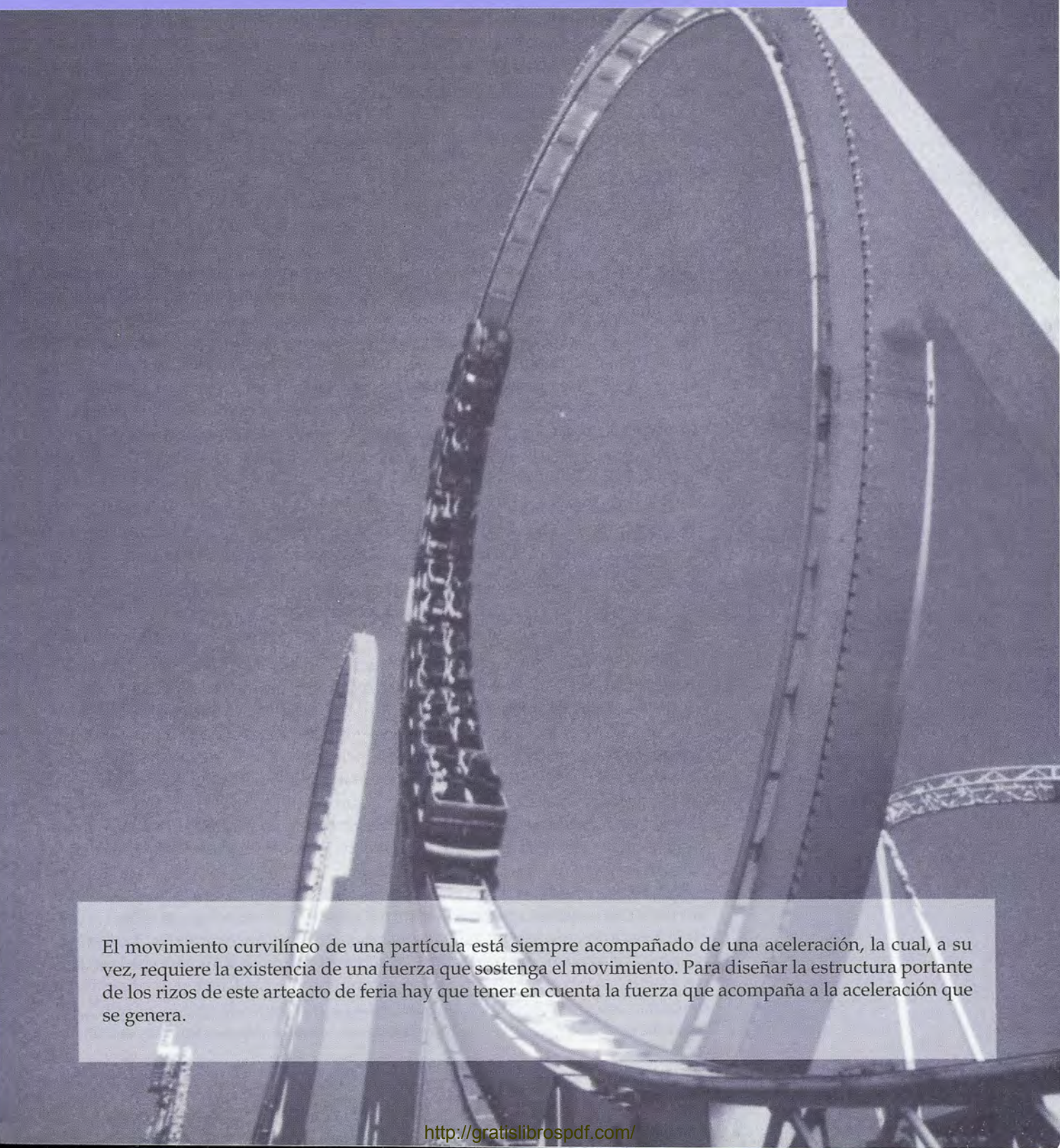
Resp. $k = 1{,}200(10^{-3})$ m^{-1}

*2.246 Un barco de 16 000 toneladas de desplazamiento total zarpa con mar en calma bajo un empuje constante de las hélices $T = 250$ kN. Al movimiento el agua opone una resistencia total dada por $R = 4{,}50v^2$, donde R son kilonewtons y v son metros por segundo. Representar gráficamente su celeridad v, en nudos, en función de la distancia recorrida, en millas náuticas, a lo largo de las cinco primeras millas desde el punto de partida. Hallar la celeridad al cabo de una milla. ¿Cuál es la celeridad máxima que el barco puede alcanzar?

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

Capítulo 3: CINÉTICA DEL PUNTO MATERIAL



El movimiento curvilíneo de una partícula está siempre acompañado de una aceleración, la cual, a su vez, requiere la existencia de una fuerza que sostenga el movimiento. Para diseñar la estructura portante de los rizos de este arteacto de feria hay que tener en cuenta la fuerza que acompaña a la aceleración que se genera.

http://gratislibrospdf.com/

3.1 INTRODUCCIÓN

De acuerdo con la segunda ley de Newton, cuando un punto material se halla sometido a una sistema de fuerzas no equilibrado, el punto material experimenta un movimiento acelerado. La cinética estudia las relaciones existentes entre los sistemas de fuerzas que no están en equilibrio y las variaciones de movimiento que originan. En este capítulo 3 estudiaremos la cinética del punto material, tema que requiere combinar nuestros conocimientos acerca de dos partes de la Mecánica previamente estudiadas, que son las propiedades de las fuerzas, descritas y desarrolladas al comienzo de la Estática, y la Cinemática del punto material, que acabamos de tratar en el capítulo 2. Apoyándonos en la segunda ley de Newton, ya estamos en disposición de combinar ambos temas y prepararnos para resolver los problemas reales en los que intervengan fuerzas, masas y movimientos.

Los problemas de Cinética pueden abordarse por tres procedimientos: (A) aplicación directa de la segunda ley de Newton (llamado método de la fuerza, masa y aceleración), (B) aplicación de principios energéticos (teorema de las fuerzas vivas) y (C) resolución mediante procedimientos basados en el impulso y la cantidad de movimiento. De estos procedimientos, cada uno presenta sus ventajas y sus características particulares y este capítulo 3 está dividido en tres partes que se corresponden con los tres procedimientos mencionados. Se añade una cuarta parte en la que se tratan aplicaciones especiales y combinaciones de los tres procedimientos generales. Antes de proseguir, recomendamos encarecidamente un repaso minucioso de las definiciones y conceptos contenidos en el capítulo 1, ya que son esenciales para las exposiciones que siguen.

SECCCIÓN A. FUERZA, MASA Y ACELERACIÓN

3.2 SEGUNDA LEY DE NEWTON

La relación básica entre fuerza y aceleración es establecida por la segunda ley de Newton (ec.1.1). La validez de dicha ley es puramente experimental y su significado fundamental se describirá con ayuda de un experimento ideal en el cual se supone que la fuerza y la aceleración se miden sin error alguno. Se aísla un punto material en el sistema inercial primario[1] y se le somete a la acción de la fuerza única $\mathbf{F}_1$. Se mide la aceleración $\mathbf{a}_1$ de la partícula y el cociente F_1/a_1 de los módulos de la fuerza y la aceleración será un número C_1 cuyo valor dependerá de las unidades en que se midan las fuerzas y las aceleraciones. El experimento se repite sometiendo a ese mismo punto a otra fuerza $\mathbf{F}_2$ y midiendo la aceleración correspondiente $\mathbf{a}_2$. De nuevo, el cociente F_2/a_2 dará un número C_2. Se repite el experimento tantas veces como se quiera. De los resultados se extraen dos conclusiones importantes. Primera, los cocientes entre las fuerzas aplicadas y las correspondientes aceleraciones son todos iguales a un *mismo* número, con tal que no se cambie de unidades de medida en los experimentos.

[1] El sistema inercial primario o sistema de referencia astronómico, es un sistema de ejes imaginario que se supone carente de rotación o traslación en el espacio. Véase apartado 2, capítulo 1.

http://gratislibrospdf.com/

Así pues,

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \ldots = \frac{F}{a} = C, \qquad \text{una constante}$$

Concluimos en que C es una constante que mide cierta propiedad invariable del punto material. Esta propiedad es la *inercia* del punto material, que es su *resistencia a variar de velocidad*. En el caso de un punto material de mucha inercia (C grande) la aceleración será pequeña para una fuerza F dada y, recíprocamente, si la inercia es pequeña, la aceleración será grande. Como medida cuantitativa de la inercia se toma la masa m, por lo que podemos escribir $C = km$, donde k es una constante que depende de las unidades empleadas. Así pues, tenemos la relación experimental

$$F = kma \tag{3.1}$$

donde F es la magnitud de la fuerza resultante que se ejerce sobre el punto material de masa m y a es el módulo de la aceleración que adquiere éste.

La segunda conclusión que extraemos del experimento ideal es que la aceleración tiene siempre la misma dirección y sentido que la fuerza aplicada. Así pues, la ecuación 3.1 es una relación *vectorial* que puede escribirse en la forma

$$\mathbf{F} = km\mathbf{a} \tag{3.2}$$

Pese a la imposibilidad de efectuar un experimento ideal como el descrito, las conclusiones se infieren de la mediciones de innumerables experimentos realizados con precisión cuyos resultados se predicen correctamente a partir de las hipótesis en que se basa el experimento ideal. Una de las comprobaciones más precisas se encuentra en la exacta predicción de los movimientos de los planetas basada en la ecuación 3.2.

(a) Sistemas inerciales. Si bien las conclusiones del experimento ideal se han obtenido para mediciones efectuadas respecto al sistema inercial primario "fijo", son válidas igualmente para mediciones hechas respecto a cualquier sistema de referencia no giratorio que se traslade a velocidad constante respecto al sistema primario. Cuando en el apartado 2.8 estudiamos el movimiento relativo, vimos que las aceleraciones medidas en todo sistema que se traslade sin aceleración son las mismas que las medidas desde el sistema primario. Así pues, la segunda ley de Newton se cumple también en todo sistema no acelerado, por lo que podemos definir que *sistema inercial* es todo sistema en el que es válida la ecuación 3.2.

Si el experimento descrito se realizase en la superficie terrestre y todas las mediciones se efectuaran relativas al sistema de referencia solidario al suelo, los resultados medidos presentarían una ligera discrepancia al aplicarlos en la ecuación 3.2. Esta discrepancia se debería al hecho de que la aceleración medida no sería la aceleración absoluta correcta. La discrepancia desaparecería cuando se tuvieran en cuenta las correcciones debidas a las componentes de aceleración de la Tierra. En la mayoría de los problemas técnicos referentes a movimientos de estructuras y máquinas en la superficie terrestre, dichas correcciones son despreciables. En tal caso, las aceleraciones medidas respecto a los ejes de referencia solidarios a la superficie terrestre, pueden considerarse

http://gratislibrospdf.com/

"absolutas" y puede aplicarse la ecuación 3.2 a las mediciones experimentales efectuadas en la superficie terrestre sin que el error sea apreciable.[1]

Existe un número creciente de problemas, particularmente referentes a cohetes y diseño de naves espaciales, en que las componentes de la aceleración de la Tierra tienen una importancia primordial. Para tales cuestiones es esencial una comprensión perfecta de las bases fundamentales de la ley de Newton y que se empleen las componentes adecuadas de la aceleración absoluta.

Con anterioridad a 1905 se habían verificado las leyes de la Mecánica newtoniana mediante innumerables experimentos físicos y se consideraba que aquéllas constituían la descripción definitiva del movimiento de los cuerpos. El concepto de *tiempo*, considerado como magnitud absoluta en la teoría de Newton, sufrió una interpretación básicamente diferente en la teoría de la Relatividad enunciada por Einstein en 1905. El nuevo concepto exigía reformular por completo las leyes aceptadas por la Mecánica. La teoría de la Relatividad pudo parecer ridícula en un principio, pero ha tenido comprobación experimental y en la actualidad la aceptan todos los científicos del mundo. Aun cuando es fundamental la diferencia entre la Mecánica de Newton y la de Einstein, los resultados obtenidos por las dos teorías sólo presentan una diferencia práctica cuando intervienen velocidades cuya celeridad sea del orden de la de la luz (300×10^6 m/s).[2] Problemas importantes referentes a partículas atómicas y nucleares, por ejemplo, llevan consigo cálculos basados en la teoría de la Relatividad y afectan de manera fundamental tanto a físicos como a ingenieros.

(b) Unidades. En la ecuación 3.2 se acostumbra a tomar k igual a la unidad, con lo que la ley de Newton toma su forma usual

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.1}$$

Todo sistema de unidades para el cual k sea la unidad recibe el nombre de sistema *cinético*. Así pues, en un sistema cinético las unidades de fuerza, masa y aceleración no son independientes. Tal como se expuso en el apartado 1.4, la unidad SI de fuerza es el newton (símbolo N) y se deriva, a través de la segunda ley de Newton, del producto de la unidad fundamental de masa (kilogramo, kg) por la unidad de aceleración (metros por segundo al cuadrado, m/s^2);

---

[1] Podemos citar como ejemplo de la magnitud del error introducido al despreciar el movimiento de la Tierra en el caso de una partícula que se abandona libremente partiendo del reposo (relativo a la Tierra) desde una altura h sobre el suelo. Puede demostrarse que la rotación de la Tierra da origen a una aceleración hacia el Este (aceleración de Coriolis) relativa a la Tierra y, despreciando la resistencia del aire, la partícula cae al suelo a una distancia

$$x = \frac{2}{3}\omega\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\cos\gamma$$

al Este del punto del suelo situado directamente debajo del punto inicial de la caída. La velocidad angular de la Tierra es $\omega = 0{,}729\,(10^{-4})$ rad/s y la latitud, Norte o Sur, es γ. En latitud de 45° y desde una altura de 200 m, la desviación hacia el Este es $x = 43{,}9$ mm.

[2] La teoría de la Relatividad pone de manifiesto que no existe ningún sistema inercial primario preferido y que las mediciones del tiempo que se hagan en dos sistemas de coordenadas que tengan una velocidad relativa el uno respecto al otro son diferentes. Basándose en esto, los principios de la Relatividad demuestran, por ejemplo, que un reloj que lleve un piloto de una nave espacial que rodee la Tierra siguiendo una órbita circular polar de a 640 km de altura a una velocidad de 27 080 km/h retrasaría respecto a un reloj situado en el Polo a razón de 0,000 001 85 s cada órbita.

http://gratislibrospdf.com/

o sea, $N = kg \cdot m/s^2$. Este sistema se llama *absoluto*, pues la unidad de fuerza depende del valor absoluto de la masa.

Por otra parte, en el Sistema Técnico la unidad de masa (UTM) se deriva de la unidad de fuerza (kilogramo-fuerza, kgf, o kilopondio, kp) dividiendo ésta por la aceleración (m/s^2). Así pues, para la unidad técnica de masa se tiene $UTM = kp \cdot s^2/m$. Este sistema recibe el nombre de *gravitatorio*, o *terrestre*, porque la masa se deduce de la fuerza producida por la atracción gravitatoria terrestre.

Por mediciones hechas con relación a la Tierra en rotación, se utiliza el valor relativo de g, cuyo valor internacionalmente admitido, al nivel del mar y a 45° de latitud, es 9,806 65 m/s^2. Salvo cuando se requiera una precisión mayor, para valor de g se empleará 9,81 m/s^2. Para mediciones relativas a la Tierra supuesta sin movimiento de rotación, se utilizará el valor absoluto de g, que a 45° de latitud y a nivel del mar es de 9,8236 m/s^2. La variación de ambos valores de g, absoluto y relativo, al nivel del mar, se indica en la figura 1.1 del apartado 1.5.

Si bien en este texto se emplean sólo las unidades SI, nos referiremos ocasionalmente al Sistema Técnico, por lo que debemos asegurarnos por completo de que entendemos claramente cuáles son las unidades correctas de fuerza y masa en cada uno de dichos sistemas. De estas unidades se trató en el apartado 1.4, pero será provechoso ponerlas aquí de manifiesto empleando números sencillos, antes de adentrarnos en las aplicaciones de la segunda ley de Newton. Consideremos, primeramente, el experimento de caída libre representado en la figura 3.1*a*, en el que se suelta un objeto en reposo respecto a la superficie terrestre y se permite que caiga libremente bajo la influencia de la fuerza atractiva gravitatoria W que sufre el cuerpo y que llamamos *peso*. En unidades SI, para una masa $m = 1$ kg el peso es $W = 9{,}81$ N y la aceleración descendente a correspondiente es $g = 9{,}81$ m/s^2. En unidades técnicas, una masa

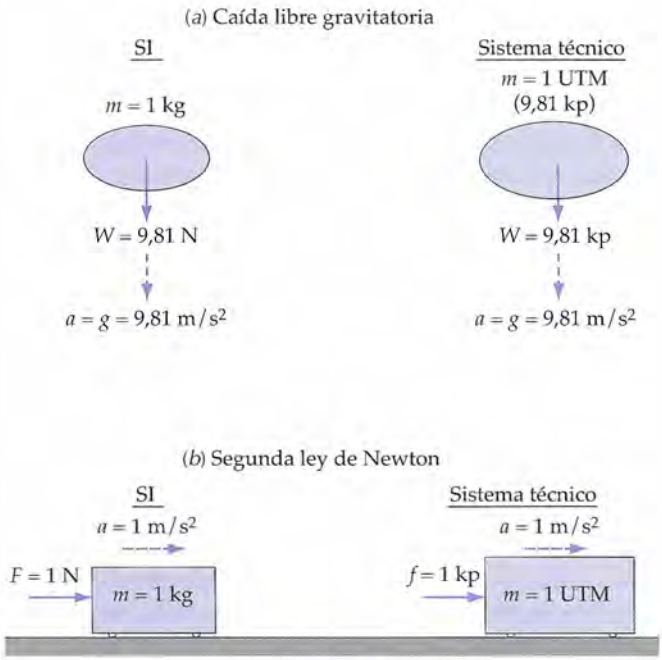


Figura 3.1

http://gratislibrospdf.com/

$m = 1$ UTM (1 kp· s^2/m) tiene un peso $W = 9{,}81$ kp, siendo igualmemnte la aceleración gravitatoria $g = 9{,}81$ m/s^2.

En la figura 3.1*b* se ilustra cuáles son las unidades propias de cada sistema con un ejemplo muy simple consistente en la aceleración de una masa m a lo largo de la horizontal mediante una fuerza F. En unidades SI, una fuerza $F = 1$ N produce una aceleración $a = 1$ m/s^2 sobre una masa $m = 1$ kg. Expresando este mismo proceso y las mismas *cantidades* que intervienen en él en unidades técnicas (o sea, gravitatorias), diremos que una fuerza $F = 1/9{,}81$ kp (1 kp = 9,81 N) produce una aceleración $a = 1$ m/s^2 sobre una masa $m = 1/9{,}81$ UTM (1 UTM = 9,81 kg).

Se tendrá en cuenta que la unidad SI de masa es el kilogramo (kg) y que por tanto el peso en este sistema debe expresarse en newton (N) según $W = mg$, siendo $g = 9{,}81$ m/s^2. En el sistema técnico, el peso W de un cuerpo se expresa en kilogramos-fuerza, o kilopondio (kp), y la masa (kp · s^2/m), cuya unidad carece de nombre específico y se representa UTM, está dada por $m = W/g$, siendo $g = 9{,}81$ m/s^2. En el lenguaje cotidiano, solemos referirnos al peso de un cuerpo cuando en realidad hablamos de su masa; lo que ocurre es que el número que expresa su peso (kp) en el sistema técnico es el mismo número que expresa su masa en unidades SI. En lo que sigue, empleamos sólo masas y pesos expresados en unidades SI, salvo otra indicación, y en algunos casos emplearemos la unidad técnica de fuerza o kilopondio.

3.3 ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cuando un punto material de masa m está sometido a la acción de fuerzas concurrentes $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... cuya suma vectorial es $\Sigma\mathbf{F}$, la ecuación 1.1 queda en la forma

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{3.3}$$

En la resolución de problemas, la ecuación 3.3 suele expresarse descompuesta en sus tres componentes escalares empleando alguno de los sistemas de coordenadas expuestos en el capítulo 2. La elección del sistema de coordenadas más indicado se basa el tipo de movimiento que interviene en el problema y constituye un paso vital en la formulación del mismo. La ecuación 3.3 o de cualquiera de las componentes escalares de dicha ecuación de fuerza, masa y aceleración, suele recibir el nombre de *ecuación del movimiento* y proporciona el valor instantáneo de la aceleración que corresponde a las fuerzas actuantes.

(a) Los dos problemas de la Dinámica. Al aplicar la ecuación 3.3, podemos enfrentarnos a dos tipos de problemas. En el primer caso, la aceleración está especificada o bien puede determinarse a partir de condiciones cinemáticas determinadas. La fuerza que correspondientemente actúa sobre el punto material cuyo movimiento se especifica se determina seguidamente sustituyendo directamente en la ecuación 3.3. La resolución de este tipo de problemas suele ser bastante inmediata.

En el segundo tipo de problemas, se especifican una o más fuerzas de las actuantes y debe determinarse el movimiento resultante. Cuando las fuerzas sean constantes, la aceleración será constante, como fácilmente se deduce de la ecuación 3.3. Cuando las fuerzas sean funciones del tiempo, de la posición, de la velocidad o de la aceleración, la ecuación 3.3 se convierte en una ecuación

http://gratislibrospdf.com/

diferencial que debe integrarse para determinar la velocidad y el desplazamiento. Los problemas de este tipo suelen ser más laboriosos, ya que la integración puede resultar dificultosa, especialmente si la fuerza es una función en la que se mezclan dos o más variables cinemáticas. En la práctica, es frecuente tener que recurrir a técnicas de integración aproximada, especialmente si intervienen datos experimentales. En el apartado 2.2 se desarrollaron los procedimientos para integrar matemáticamente la aceleración cuando ésta es función de las variables cinemáticas; pueden aplicarse estos mismos procedimientos cuando la fuerza sea una función especificada de los mismos parámetros, ya que la fuerza y la aceleración sólo difieren en el factor constante de la masa.

(b) Movimiento vinculado y no vinculado. Existen dos tipos de movimiento físicamente diferenciados descritos ambos por la ecuación 3.3. El primero de ellos es el movimiento *no vinculado* que ejecuta una partícula libre de guías materiales al describir una trayectoria determinada sólo por su estado de movimiento inicial y por las fuerzas de origen exterior. Un avión o un cohete en vuelo y un electrón moviéndose en un campo eléctrico son ejemplos de movimientos no vinculados. El segundo tipo es el movimiento *vinculado* en el que la trayectoria de la partícula está total o parcialmente obligado por guías materiales o ligaduras. Un disco de hockey sobre hielo se mueve con la ligadura parcial que supone el hielo. Un tren que se mueve a lo largo de su vía y un cursor deslizándose a lo largo de un eje fijo son ejemplos de movimiento totalmente vinculado. Algunas de las fuerzas actuantes sobre un punto material durante el movimiento vinculado de éste pueden ser de origen exterior y otras pueden ser las reacciones de los vínculos, o ligaduras, sobre la partícula. Al aplicar la ecuación 3.3 deben incluirse *todas las fuerzas*, tanto activas como reactivas, que actúan *sobre* la partícula.

La elección del sistema de coordenadas viene frecuentemente determinado por el número y la geometría de las ligaduras. Así, si un punto material puede moverse libremente por el espacio, como le ocurre al centro de masa de un cohete en vuelo libre, se dice que el punto tiene *tres grados de libertad*, ya que se requieren tres coordenadas independientes para especificar la posición del punto en un instante cualquiera. Deberán integrarse las tres componentes de la ecuación del movimiento para obtener las coordenadas espaciales en función del tiempo. Si un punto material está obligado a moverse sobre una superficie, como sería el caso de un bolita deslizándose sobre la superficie curva de una taza, sólo serán necesarias dos coordenadas para especificar su posición y en este caso se dice que tiene *dos grados de libertad*. Si un punto material está obligado a moverse a lo largo de una trayectoria lineal fija, como en el caso de una cuenta que se deslice por un alambre fijo, su posición deberá especificarse con la coordenada medida a lo largo del alambre. En este caso, el punto sólo tiene *un grado de libertad*.

(c) Diagrama para sólido libre. Al aplicar cualquiera de las ecuaciones del movimiento fuerza-masa-aceleración es absolutamente necesario hacer intervenir correctamente *todas* las fuerzas que se ejercen sobre el punto material o partícula. Las únicas fuerzas de las que se puede prescindir son aquéllas cuyos módulos sean despreciables frente a las de las demás fuerzas que se ejercen, como por ejemplo son despreciables las fuerzas de atracción mutua entre dos corpúsculos frente a su atracción por parte de un cuerpo celeste, tal como la Tierra. La suma vectorial $\Sigma \mathbf{F}$ de la ecuación 3.3 significa la suma vectorial de *todas* las fuerzas que se ejercen *sobre* el punto material en cuestión. Análoga-

http://gratislibrospdf.com/

mente, la suma escalar correspondiente de las fuerzas en una cualquiera de las direcciones componentes significa la suma de las componentes de *todas* las fuerzas que se ejercen *sobre* el punto en dicha dirección. La única manera fiable de hacer intervenir todas las fuerzas es aislar el punto material considerado de *todos* los cuerpos en contacto con él que influyan sobre él y sustituir los cuerpos suprimidos por las fuerzas que ejercen sobre el punto aislado. El *diagrama para sólido libre* resultante es el medio por el cual toda fuerza, conocida o no, que se ejerza sobre el punto material quede representada y, por tanto, sea tenida en cuenta. Solamente después de haber dado este paso primordial podrá procederse a escribir la ecuación o ecuaciones del movimiento apropiadas. El diagrama para sólido libre cumple en Dinámica el mismo papel clave que en Estática. Éste no es más que establecer un *método completamente fiable* para el cálculo correcto de la resultante de todas las fuerzas reales que se ejercen sobre el punto material o el punto de que se trate. En Estática, esta resultante era nula, mientras que en Dinámica se iguala al producto de la masa por la aceleración. Si el estudiante se da cuenta de que las ecuaciones del movimiento deben interpretarse exacta y literalmente, y si al hacerlo respeta el significado escalar y vectorial del signo igual en la ecuación del movimiento, encontrará un mínimo de dificultad. Todo estudiante experimentado de Mecánica técnica comprende que la observancia cuidadosa y sistemática del *método del cuerpo libre* es la *lección más importante* que puede aprender en el estudio de la Mecánica técnica. Como parte del trazado de un diagrama para sólido libre deberán indicarse claramente los ejes de coordenadas y sus sentidos positivos. Cuando se escriban las ecuaciones del movimiento, todas las sumas de fuerzas deberán ser compatibles con la elección de los sentidos positivos. Además, para ayudar a la identificación de las fuerzas exteriores que actúen sobre cada cuerpo en cuestión, dichas fuerzas se representarán con vectores azules de trazo grueso en el resto de la obra. Los problemas tipo 3.1 a 3.5 incluidos en el apartado siguiente contienen cinco ejemplos de diagramas para sólido libre que pueden repasarse fácilmente como recordatorio de cómo se construyen.

Al resolver problemas, el estudiante suele preguntarse cómo empezar y qué pasos debe seguir para llegar a la solución. Esta dificultad se reducirá al mínimo si se acostumbra a encontrar primeramente alguna relación entre la cantidad incógnita del problema y otras cantidades, conocidas y desconocidas. A continuación se encontrarán otras relaciones existentes entre dichas cantidades desconocidas y otras cantidades, conocidas o no. Por último, se establece la dependencia de los datos originales y se indica el procedimiento para el análisis y el cálculo. Emplear unos minutos en organizar el plan de enfoque mediante el reconocimiento de la dependencia entre sí de las distintas cantidades, siempre será provechoso y por lo general evitará que se retrase el alcanzar la solución a causa de cálculos inútiles.

3.4 MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Pasamos ahora a aplicar los conceptos examinados en los apartados 3.2 y 3.3 a los problemas de movimiento de puntos materiales empezando en este apartado por el movimiento rectilíneo y tratando el movimiento curvilíneo en el apartado 3.5. En ambos apartados se estudiarán los movimientos de los cuerpos que pueden ser tratados como puntos materiales o partículas. Esta simplificación es aceptable mientras sólo nos interese el movimiento de la línea descrita por el centro de masa del cuerpo, en cuyo caso las fuerzas pueden tra-

http://gratislibrospdf.com/

tarse como si concurrieran en el centro de masa. Cuando en el capítulo 6 examinemos la cinética de los cuerpos rígidos, incluiremos la acción de las fuerzas no concurrentes sobre el movimiento de los cuerpos.

Si, por ejemplo, tomamos la dirección x coincidente con la del movimiento rectilíneo de un punto material de masa m, las componentes y y z de la aceleración serán nulas y las componentes escalares de la ecuación 3.3 se hacen

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

En aquellos casos en que no sea posible hacer coincidir una de las direcciones coordenadas con la del movimiento, tendremos en el caso más general tres ecuaciones componentes

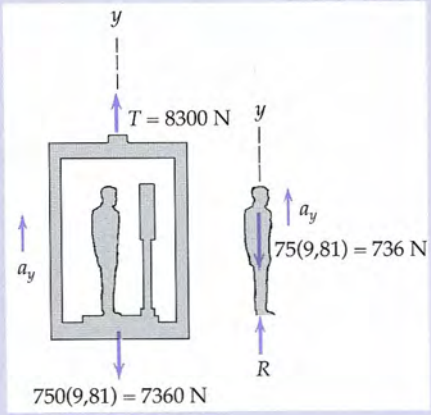
$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x \\ \Sigma F_y &= ma_y \\ \Sigma F_z &= ma_z \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde la aceleración y la fuerza resultante están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \\ a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_y^2} \\ \Sigma\mathbf{F} &= \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k} \\ |\Sigma\mathbf{F}| &= \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2} \end{aligned}$$

PROBLEMA TIPO 3.1

Un hombre de 75 kg de masa se halla de pie sobre una báscula de resortes en el interior de un ascensor. Durante los tres primeros segundos de movimiento a partir del reposo, la tensión T del cable soportante es 8300 N. Calcular la lectura R de la balanza en newton durante ese intervalo y la velocidad de ascenso v del ascensor al final del mismo. La masa total del hombre, el ascensor y la báscula es de 750 kg.



http://gratislibrospdf.com/

Solución. La fuerza que registra la báscula y la velocidad dependen de la aceleración del ascensor, que es constante porque lo son las fuerzas durante el intervalo. A partir del diagrama para sólido libre del conjunto de hombre, ascensor y báscula, la aceleración resulta ser

$$[\Sigma F_y = ma_y] \qquad 8300 - 7360 = 750a_y \qquad a_y = 1{,}257 \text{ m/s}^2$$

En la báscula se lee la fuerza ejercida sobre ella por los pies del hombre. La reacción igual y opuesta R a esa acción se representa en el diagrama para sólido libre del hombre aislado solo con su peso, y la ecuación de movimiento correspondiente es

$$[\Sigma F_y = ma_y] \qquad R - 736 = 75(1{,}257) \qquad R = 830 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

(1) Si la báscula estuviera calibrada en kilogramos, su lectura habría sido 830/9,81 = 84 ,6 kg que, desde luego, no sería su verdadera masa puesto que la medida fue hecha en un sistema no inercial. *Sugerencia*: Resolver nuevamente este problema empleando unidades del sistema técnico.

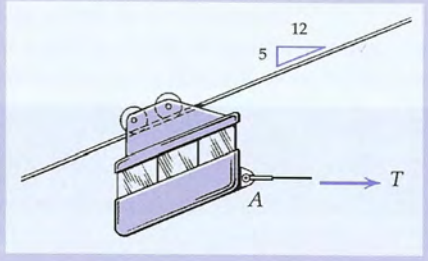
(1)

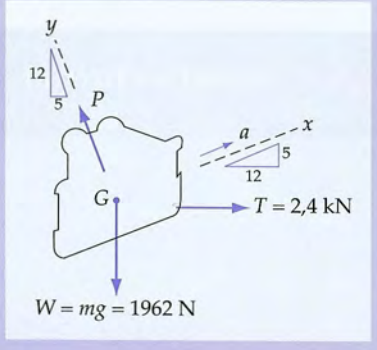
La velocidad al cabo de los tres segundos es

$$\left[\Delta v = \int a\, dt\right] \qquad v - 0 = \int_0^2 1{,}257\, dt \qquad v = 3{,}77 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 3.2

Una pequeña góndola de inspección, de masa 200 kg, corre a lo largo del cable aéreo y está controlada por el cable que se sujeta en A. Hallar su aceleración cuando el cable de control está horizontal y con una tensión T = 2,4 kN. Calcular también la fuerza total P que el cable de sustentación ejerce sobre las ruedas.





Solución. El diagrama para sólido libre de la góndola y sus ruedas como un todo, y tratadas como si fueran una partícula, incluye la tracción T de 2,4 kN, el peso $W = mg = 200(9{,}81) = 1962$ N y la fuerza P que el cable ejerce sobre las ruedas.

El vehículo se encuentra en equilibrio en la dirección y ya que no hay aceleración en esa dirección. Entonces

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad P - 2{,}4\left(\tfrac{5}{13}\right) - 1{,}962\left(\tfrac{12}{13}\right) = 0 \qquad P = 2{,}73 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

(1) Colocando los ejes de coordenadas paralela y perpendicularmente a la dirección de la aceleración podemos resolver por separado las dos componentes escalares de la ecuación del movimiento. ¿Sería lo mismo si x e y se hubieran tomado horizontal y vertical respectivamente?

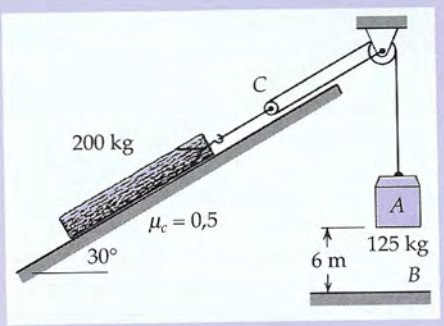
(1)

En la dirección x la ecuación del movimiento nos da

$$[\Sigma F_x = ma_x] \qquad 2400\left(\tfrac{12}{13}\right) - 1962\left(\tfrac{5}{13}\right) = 200a \qquad a = 7{,}30 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

http://gratislibrospdf.com/

El bloque A de hormigón de 125 kg se abandona desde el reposo en la posición representada y arrastra el tronco de 200 kg por la rampa de 30° arriba. Siendo 0,5 el coeficiente de rozamiento cinético entre tronco y rampa, hallar la velocidad del tronco cuando el bloque da contra el suelo en B.



Solución. Los movimientos del tronco y el bloque son claramente interdependientes. Aunque ya deba ser evidente que la aceleración del tronco rampa arriba es la mitad que la aceleración descendente de A, podemos comprobarlo formalmente. La longitud constante del cable es $L = 2s_C + s_A +$ constante, donde la constante corresponde a las longitudes de cable arrolladas en las poleas. Derivando dos veces respecto al tiempo resulta $0 = 2\ddot{s}_C + \ddot{s}_A$; o sea

$$0 = 2a_C + a_A$$

Suponemos aquí que las masas de las poleas son despreciables y que giran con unos rozamientos despreciables. Con estas hipótesis el diagrama para sólido libre de la polea C revela el equilibrio de fuerzas y momentos, de donde la tracción en el cable sujeto al tronco es doble que la del sujeto al bloque. Obsérvese que las aceleraciones del tronco y la polea C son iguales.

En el diagrama para sólido libre del tronco se muestra la fuerza de rozamiento $\mu_c N$ que se opone al movimiento rampa arriba. El equilibrio del tronco en la dirección y da

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad N - 200(9,81)\cos 30^\circ = 0 \qquad N = 1699 \text{ N}$$

y la ecuación del movimiento en la dirección x da

$$[\Sigma F_x = ma_x] \qquad 0,5(1699) - 2T + 200(9,81)\,\text{sen}\,30^\circ = 200\,a_C$$

Para el bloque tenemos, en la dirección positiva hacia abajo,

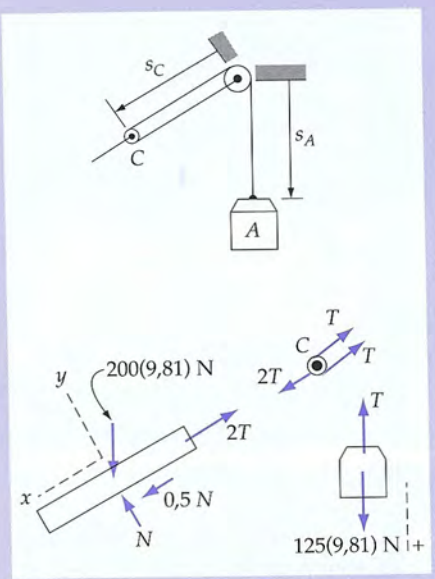
$$[+\downarrow \Sigma F = ma] \qquad 125(9,81) - T = 125a_A$$

Resolviendo el sistema de tres ecuaciones en a_C, a_A y T obtenemos

$$a_A = 1,777 \text{ m/s}^2 \qquad a_C = -0,888 \text{ m/s}^2 \qquad T = 1004 \text{ N}$$

Durante la caída de 6 m con aceleración constante, el bloque adquiere la velocidad

$$[v^2 = 2ax] \qquad v_A = \sqrt{2(1,777)(6)} = 4,62 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$



(1) Las coordenadas empleadas para expresar la relación del vínculo cinético final deben ser coherentes con las empleadas en las ecuaciones cinéticas.

(2) Podemos comprobar que efectivamente el tronco subirá por la rampa calculando la fuerza que debe ejercer el cable para iniciar el movimiento a partir del estado de equilibrio. Esta fuerza es $2T = 0,5N + 200(9,81)\text{sen}\,30^\circ = 1831$ N, o sea $T = 915$ N, inferior al peso 1226 del bloque A. Así pues, el troco se moverá rampa arriba.

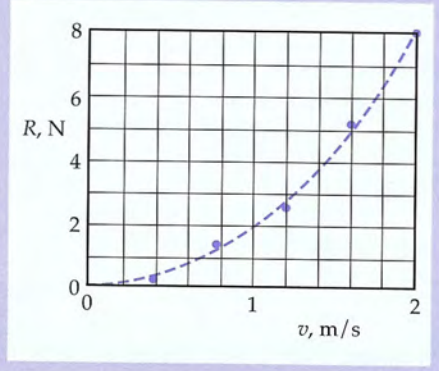
(3) Obsérvese el grave error que se cometería suponiendo $T = 125(9,81)$ N, pues en tal caso el bloque A no se aceleraría.

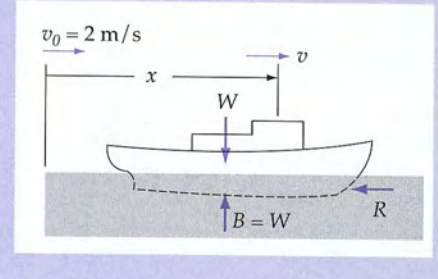
(4) Como en este sistema las fuerzas permanecen constantes, las aceleraciones resultantes permanecen también constantes.

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMA TIPO 3.4

El modelo a escala de un nuevo barco tiene una masa de 10 kg y se ensaya en un canal hidrodinámico para determinar su resistencia al movimiento a través del agua a distintas velocidades. En el gráfico se plasman los resultados del ensayo, pudiendo aproximarse la resistencia muy fielmente mediante la curva parabólica de trazo discontinuo que se representa. Si el modelo se abandona a sí mismo cuando su celeridad es 2 m/s, hallar el tiempo t necesario para que la celeridad se reduzca a 1 m/s y la correspondiente distancia recorrida x.





Solución. La relación aproximada entre resistencia y velocidad puede tomarse $R = kv^2$, donde k se determina haciendo $R = 8$ N y $v = 2$ m/s, lo que da $k = 8/2^2 = 2$ N·s^2/m^2. O sea $R = 2v^2$.

La única fuerza horizontal que actúa sobre el modelo es R, por lo que

① **Póngase cuidado en observar el signo menos de *R*.**

$$[\Sigma F_x = ma_x] \qquad -R = ma_x \qquad \text{o bien} \qquad -2v^2 = 10\frac{dv}{dt}$$

Separando variables e integrando se obtiene

$$\int_0^t dt = -5\int_2^v \frac{dv}{v^2} \qquad t = 5\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{2}\right) \text{ s}$$

Entonces, cuando $v = v_0/2 = 1$ m/s, el tiempo es $t = 5(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) = 2{,}5$ s *Resp.*

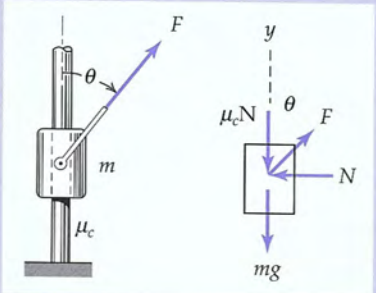
② ***Sugerencia:*** **Expresar la distancia *x* tras la suelta en función de la velocidad *v* y ver si concuerda con la relación resultante $x = 5\ \ln(v_0/v)$.**

La distancia recorrida durante estos 2,5 segundos se obtiene integrando $v = dx/dt$. Así pues, $v = 10/(5 + 2t)$ de forma que

$$\int_0^x dx = \int_0^{2,5} \frac{10}{5+2t} \qquad x = \frac{10}{2}\ln(5+2t)\Big]_0^{2,5} = 3{,}47 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 3.5

La corredera de masa m se desliza por el eje vertical hacia arriba bajo la acción de una fuerza **F** *de módulo constante y dirección variable. Si* $\theta = kt$*, donde k es una constante, y si la corredera parte del reposo siendo* $\theta = 0$*, hallar el módulo F de la fuerza que actúa sobre la corredera cuando ésta se acerca al reposo cuando* $\theta = \pi/2$*. El coeficiente de rozamiento cinético entre el eje y la corredera es* μ_c*.*



http://gratislibrospdf.com/

Solución. Tras dibujar el diagrama para sólido libre, escribimos la ecuación del movimiento para la dirección y y resulta

$$[\Sigma F_y = ma_y] \qquad F\cos\theta = \mu_c - mg = m\frac{dv}{dt}$$

① Si se expresara θ en función del desplazamiento vertical y en lugar del tiempo t, la aceleración se convertiría en una función del desplazamiento y emplearíamos $v\,dv = a\,dy$.

donde el equilibrio en la dirección horizontal requiere que $N = F$ sen θ. Sustituyendo θ por kt e integrando entre límites genéricos tenemos

$$\int_o^t (F\cos kt - \mu_c F \operatorname{sen} kt - mg)dt = m\int_0^v dv$$

que se convierte en

$$\frac{F}{k}[\operatorname{sen} kt + \mu_c(\cos kt - 1)] - mgt = mv$$

Para $\theta = \pi/2$, el tiempo se hace $t = \pi/2$ y $v = 0$, de modo que

$$\frac{F}{k}[1 + \mu_c(0-1)] - \frac{mg\pi}{2k} = 0 \qquad \text{y} \qquad F = \frac{mg\pi}{2(1-\mu_c)} \qquad \textit{Resp.}$$

② Vemos que los resultados no dependen de k, variación por unidad de tiempo de la dirección de la fuerza.

PROBLEMAS

Problemas introductorios

3.1 En una prueba de frenado, el automóvil de tracción delantera se detiene en 50 m a partir de una celeridad inicial de 95 km/h. Sabiendo que a las ruedas delanteras puede atribuirseles el 90% de la fuerza de frenado, hallar la fuerza de frenado F_f en cada rueda delantera y la fuerza de frenado F_r en cada rueda trasera. Suponer que el vehículo, de 1200 kg, lleva una desaceleración constante.

Resp. $F_f = 3760$ N, $F_r = 418$ N

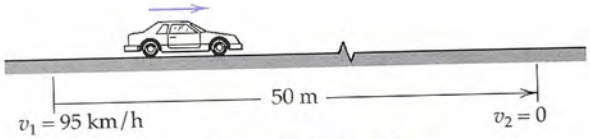


Figura problema 3.1

3.2 El embalaje de 50 kg se deposita poco a poco sobre el plano inclinado con una velocidad nula. Describir qué ocurre si (*a*) $\theta = 15°$ y (*b*) $\theta = 10°$.

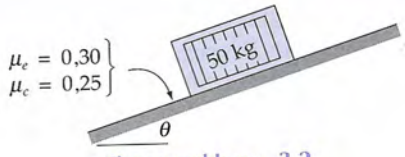


Figura problema 3.2

3.3 ¿Qué fracción n del peso del avión a reacción representa el empuje neto (empuje en el morro T menos la resistencia del aire R) necesario para que el avión suba formando un ángulo θ con la horizontal animado de una aceleración a en la dirección de vuelo?

Resp. $n = \operatorname{sen}\theta + \dfrac{a}{g}$

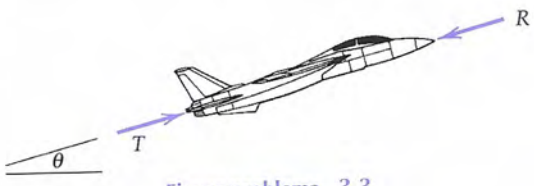


Figura problema 3.3

http://gratislibrospdf.com/

3.4 El embalaje de 50 kg se proyecta a lo largo del suelo desde el punto $x = 0$ con una celeridad inicial de 7 m/s. Siendo 0,4 el coeficiente de rozamiento cinético, calcular el tiempo que tarda en pararse y la distancia x que recorre.

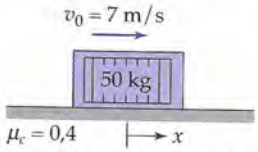


Figura problema 3.4

3.5 El embalaje del problema 3.4 se proyecta ahora hacia abajo por una rampa con una celeridad inicial de 7 m/s. Calcular el tiempo t que tarda en pararse y la distancia x que recorre si (*a*) $\theta = 15°$ y (*b*) si $\theta = 30°$.

Resp. (*a*) $t = 5{,}59$ s, $x = 19{,}58$ m,
(*b*) El embalaje no se detiene

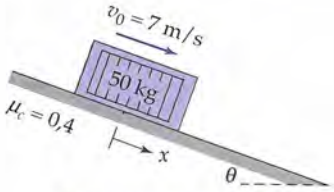


Figura problema 3.5

3.6 Durante la carrera de despegue, cada uno de los cuatro motores de un avión de pasajeros de 300 Mg produce un empuje casi constante de 180 kN. Hallar la longitud s de pista requerida si la velocidad de despegue es de 220 km/h. Calcular s primero para un despegue pendiente arriba en sentido de A a B y después para un despegue pendiente abajo, en sentido de B a A, a lo largo de la pista levemente inclinada. Despreciar las resistencias del aire y a la rodadura.

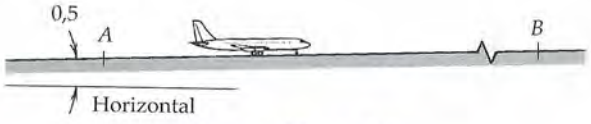


Figura problema 3.6

3.7 Como parte del proceso de diseño de una sillita de seguridad para niños, un ingeniero examina el conjunto de condiciones posibles siguientes: Una niña de 12 kg viaja en la sillita, que a su vez está firmemente sujeta al asiento del automóvil. Éste sufre un choque frontal con otro vehículo. La celeridad inicial v_0 del automóvil es de 50 km/h, que se reduce a cero durante el choque de 0,2 s de duración. Suponiendo que durante el choque el automóvil se desacelere uniformemente, estimar la fuerza horizontal neta F que deben ejercer las correas sobre la niña para que ésta permanezca fija a la silla. La niña se tratará como si fuera un punto material y se definirán las hipótesis complementarias que puedan ser necesarias para el análisis.

Resp. $F = 833$ N

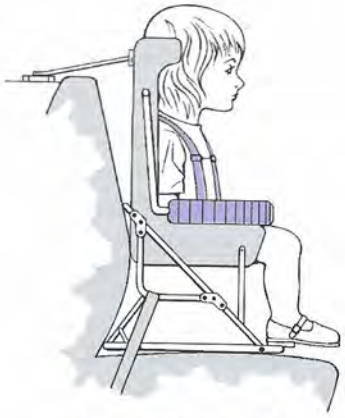


Figura problema 3.7

3.8 El collarín A se desliza libremente a lo largo del eje liso B montado en el bastidor. El plano de éste es vertical. Hallar la aceleración a del bastidor necesaria para que el collarín se mantenga en una posición fija respecto al eje.

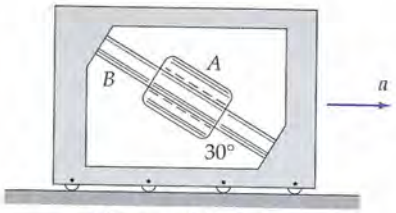


Figura problema 3.8

3.9 Calcular la aceleración vertical a del cilindro de 150 kg en los dos casos ilustrados. Despreciar el rozamiento y la masa de las poleas.

Resp. (*a*) $a = 1{,}401$ m/s^2, (*b*) $a = 3{,}27$ m/s^2

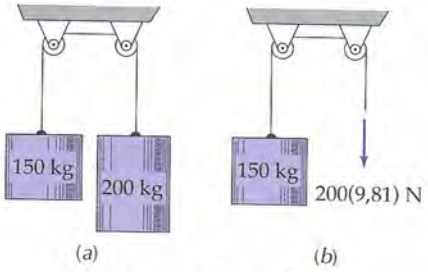


Figura problema 3.9

http://gratislibrospdf.com/

Problemas representativos

3.10 Un automóvil desciende del cerro por la pendiente θ_1 con los frenos levemente aplicados de modo que la celeridad v se mantiene constante. En el punto A, la pendiente disminuye bruscamente a θ_2. Si el chofer no varía la fuerza de frenado, hallar la aceleración a del automóvil a partir del punto A. Particularizar la expresión deducida para $\theta_1 = 6°$ y $\theta_2 = 2°$.

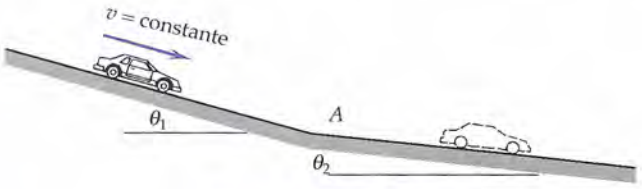


Figura problema 3.10

3.11 El coeficiente de rozamiento estático entre la plataforma del camión y la caja que transporta es 0,3. Hallar la distancia mínima de frenado que puede recorrer el camión, partiendo de una celeridad de 70 km/h y siendo constante la aceleración durante el frenado, sin que la caja resbale hacia adelante.

Resp. $s = 64{,}3$ m

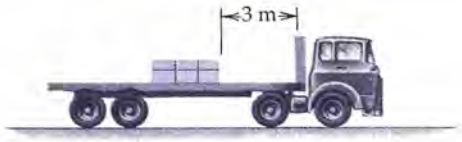


Figura problema 3.11

3.12 Si el camión del problema 3.11 se detiene desde una velocidad inicial hacia adelante de 70 km/h en una distancia de 50 m y bajo una desaceleración uniforme, averiguar si la caja golpea contra la espaldera de la plataforma. Si golpea, calcular la celeridad de la caja respecto al vehículo en el momento del impacto. Como coeficientes de rozamiento tómense $\mu_e = 0{,}3$ y $\mu_c = 0{,}25$.

3.13 Un tren se compone de una locomotora de 180 Mg y cien vagones tolva de 90 Mg. Si, al poner en marcha el convoy desde el reposo, la locomotora ejerce sobre los raíles una fuerza de rozamiento de 180 kN, calcular las fuerzas en los enganches 1 y 100. Suponer que no hay huelgos en los enganches y despreciar el rozamiento.

Resp. $T_1 = 176{,}5$ kN, $T_{100} = 1765$ N

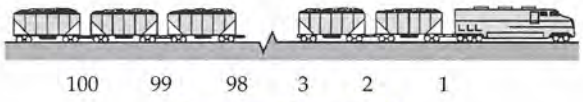


Figura problema 3.13

3.14 La banda transportadora A, que se mueve a la velocidad $v_1 = 0{,}4$ m/s, conduce objetos pequeños hasta la rampa de 2 m de longitud. Si la banda transportadora B tiene una celeridad $v_2 = 0{,}9$ m/s y los objetos llegan a ella sin resbalar, calcular el coeficiente de rozamiento μ_c entre los objetos y la rampa.

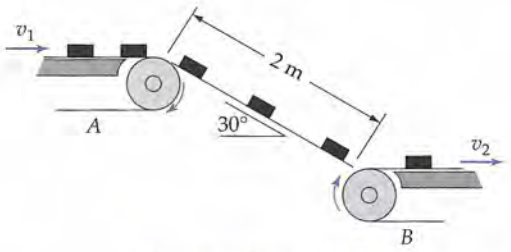


Figura problema 3.14

3.15 Se observa que el bloque de la figura lleva una velocidad $v_1 = 20$ m/s al pasar por el punto A y una velocidad $v_2 = 10$ m/s al pasar por el punto B del plano inclinado. Calcular el coeficiente de rozamiento cinético μ_c entre el bloque y el plano si $x = 75$ m y $\theta = 15°$.

Resp. $\mu_c = 0{,}479$

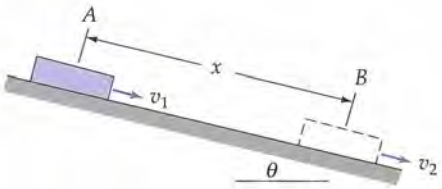


Figura problema 3.15

3.16 Un motor de iones de cesio para la propulsión en el espacio interestelar se ha diseñado para producir un empuje constante de 2,5 N durante largos períodos de tiempo. Si el motor está impulsando una nave espacial en una misión interplanetaria, calcular el tiempo t necesario para que la velocidad aumente de 40 000 km/h a 65 000 km/h. Hallar también la distancia s recorrida durante ese intervalo de tiempo. Supóngase que la nave se está moviendo en una región lejana del espacio donde el empuje de su motor iónico es la única fuerza que actúa sobre ella en la dirección de su movimiento.

http://gratislibrospdf.com/

3.17 Durante un ensayo de fiabilidad, una tarjeta de circuito impreso de masa m se sujeta a una vibradora electromagnética y se somete a un movimiento armónico $x = X \text{ sen } \omega t$, donde X es la amplitud del movimiento, ω es la pulsación en radianes por segundo y t es el tiempo. Hallar el módulo F_{max} de la fuerza horizontal máxima que la máquina ejerce sobre la tarjeta.

Resp. $F_{max} = mX\omega^2$

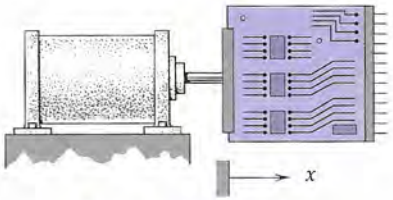


Figura problema 3.17

3.18 El punto O es el eje de giro de un péndulo simple que oscila libremente en el plano vertical de la placa. Si ésta recibe una aceleración constante a dirigida plano inclinado θ arriba, escribir la expresión del ángulo constante β que adopta el péndulo tras el cese de las oscilaciones que siguen al arranque. Despreciar la masa del brazo del péndulo.

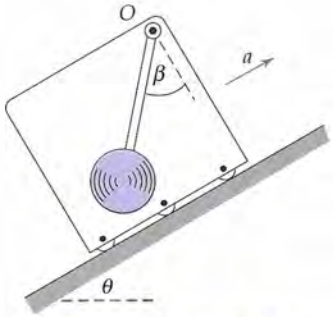


Figura problema 3.18

3.19 Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el bloque A de 20 kg y el carretón B de 100 kg son prácticamente iguales a 0,50, hallar la aceleración de cada parte para (*a*) $P = 60$ N y (*b*) $P = 40$ N.

Resp. (*a*) $a_A = 1{,}095 \text{ m/s}^2$, $a_B = 0{,}981 \text{ m/s}^2$

(*b*) $a_A = a_B = 0{,}667 \text{ m/s}^2$

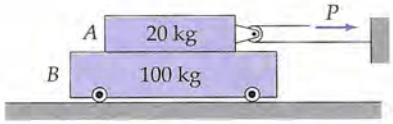


Figura problema 3.19

3.20 Hallar la aceleración de cada cilindro y la tracción que sufre el cable superior cuando el sistema se libera desde el reposo. Despreciar el rozamiento y las masas de las poleas.

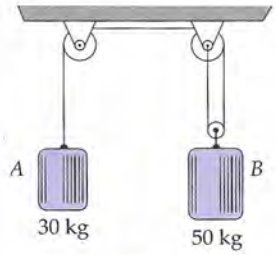


Figura problema 3.20

3.21 Se repite aquí la ilustración del problema 2.209 a la que se añade información acerca de las masas. Despreciar todos los rozamientos y las masas de las poleas y hallar las aceleraciones de los cuerpos A y B cuando se abandonan desde el reposo.

Resp. $a_A = 1{,}204 \text{ m/s}^2$ plano abajo

$a_B = 0{,}682 \text{ m/s}^2$ hacia arriba

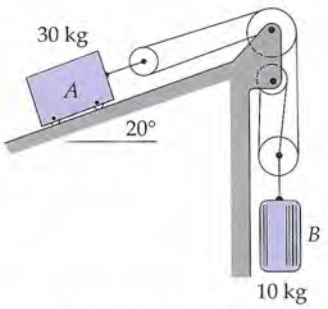


Figura problema 3.21

3.22 El sistema se abandona desde el reposo con el cable tenso. Despreciando la pequeña masa de la polea y el rozamiento en ella, calcular la aceleración de cada cuerpo y la tracción T en el cable en el instante inicial si (*a*) $\mu_e = 0{,}25$ y $\mu_c = 0{,}20$ y (*b*) $\mu_e = 0{,}15$ y $\mu_c = 0{,}10$.

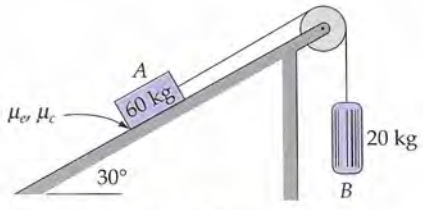


Figura problema 3.22

http://gratislibrospdf.com/

3.23 El aparejo del problema 3.22 se modifica como se muestra. Para unos coeficientes de rozamiento $\mu_e = 0{,}25$ y $\mu_c = 0{,}20$, calcular la aceleración de cada cuerpo y la tracción T en el cable.

Resp. $a_A = 1{,}450\ \text{m/s}^2$ hacia abajo

$a_B = 0{,}725\ \text{m/s}^2$ hacia arriba

$T = 105{,}4\ \text{N}$

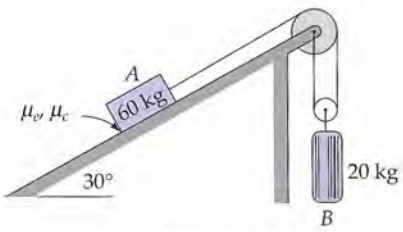


Figura problema 3.23

3.24 El mecanismo de la figura es un acelerómetro y se compone de un émbolo A de 100 g que deforma el resorte cuando la carcasa recibe una aceleración ascendente a. Expresar qué constante recuperadora necesita el resorte para que el émbolo lo acorte 6 mm desde la posición de equilibrio y toque el contacto eléctrico cuando la aceleración que aumenta lenta y constantemente alcance el valor de $5g$. Puede despreciarse el rozamiento.

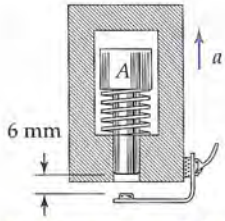


Figura problema 3.24

3.25 Un cilindro de masa m descansa sobre un carrito base tal como se representa. Si $\beta = 45°$ y $\theta = 30°$, calcular la aceleración pendiente arriba máxima a que puede comunicarse al carrito sin que el cilindro pierda contacto en B.

Resp. $a = 0{,}366g$

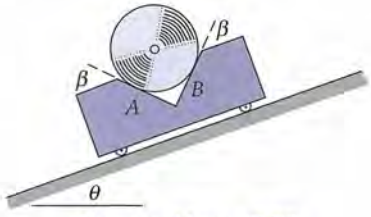


Figura problema 3.25

3.26 La aceleración del carro A de 50 kg en sus guías lisas verticales está controlada por la tracción T que se ejerce en el cable de accionamiento que pasa por las dos espigas fijas al carro. Hallar el valor de T necesario para que la aceleración descendente del carro no rebase los $1{,}2\ \text{m/s}^2$ si es 0,20 el coeficiente de rozamiento entre el cable y las espigas. (Recuérdese que la relación que guardan las tracciones que sufre un cable flexible al deslizarse por una superficie cilíndrica es $T_2 = T_1 e^{\mu\beta}$.)

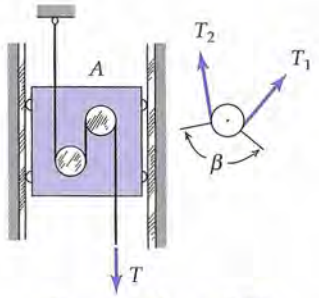


Figura problema 3.26

3.27 Un jugador de béisbol lanza horizontalmente una pelota hacia un radar manual sensible a la velocidad. La pelota tiene una masa de 0,146 kg y un perímetro de 230 mm. Si en $x = 0$ la celeridad es $v_0 = 140$ km/h, calcular la celeridad en función del tiempo. Se supondrá que la resistencia horizontal aerodinámica al movimiento de la pelota es $D = C_D(\frac{1}{2}\rho v^2)S$, donde C_D es el coeficiente de retardo, ρ es la densidad del aire, v es la celeridad y S es la superficie de la sección frontal de la pelota. Para C_D tómese un valor de 0,4. Puede despreciarse la componente y del movimiento pero justificando la validez de esta hipótesis. Particularizar el resultado para $x = 18$ m, que es la distancia aproximada entre la mano del lanzador y el puesto meta.

Resp. $v = v_0 e^{(-0{,}5C_D\rho Sx/m)} = v_0 e^{-5{,}22(10^{-3})x}$

$v_{18} = 127{,}5\ \text{km/h}$

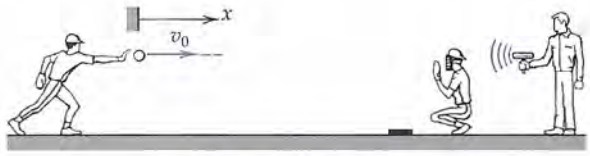


Figura problema 3.27

3.28 La resistencia total R al movimiento horizontal de un cohete experimental que se mueve sobre carriles se representa mediante la línea continua del gráfico. Aproximar R mediante la línea de trazos y determinar la distancia x que el cohete debe recorrer en los raíles desde su estado de reposo hasta alcanzar una velocidad de 400 m/s. El empuje T de los motores del co-

http://gratislibrospdf.com/

hete es prácticamente constante y vale 300 kN, y el peso total del cohete permanece, también, prácticamente constante y vale 2 Mg.

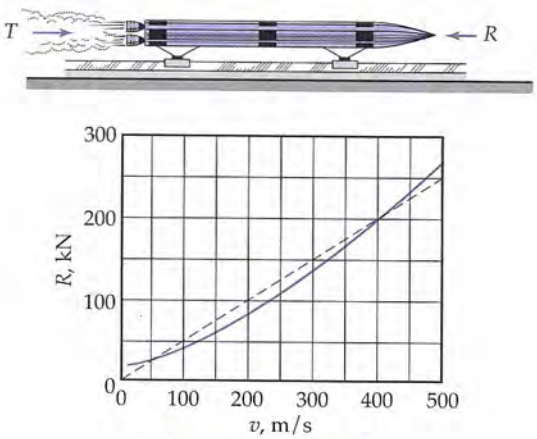


Figura problema 3.28

3.29 La velocidad de contacto de un reactor de masa 5 Mg es de 300 km/h, instante en que se despliega el paracaídas de frenado y se cortan motores. Si la resistencia total sobre el avión varía con la velocidad tal como muestra el gráfico, calcular la distancia de pista x que recorre el avión hasta que su velocidad se reduce a 150 km/h. La variación de la resistencia puede aproximarse mediante la expresión $D = kv^2$, donde k es una constante.

Resp. $x = 201$ m

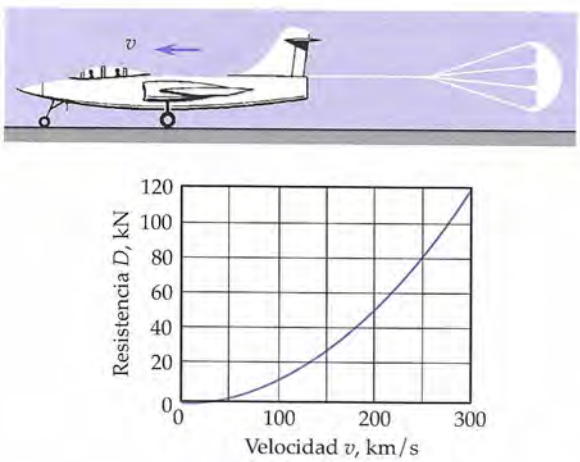


Figura problema 3.29

3.30 En un ensayo para determinar las características al aplastamiento de un relleno de poliestireno para embalajes, se deja caer un cono de acero de masa m desde una altura h que penetre en el material. La resistencia R de éste a la penetración depende de la sección transversal frontal del objeto penetrante, y por ello es proporcional al cuadrado de la distancia x penetrada por el cono, o sea, $R = -kx^2$. Si el cono se detiene a una distancia $x = d$, hallar la constante k en función de las condiciones y resultados del ensayo.

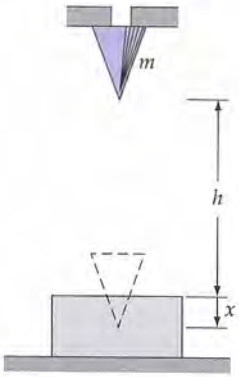


Figura problema 3.30

3.31 El collarín de 1,8 kg se deja caer desde el reposo sobre el resorte elástico sin masa, cuya constante recuperadora es 1750 N/m y que está comprimido una distancia de 150 mm. Hallar la aceleración a del collarín como función del desplazamiento vertical x del mismo medido en metros desde el punto de suelta. Determinar la velocidad v del collarín cuando $x = 0{,}15$ m. El rozamiento es despreciable.

Resp. $a_x = 136{,}0 - 972x$, $v = 4{,}35$ m/s

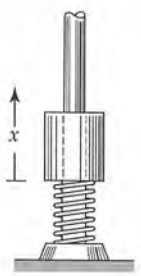


Figura problema 3.31

3.32 Una fuerza constante P arrastra una cadena pesada de masa ρ por unidad de longitud por una superficie horizontal compuesta de una zona lisa y una zona rugosa. Si al comienzo la cadena descansa sobre la superficie lisa, siendo $x = 0$ y μ_c el coeficiente de rozamiento cinético entre la cadena y la superficie rugosa, determinar la velocidad v de la cadena para $x = L$. Supóngase que la cadena permanece tirante y que por ello se

http://gratislibrospdf.com/

mueve toda a la vez durante el movimiento. ¿Cuál será el valor mínimo de P para que la cadena permanezca tirante? (*Indicación*: La aceleración no debe hacerse negativa.)

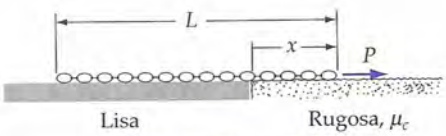


Figura problema 3.32

3.33 Una cadena de longitud $2l$ y masa ρ por unidad de longitud cuelga del modo representado. Si al extremo B se le da un leve desplazamiento hacia abajo, el desequilibrio genera una aceleración. Hallar la aceleración de la cadena en función del desplazamiento hacia arriba x del extremo A y determinar la velocidad v del extremo A cuando llega arriba. Despreciar la masa y el diámetro de la polea.

Resp. $a = \frac{x}{l}g$, $v = \sqrt{gl}$

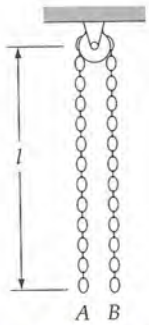


Figura problema 3.33

3.34 Una barra de longitud l y masa despreciable enlaza el carrito de masa M y la partícula de masa m. Si el carrito está animado de una aceleración uniforme a hacia la derecha, ¿qué ángulo θ con la vertical forma la barra libremente oscilante cuando ésta alcanza la posición estacionaria? Hallar la fuerza neta P (no representada) a aplicar al carrito para que éste adquiera la aceleración especificada.

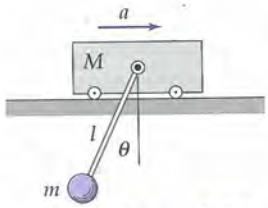


Figura problema 3.34

3.35 Al carro inicialmente en reposo se aplica una fuerza P. Hallar la velocidad y el desplazamiento en el instante $t = 5$ s para cada una de las evoluciones P_1 y P_2 de la fuerza. Despreciar el rozamiento.

Resp. Para P_1: $v = 12{,}5$ m/s, $s = 20{,}8$ m
Para P_2: $v = 8{,}33$ m/s, $s = 10{,}42$ m

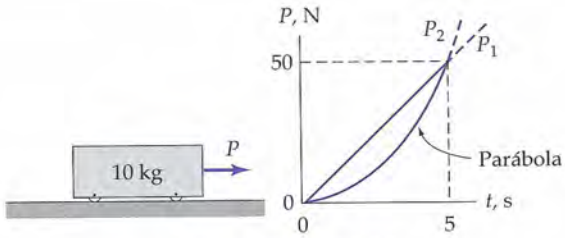


Figura problema 3.35

3.36 Hallar las aceleraciones de los cuerpos A y B y la tracción en el cable a consecuencia de la aplicación de la fuerza de 250 N. Despreciar todos los rozamientos y las masas de las poleas.

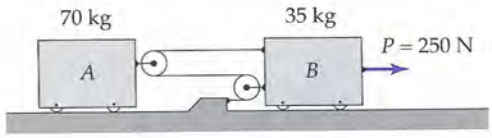


Figura problema 3.36

3.37 Para ensayar la resistencia al movimiento de un baño de aceite, se suelta una pequeña bola de acero de masa m desde el reposo en la superficie ($y = 0$). Si la resistencia al movimiento está dada por $R = kv$, donde k es constante, deducir una expresión para la profundidad h necesaria para que la bola adquiera una velocidad v.

Resp. $h = \frac{m^2 g}{k^2} \ln\left(\frac{1}{1 - kv/(mg)}\right) - \frac{mv}{k}$

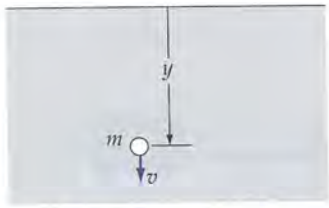


Figura problema 3.37

http://gratislibrospdf.com/

3.38 Si la bola de acero del problema 3.37 se abandona desde el reposo en la superficie de un líquido en cuyo seno la resistencia al movimiento es $R = cv^2$, donde c es una constante y v es la velocidad de descenso de la bola, determinar la profundidad h necesaria para que la bola adquiera una velocidad v.

3.39 Se representan dos montajes diferentes del dispositivo de elevación de un ascensor. El ascensor A con el motor y el tambor instalados en él posee una masa total de 900 kg. El ascensor B con el tambor, pero sin motor instalado, posee también una masa de 900 kg. Si en ambos casos el motor aplica un par constante de 600 m· N, durante 2 s, a su tambor de 250 mm de diámetro, elegir el montaje que produzca la mayor aceleración ascendente y hallar la correspondiente velocidad v del ascensor a los 1,2 s de la partida desde el reposo. La masa del tambor del motor es pequeña y puede analizarse como si estuviera en equilibrio. Despreciar las masas de cables y poleas y todos los rozamientos.

Resp. La mayor aceleración la da el montaje (*a*) v = 7,43 m/s

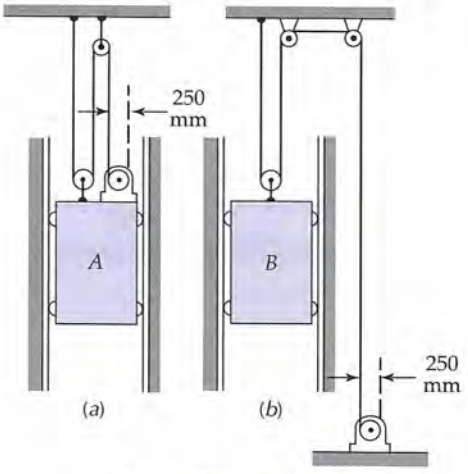


Figura problema 3.39

3.40 El resorte de constante $k = 200$ N/m está sujeto al soporte y al cilindro de 2 kg que se desliza libremente por la guía horizontal. Si en el instante $t = 0$, en que el resorte no está deformado y el sistema está en reposo, se aplica al cilindro una fuerza constante de 10 N, hallar la velocidad del cilindro cuando $x = 40$ mm y el máximo desplazamiento del mismo.

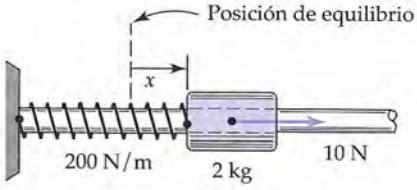


Figura problema 3.40

3.41 Un amortiguador es un mecanismo que ofrece una resistencia a la compresión o a la tracción dada por $R = cv$, donde c es una constante y v es la variación de longitud del amortiguador por unidad de tiempo. Se representa el ensayo de un amortiguador de constante $c = 3000$ N· s/m con un cilindro de 100 kg suspendido de él. El sistema se suelta con el cable tirante en el punto $y = 0$ y se deja que se alargue. Hallar (*a*) la velocidad uniforme v_s del extremo inferior del amortiguador y (*b*) el instante t y el desplazamiento y del extremo inferior cuando el cilindro alcanza el 90% de su velocidad uniforme. Despreciar las masas del pistón y su biela.

Resp. (*a*) $v_s = 0{,}327$ m/s
(*b*) $t = 0{,}0768$ s, y = 15,29 mm

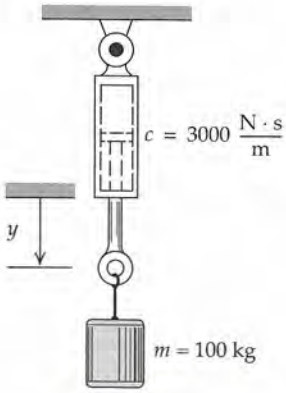


Figura problema 3.41

3.42 Las correderas A y B están conectadas mediante una barra rígida liviana de longitud $l = 0{,}5$ m y se mueven sin rozamiento por las guías horizontales. Para la posición $x_A = 0{,}4$ m, la velocidad de A es $v_A = 0{,}9$ m/s hacia la derecha. Hallar la aceleración de cada corredera y la fuerza que sufre la barra en ese instante.

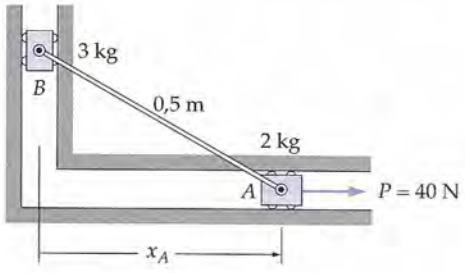


Figura problema 3.42

http://gratislibrospdf.com/

3.43 Las correderas A y B están conectadas mediante una barra rígida liviana y se mueven sin rozamiento por las ranuras, las cuales se hallan ambas en el plano vertical. En la posición ilustrada, la velocidad de A es 0,4 m/s hacia la derecha. Hallar la aceleración de cada corredera y la fuerza sobre la barra en ese instante.

Resp. $a_A = 7{,}95\ \text{m/s}^2$ (hacia la derecha),
$a_B = 8{,}04\ \text{m/s}^2$ (hacia abajo)
$T = 25{,}0\ \text{N}$

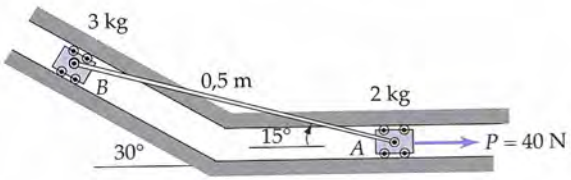


Figura problema 3.43

3.44 ¿Para qué valor(es) del ángulo θ tendrá el bloque de 35 kg una aceleración de 9 m/s^2 hacia la derecha?

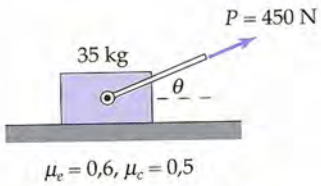


Figura problema 3.44

3.45 Calcular la aceleración del bloque A en el instante representado. Despreciar la masa de la polea.

Resp. $a_x = 1{,}406\ \text{m/s}^2$

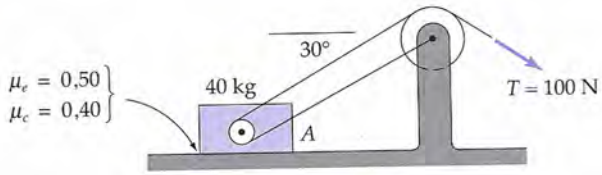


Figura problema 3.45

3.46 Con los bloques inicialmente en reposo, la fuerza P aumenta lentamente desde cero hasta 260 N. Representar gráficamente, en función de P, las aceleraciones de ambas masas.

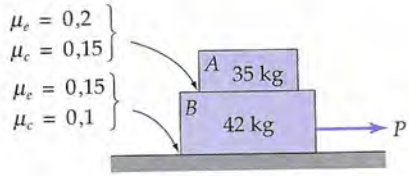


Figura problema 3.46

3.47 El sistema se abandona desde el reposo en la posición representada. Calcular la tensión T de la cuerda y la aceleración a del bloque de 30 kg. Se desprecian la masa de la pequeña polea sujeta al bloque y el rozamiento en la misma. (*Sugerencia*: Empezar estableciendo la relación cinemática entre las aceleraciones de los dos cuerpos.)

Resp. $T = 138{,}0\ \text{N}$, $a = 0{,}766\ \text{m/s}^2$

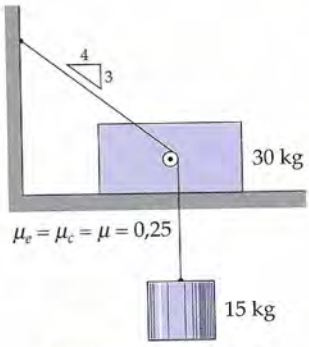


Figura problema 3.47

3.48 Dos esferas de hierro, ambas de 100 mm de diámetro, se abandonan desde el reposo con una separación entre centros de 1 m. Supóngase que se encuentran en un lugar del espacio donde no hay otra fuerza que la atracción gravitatoria mutua y calcular el tiempo t necesario para que las esferas entren en contacto entre sí y la celeridad absoluta v de cada una al tocarse.

Resp. $t = 13\ \text{h}\ 33\ \text{min}$
$v = 4{,}76(10^{-5})\ \text{m/s}$

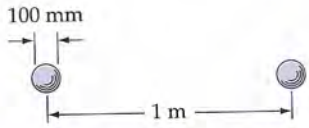


Figura problema 3.48

http://gratislibrospdf.com/

3.5 MOVIMIENTO CURVILÍNEO

Volvamos ahora nuestra atención a la cinética de los puntos materiales que describen trayectorias curvilíneas planas. Al aplicar la segunda ley de Newton, representada por la ecuación 3.3, haremos uso de las tres expresiones de la aceleración en el movimiento curvilíneo que desarrollamos y utilizamos en los apartados 2.4, 2.5 y 2.6.

El sistema de coordenadas elegido depende de las condiciones del problema y constituye un decisión fundamental al resolver un problema de movimiento curvilíneo. Escribamos ahora de nuevo la ecuación 3.3 de tres formas diferentes cuya elección depende de qué sistema de coordenadas sea el más adecuado.

Coordenadas rectangulares (apdo. 2.4, fig. 2.7)

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \tag{3.6}$$

donde $a_x = \ddot{x}$ y $a_y = \ddot{y}$

Coordenadas tangencial y normal (apdo. 2.5, fig. 2.10)

$$\Sigma F_n = ma_n \qquad \Sigma F_t = ma_t \tag{3.7}$$

donde

$$a_n = \rho\dot{\beta}^2 = v^2/\rho = v\dot{\beta}, \qquad a_t = \dot{v}, \qquad \text{y} \qquad v = \rho\dot{\beta}$$

Coordenadas polares (apdo. 2.6), fig. 2.15)

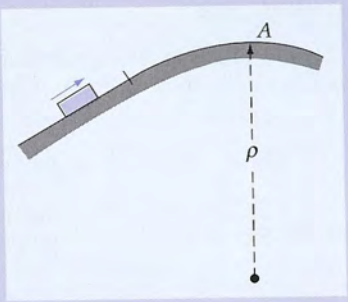
$$\Sigma F_r = ma_r \qquad \Sigma F_\theta = ma_\theta \tag{3.8}$$

donde $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ y $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

Al aplicar las anteriores ecuaciones de movimiento, deberá seguirse el procedimiento general establecido en el apartado anterior para el movimiento rectilíneo. Así pues, una vez identificado el tipo de movimiento y elegido el sistema de coordenadas, deberá dibujarse el diagrama para sólido libre del cuerpo considerado como punto material. A continuación, se obtendrán de la manera habitual las sumas de las componentes de las fuerzas apropiadas. El diagrama para sólido libre deberá ser completo para que no se produzcan errores al calcular las sumas de las componentes de las fuerzas. Particularmente, se pondrá cuidado en que el sentido asignado a una suma de componentes de las fuerzas sea concordante con el sentido correspondiente del término de la aceleración. Así, en la primera de las ecuaciones 3.7, por ejemplo, el sentido positivo del eje *n* se toma *hacia* el centro de curvatura, y entonces el sentido positivo de la suma de componentes ΣF_n debe tomarse también *hacia* el centro de curvatura para que concuerde con el sentido positivo de la aceleración $a_n = v^2/\rho$.

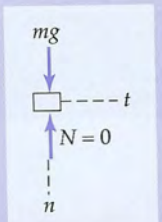
http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMA TIPO 3.6



Hallar la celeridad máxima v que puede tener el bloque deslizante sin que pierda contacto con la superficie al pasar por el punto A.

Solución. La condición para que se pierda el contacto es que se anule la fuerza normal N que la superficie ejerce sobre el bloque. Sumando fuerzas en la dirección normal positiva resulta

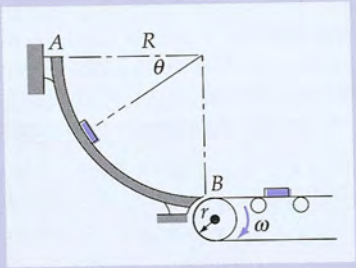


$$[\Sigma F_n = ma_n] \qquad mg = m\frac{v^2}{\rho} \qquad v = \sqrt{g\rho} \qquad \textit{Resp.}$$

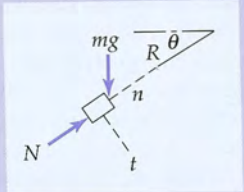
Si en A la celeridad es menor que $\sqrt{g\rho}$, existirá una fuerza hacia arriba que la superficie ejerce sobre el bloque. Para que éste pueda pasar por A con una celeridad mayor que $\sqrt{g\rho}$ la ligadura debe ser bilateral, es decir, debe existir una segunda superficie curva por encima del bloque que produzca una reacción normal hacia abajo.

PROBLEMA TIPO 3.7

Se abandonan libremente en A, partiendo del reposo, objetos pequeños que caen deslizándose por la superficie lisa circular de radio R hasta una correa sin fin B. Determinar en función de θ la expresión de la fuerza normal de contacto N que se ejerce entre la guía y cada objeto y especificar la velocidad angular ω que ha de tener la polea de radio r de la correa sin fin para evitar cualquier deslizamiento sobre la correa al ser transferidos a ésta los objetos.



Solución. En la figura puede verse el diagrama para sólido libre del objeto junto con las direcciones coordenadas n y t. La fuerza normal N depende de la componente normal n de la aceleración la cual, a su vez, depende de la velocidad. Esta será acumulativa en virtud de la aceleración tangencial. Luego, en primer lugar, buscaremos a_t para una posición genérica cualquiera



$$[\Sigma F_t = ma_t] \qquad mg\cos\theta = ma_t \qquad a_t = g\cos\theta$$

http://gratislibrospdf.com/

① Aquí es esencial que comprendamos la necesidad de expresar la aceleración tangencial como función de la posición para que v pueda hallarse integrando la relación cinemática $v\,dv = a_t\,ds$, en la que todas las cantidades se miden a lo largo de la trayectoria.

① Integrando, ahora podemos hallar la velocidad

$$[v\,dv = a_t\,ds] \qquad \int_0^v v\,dv = \int_0^\theta g\cos\theta\,d(R\theta) \qquad v^2 = 2gR\,\text{sen}\,\theta$$

La fuerza normal la obtenemos sumando las fuerzas en la dirección n positiva, que es la dirección de la componente normal de la aceleración.

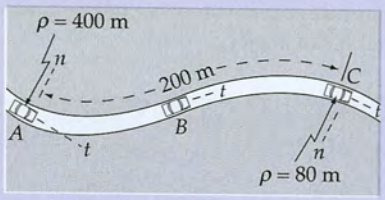
$$[\Sigma F_n = ma_n] \qquad N - mg\,\text{sen}\,\theta = m\frac{v^2}{R} \qquad N = 3mg\,\text{sen}\,\theta \qquad \textit{Resp.}$$

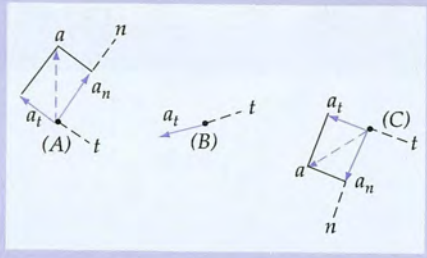
La polea debe girar a la velocidad $v = r\omega$ para $\theta = \pi/2$, por lo que

$$\omega = \sqrt{2gR}/r \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 3.8

Un automóvil de 1500 kg entra en un tramo curvo de una carretera horizontal y disminuye la marcha uniformemente desde una celeridad de 100 km/h en A hasta 50 km/h al pasar por C. El radio de curvatura de la carretera es de 400 m en A y de 80 m en C. Determinar la fuerza total que ejerce la calzada sobre las ruedas en las posiciones A, B y C. El punto B es el de inflexión donde la curvatura cambia de sentido.





Solución. El automóvil vamos a tratarlo como a una partícula, por lo que el efecto de todas las fuerzas que la calzada ejerce sobre las cubiertas lo asimilaremos a una única fuerza. Como el movimiento es en la dirección de la carretera, la aceleración del vehículo la especificaremos empleando las coordenadas tangencial y normal.

La aceleración tangencial constante tiene la dirección t negativa y su módulo es

① $$[v_C^2 = v_A^2 + 2a_t\Delta_s] \qquad a_t = \left|\frac{(50/3{,}6)^2 - (100/3{,}6)^2}{2(200)}\right| = 1{,}45\ \text{m/s}^2$$

Las componentes normales de la aceleración en A, B y C son

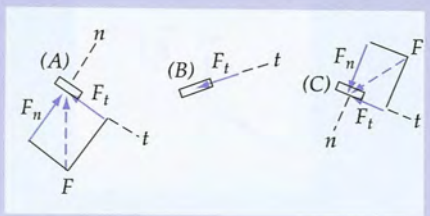
② $$[a_n = v^2/\rho] \qquad \text{en } A, \quad a_n = \frac{(100/3{,}6)^2}{400} = 1{,}93\ \text{m/s}^2$$

$$\text{en } B, \quad a_n = 0$$

$$\text{en } C, \quad a_n = \frac{(50/3{,}6)^2}{80} = 2{,}41\ \text{m/s}^2$$

① Véase que el valor numérico del coeficiente de conversión para pasar de km/h a m/s es 1000/3600, o sea 1/3,6.

② Obsérvese que a_n está siempre dirigida hacia el centro de curvatura.



http://gratislibrospdf.com/

Aplicando la segunda ley de Newton en las direcciones n y t del diagrama para sólido libre del automóvil resulta

$$[\Sigma F_t = ma_t] \qquad F_n = 1500(1{,}45) = 2170 \text{ N}$$

$$[\Sigma F_n = ma_n] \quad \text{en } A, \quad F_n = 1500(1{,}93) = 2894 \text{ N}$$

$$\text{en } B, \quad F_n = 0$$

$$\text{en } C, \quad F_n = 1500(2{,}41) = 3617\text{N}$$

③ Obsérvese que el sentido de F_n debe coincidir con el de a_n.

Así pues, la fuerza horizontal que actúa sobre las ruedas

$$\text{en } A, \quad F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \sqrt{(2894)^2 + (2170)^2} = 3617 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

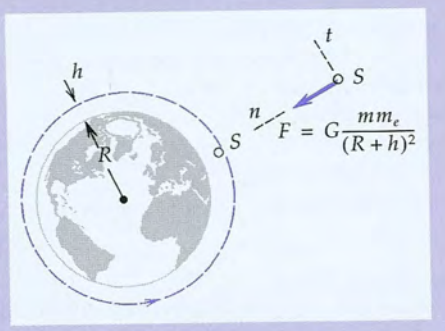
$$\text{en } B, \quad F = F_t = 2170 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\text{en } C, \quad F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \sqrt{(3617)^2 + (2170)^2} = 4218 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

④ Si se desea, puede calcularse el ángulo formado por a y F con la dirección de la carretera.

PROBLEMA TIPO 3.9

Calcular el módulo v de la velocidad necesaria para que la nave espacial S se mantenga en una órbita circular a una altura de 320 kilómetros sobre la superficie terrestre.



Solución. Tal como se muestra en el diagrama para sólido libre, la única fuerza externa actuante sobre la nave espacial es la atracción gravitatoria de la Tierra (el peso). Sumando fuerzas en la dirección normal tenemos

$$[\Sigma F_n = ma_n] \qquad G\frac{mm_e}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{(R+h)}, \qquad v = \sqrt{\frac{Gm_e}{(R+h)}} = R\sqrt{\frac{g}{(R+h)}}$$

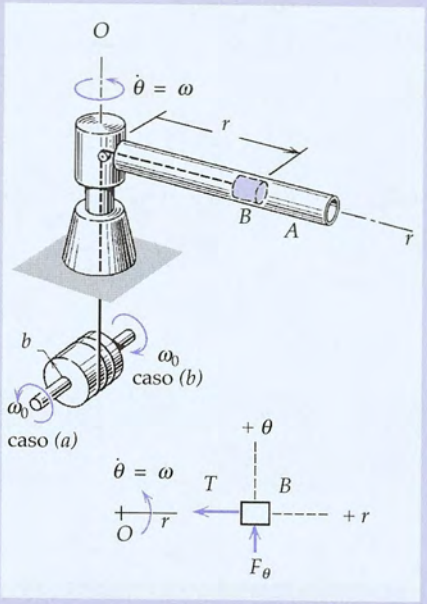
donde se ha substituido Gm_e por gR^2. Introduciendo los valores numéricos tenemos

$$v = (6371)(1000)\sqrt{\frac{9{,}825}{(6371+320)(1000)}} = 7720 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

① Adviértase que, para las observaciones que se hagan en un sistema de referencia inercial, no existen magnitudes como la "fuerza centrífuga" actuante en la semidirección n negativa. Además, ni la nave ni sus ocupantes son "ingrávidos", porque el peso de cada uno lo dicta la ley de la Gravitación Universal de Newton. A esa altura, los pesos son del orden un 10% menores que en la superficie de la Tierra. Finalmente, la expresión "cero-g" es asimismo engañosa. Sólo es haciendo las observaciones respecto a un sistema de coordenadas que tenga una aceleración igual a la gravitatoria (como una nave espacial en órbita) cuando nos parece estar en una región de "cero-g". Pero la magnitud que se anula a bordo de una nave espacial en órbita no es sino la ya conocida fuerza normal asociada, por ejemplo, a un objeto que esté en contacto con una superficie horizontal dentro de la nave.

http://gratislibrospdf.com/

El tubo A gira en torno al eje vertical O a una velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega$ y contiene un pequeño émbolo cilíndrico B de masa m, cuya posición radial está mandada por la cuerda que atraviesa libremente el tubo y el eje y está arrollada al tambor de radio b. Determinar la tensión T en la cuerda y la componente horizontal F_θ de la fuerza ejercida por el tubo sobre el émbolo si la velocidad angular del tambor es ω_0, cuyo sentido es primero el correspondiente al caso (a) y luego el correspondiente al caso (b). Despreciar los rozamientos.



Solución. Siendo r variable, utilizaremos la expresión en coordenadas polares de la ecuación del movimiento (ecs. 3.8). El diagrama para sólido libre de B que se representa en vista horizontal, sólo revela a T y a F_θ. Las ecuaciones del movimiento son

$$[\Sigma F_r = ma_r] \qquad -T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$[\Sigma F_\theta = ma_\theta] \qquad F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

Caso (a). Con $\dot{r} = +b\omega_0, \ddot{r} = 0$ y $\ddot{\theta} = 0$, las fuerzas se hacen

$$T = mr\omega^2 \qquad F_\theta = 2mb\omega_0\omega \qquad \textit{Resp.}$$

① *Caso (b).* Con $\dot{r} = +b\omega_0, \ddot{r} = 0$ y $\ddot{\theta} = 0$, las fuerzas se hacen

$$T = mr\omega^2 \qquad F_\theta = -2mb\omega_0\omega \qquad \textit{Resp.}$$

① **El signo menos muestra que F_θ tiene el sentido opuesto al que se indica en el diagrama para sólido libre.**

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMAS

Problemas introductorios

3.49 El pequeño bloque A de 2 kg se desliza hacia abajo por la trayectoria curva y pasa por el punto más bajo B con una celeridad de 4 m/s. Si en este punto el radio de curvatura es de 1,5 m, hallar la fuerza normal N que en el mismo ejerce la trayectoria sobre el bloque. ¿Hacen falta datos acerca del rozamiento?

Resp. $N = 41{,}0$ N (hacia arriba), no

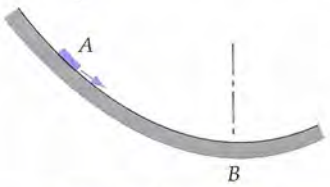


Figura problema 3.49

3.50 A la cuenta P de 1,5 kg se le comunica una celeridad inicial de 2 m/s en el punto A de la guía lisa, la cual es una curva plana horizontal. Si en el punto B la fuerza normal entre la cuenta y la guía tiene un módulo de 0,8 N, hallar el radio de curvatura ρ de la trayectoria en ese punto.

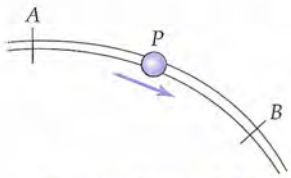


Figura problema 3.50

3.51 Si el bloque A de 2 kg pasa por la cima B del tramo circular de la trayectoria con una celeridad de 2 m/s, calcular el módulo N de la fuerza normal que la trayectoria ejerce sobre el bloque en el punto B. Hallar la máxima celeridad v que el bloque puede llevar en B sin perder contacto con la trayectoria.

Resp. $N = 9{,}62$ N, $v = 4{,}20$ m/s

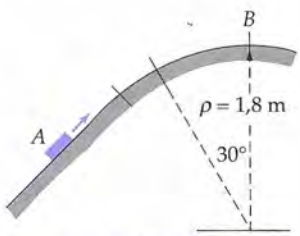


Figura problema 3.51

3.52 La prueba homologada para determinar la aceleración lateral máxima de un automóvil consiste en conducirlo siguiendo una circunferencia de 60 m de diámetro pintada sobre una superficie plana asfaltada. El conductor aumenta lentamente la celeridad del vehículo hasta que no le es posible mantener las dos parejas de ruedas a caballo de la línea. Si esta celeridad máxima vale 55 km/h para un automóvil de 1400 kg, hallar su capacidad de aceleración lateral a_n en g y calcular el módulo F de la fuerza de rozamiento total que ejerce la calzada sobre las cubiertas de los neumáticos.

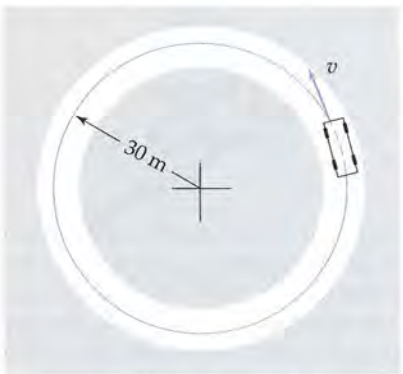


Figura problema 3.52

3.53 El automóvil del problema 3.52 viaja a 40 km/h cuando el conductor aplica los frenos y el vehículo prosigue moviéndose a lo largo de la trayectoria circular. ¿Cuál es la máxima desaceleración posible si las cubiertas admiten una fuerza de rozamiento máxima de 10,6 kN?

Resp. $a_t = -6{,}36$ m/s^2

3.54 Una corredera de 0,8 kg se lanza desde A hacia arriba por la barra fija situada en un plano vertical. Si se observa que la corredera lleva una celeridad de 4 m/s al pasar por B, hallar (*a*) el módulo N de la fuerza que la barra ejerce sobre ella y (*b*) la aceleración negativa que lleva. Despreciar el rozamiento.

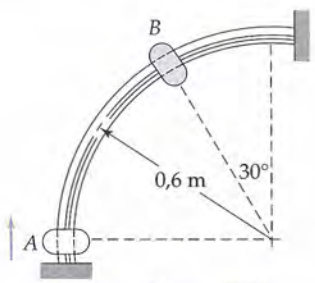


Figura problema 3.54

http://gratislibrospdf.com/

3.55 Las dos esferitas pueden moverse libremente por el interior de las cámaras esféricas rotativas de radio $R = 200$ mm. Si las esferitas se mantienen en un posición angular estacionaria $\beta = 45°$, hallar la velocidad angular Ω del mecanismo.

Resp. $\Omega = 3{,}64$ rad/s

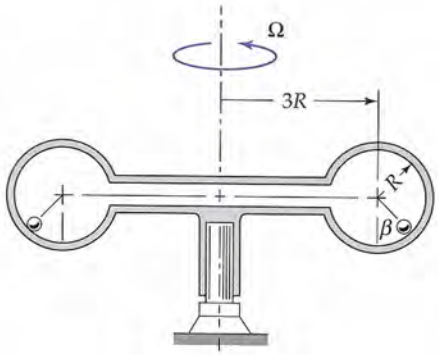


Figura problema 3.55

3.56 Un muchacho voltea una pequeña pelota de 50 g unida al extremo de un cuerda de 1 m de longitud, de tal modo que la pelota describe una circunferencia situada en un plano vertical tal como se representa. ¿Qué celeridad mínima debe llevar la pelota en la posición 1? Si esta celeridad se mantiene en toda la circunferencia, hallar la tracción que sufre la cuerda cuando la pelota está en la posición 2. No se tendrá en cuenta el movimiento de la mano del muchacho.

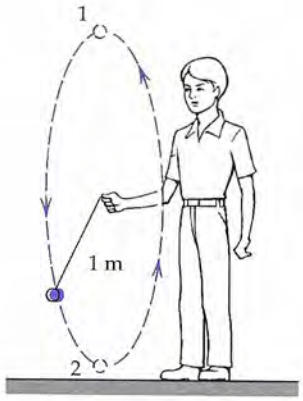


Figura problema 3.56

3.57 Con un celeridad constante de 600 km/h, un piloto describe con su avión una circunferencia vertical de radio 1000 m. Calcular la fuerza que sobre el piloto ejerce el asiento en el punto A y en el punto B.

Resp. $N_A = 3380$ N, $N_B = 1617$ N

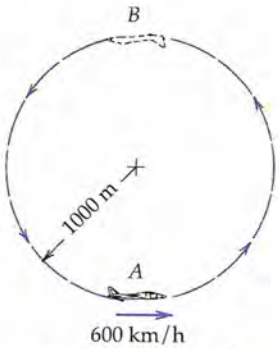


Figura problema 3.57

3.58 Un avión a reacción vuela siguiendo la trayectoria representada al objeto de que unos astronautas experimenten unas condiciones de "ingravidez" similares a las reinantes en un vehículo espacial en órbita. Si en el punto más alto la celeridad es de 900 km/h, ¿qué radio de curvatura ρ hace falta para simular exactamente la situación de "caída libre" orbital?

Figura problema 3.58

3.59 El miembro OA rota alrededor de un eje horizontal que pasa por O animado de una velocidad angular constante antihoraria $\omega = 3$ rad/s. Cuando pasa por la posición $\theta = 0$, se le coloca un pequeño bloque de masa m a una distancia radial $r = 450$ mm. Si se observa que el bloque resbala para $\theta = 50°$, hallar el coeficiente de rozamiento estático μ_e entre el bloque y el miembro.

Resp. $\mu_e = 0{,}549$

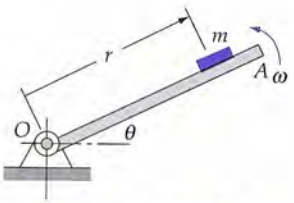


Figura problema 3.59

Problemas representativos

3.60 Hallar a qué altitud h (en kilómetros) por encima de la superficie terrestre un satélite artificial tendrá el mismo período que el de rotación absoluta de la Tierra, el cual es de 23,9344 h.

http://gratislibrospdf.com/

Si tal órbita se encuentra en el plano ecuatorial, se dice de ella que es geosíncrona porque el satélite parece no moverse con relación a un observador solidario de la Tierra.

3.61 Cuando el patinador pasa la curva indicada las celeridades de su centro de masa para $\theta = 0$, 45° y 90° son, respectivamente 8,5 m/s, 6 m/s y 0. Hallar la fuerza normal entre la superficie y las ruedas del patín si la masa conjunta del patinador y el patín es de 70 kg y el centro de masa se halla a 750 mm de la superficie.

Resp. $N_0 = 2040$ N, $N_{45°} = 1158$ N, $N_{90°} = 0$

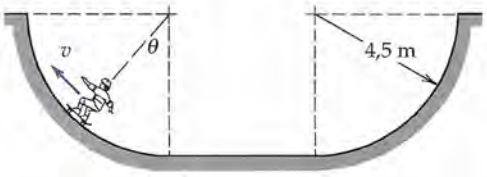


Figura problema 3.61

3.62 Un pequeño objeto A se mantiene contra la pared vertical del recinto cilíndrico giratorio de radio r merced a la fuerza centrífuga. Siendo μ_e el coeficiente de rozamiento estático entre el objeto y el recipiente, determinar la expresión de la velocidad de giro mínima $\dot{\theta} = \omega$ del recipiente para que el objeto no resbale por la pared vertical.

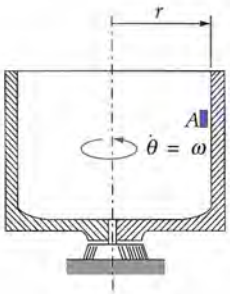


Figura problema 3.62

3.63 El avión de 30 Mg sube según el ángulo $\theta = 15°$ con un empuje en tobera T de 180 kN. En el instante representado, su celeridad es 300 km/h y aumenta a razón de 1,96 m/s^2. Además θ disminuye conforme el avión comienza a ponerse horizontal. Si en ese instante el radio de curvatura de la trayectoria es 20 km, calcular la sustentación L y la resistencia aerodinámica D. (La sustentación L y la resistencia aerodinámica D son las fuerzas aerodinámicas perpendicular y opuesta, respectivamente, a la dirección del vuelo.)

Resp. $D = 45{,}0$ kN, $L = 274$ kN

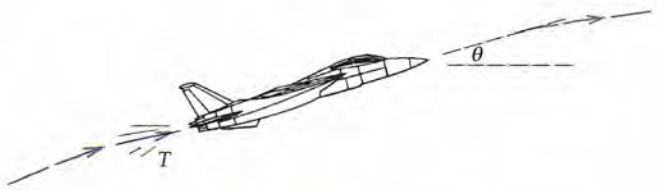


Figura problema 3.63

3.64 ¿Cuál debe ser el ángulo θ del peralte de la curva de 450 m de radio de la pista de carreras para que un bólido que corra a 200 km/h no tienda a derrapar lateralmente al tomar la curva?

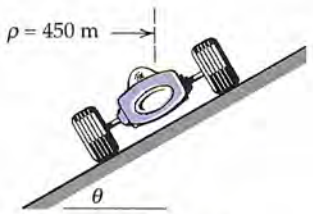


Figura problema 3.64

3.65 En A los carros de un artefacto de feria llevan una celeridad $v_A = 22$ m/s y en B de $v_B = 12$ m/s. Si uno de los pasajeros, de 75 kg de masa, está sentado en una balanza (que acusa la fuerza normal que se ejerce sobre ella), hallar las lecturas de la balanza cuando el carro pasa por los puntos A y B. Supóngase que ni las piernas ni los brazos de la persona soportan una fuerza apreciable.

Resp. $N_A = 1643$ N, $N_B = 198{,}5$ N

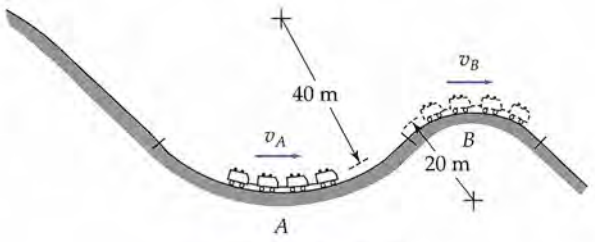


Figura problema 3.65

3.66 El brazo ranurado gira uniformemente en el plano horizontal alrededor de su centro a razón de $\dot{\theta} = 10$ rad/s y lleva una deslizadera montada sobre resortes de 1,5 kg que oscila libremente en la ranura. Si la deslizadera lleva una velocidad de 600 mm/s respecto a la ranura cuando pasa por el centro, determinar el empuje lateral horizontal P que ejerce el brazo ra-

http://gratislibrospdf.com/

nurado sobre la deslizadera en dicho instante. Determinar qué lado, A o B, de la ranura está en contacto con la deslizadera.

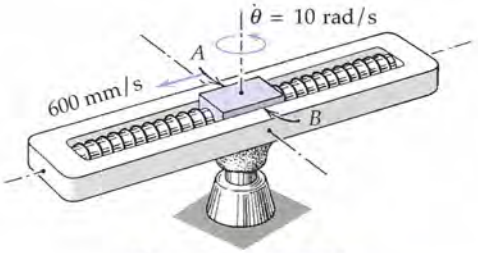


Figura problema 3.66

3.67 En el instante $t = 0$ la placa cuadrada se halla en reposo en la posición A y, a partir de ese momento, se traslada describiendo una circunferencia vertical según $\theta = 1{,}5t^2$, donde el recorrido angular θ está en radianes y el tiempo t está en segundos. Con un adhesivo se sujeta temporalmente a la placa un pequeño instrumento P de 0,4 kg. Hallar la fuerza cortante F que el adhesivo debe soportar en el instante $t = 3$ s.

Resp. $F = 45{,}6$ N

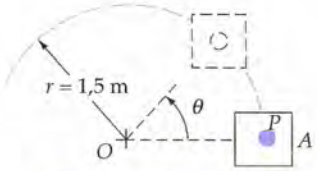


Figura problema 3.67

3.68 Calcular cuál debe ser la velocidad de rotación N del artefacto de feria para que los brazos de las góndolas adquieran un ángulo de 60° con la vertical. Despreciar las masas de los brazos a los que están sujetas las góndolas y tratar éstas como partículas.

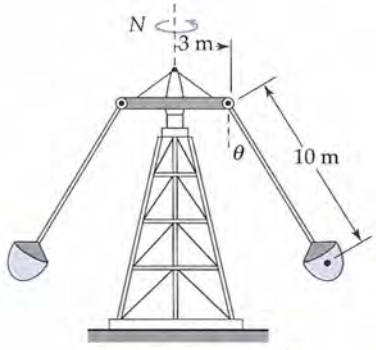


Figura problema 3.68

3.69 El brazo ranurado rota en el plano horizontal en torno al eje fijo vertical que pasa por el punto O. El cursor C de 2 kg es atraído hacia O, tirando de la cuerda S, a razón de 50 mm/s. En el instante en que $r = 225$ mm, el brazo lleva una velocidad angular antihoraria $\omega = 6$ rad/s y está desacelerándose a razón de 2 rad/s^2. Para ese instante, hallar la tracción T que sufre la cuerda y el módulo N de la fuerza que ejercen sobre el cursor los lados de la ranura radial lisa. Indicar qué lado de ésta, A o B, está en contacto con el cursor.

Resp. $T = 16{,}20$ N, $N = 2{,}10$ N, el lado B

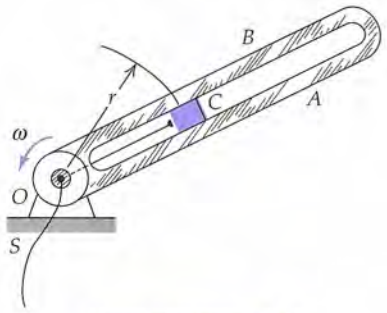


Figura problema 3.69

3.70 La esferita de masa m cuelga de los dos alambres incialmente en reposo. Si de repente se corta uno de los alambres, hallar el cociente k entre la tracción que sufre el otro alambre inmediatamente después del corte y la que sufría el mismo alambre en la situación de equilibrio inicial.

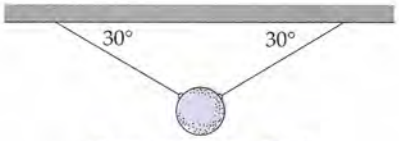


Figura problema 3.70

3.71 Se representa el tambor rotatorio de una secadora de ropa. Hallar la velocidad angular Ω para la cual la ropa y el tam-

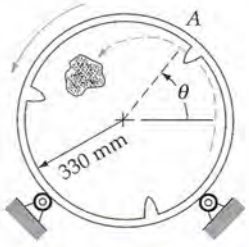


Figura problema 3.71

http://gratislibrospdf.com/

bor pierden contacto en $\theta = 50°$. Suponer que las pequeñas paletas impiden el resbalamiento hasta la pérdida de contacto.

Resp. $\Omega = 4{,}77$ rad/s

3.72 El artefacto de feria gira en torno al punto fijo O. Un mecanismo (no incluido en la ilustración) lo impulsa de acuerdo con $\theta = (\pi/3)$ sen $0{,}950t$, donde θ está en radianes y t está en segundos. Hallar la fuerza normal máxima N que ejerce el asiento sobre un viajero de masa m y decidir qué viajeros sufren la máxima fuerza.

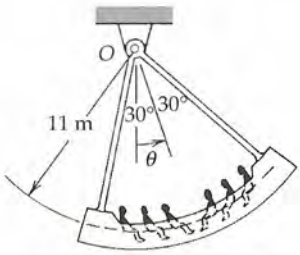


Figura problema 3.72

3.73 Se coloca un pequeño objeto dentro de la cazoleta cónica, en la posición que se indica. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el objeto y la superficie cónica es 0,30, ¿para qué velocidades de rotación en torno al eje vertical no se deslizará el objeto? Considérese que los cambios de celeridad se realizan tan lentamente que se pueda despreciar la aceleración angular.

Resp. $3{,}41 < \omega < 7{,}21$ rad/s

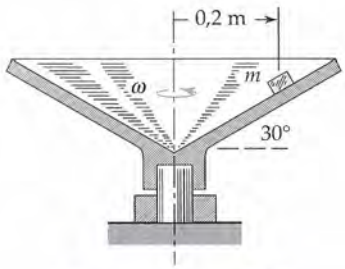


Figura problema 3.73

3.74 Se coloca un pequeño objeto de masa m en la superficie cónica rotatoria, en el radio que se indica. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el objeto y la superficie cónica es 0,80, calcular la velocidad angular máxima ω del cono alrededor del eje vertical de tal manera que el objeto no se deslice. Considérese que los cambios de velocidad angular son muy lentos.

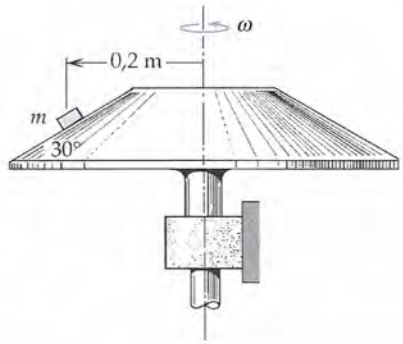


Figura problema 3.74

3.75 Un automóvil de 1500 kg entra por el punto A en la doble curva, con una celeridad de 96 km/h, con los frenos aplicados al efecto de reducir uniformemente la celeridad hasta los 72 km/h a lo largo de una distancia de 90 m medida entre los puntos A y B de la curva. El radio de curvatura de la trayectoria del automóvil es de 180 m en el punto B. Calcular la fuerza de rozamiento total que la calzada ejerce en B sobre las ruedas del automóvil, punto en el cual la carretera es horizontal.

Resp. $F = 4220$ N

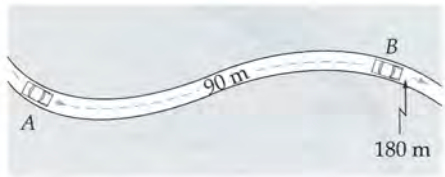


Figura problema 3.75

3.76 Se repite aquí, con más información, la ilustración del brazo robótico del problema 2.146. En un instante dado $\theta = 30°$, $\dot{\theta} = 40$ grd/s, $\ddot{\theta} = 120$ grd/s^2, $l = 0{,}5$ m, $\dot{l} = 0{,}4$ m/s y $\ddot{l} = -0{,}3$ m/s^2. Calcular las fuerzas radial y transversal F_r y F_θ que

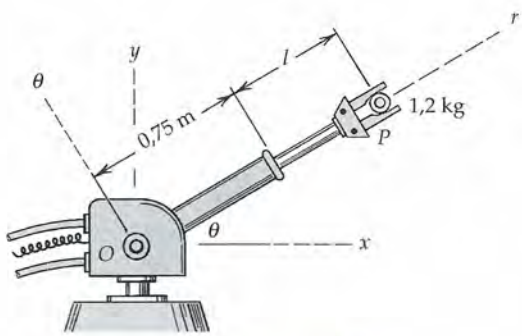


Figura problema 3.76

http://gratislibrospdf.com/

el brazo ejerce sobre la pieza asida P, cuya masa es de 1,2 kg. Comparar la solución con la correspondiente al caso de equilibrio estático en la misma posición.

3.77 El brazo de un robot mueve la esfera S de 2 kg en un plano vertical. Cuando el ángulo θ vale 30°, la velocidad angular del brazo en torno al eje vertical que pasa por O es de 50 grd/s, horaria, y su aceleración es de 200 grd/s^2, antihoraria. Además, el elemento hidráulico se acorta a la velocidad constante de 500 mm/s. Hallar la fuerza de agarre mínima necesaria P si el coeficiente de rozamiento estático entre la esfera y la superficies de agarre es de 0,5. Comparar P con la fuerza de agarre mínima P_e requerida para sujetar la esfera en equilibrio estático en la posición de 30°.

Resp. $P = 27{,}0$ N, $P_e = 19{,}62$ N

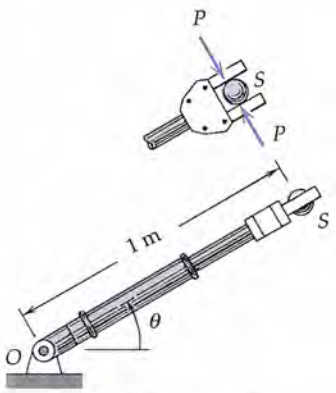


Figura problema 3.77

3.78 Un camión de plataforma abierta que viaja a 100 km/h circula por una curva de 300 m de radio peraltada hacia adentro con un ángulo de 10°. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el piso de la plataforma y la caja de 200 kg que transporta es 0,70, calcular la fuerza de rozamiento F que actúa sobre la caja.

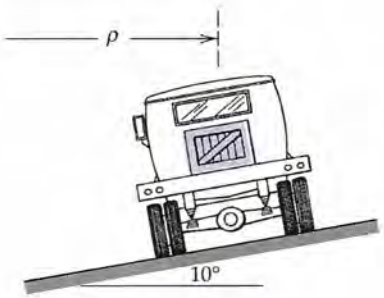


Figura problema 3.78

3.79 El camión de plataforma abierta del problema 3.78 parte del reposo en una carretera de radio de curvatura constante igual a 30 m y un peralte de 10°. Si la aceleración uniforme hacia adelante del vehículo es de 2 m/s^2, hallar el tiempo t que transcurre hasta que la caja empieza a resbalar por la plataforma. El coeficiente de rozamiento estático entre la caja y el piso es $\mu_e = 0{,}3$ y el camión se mueve en un plano horizontal.

Resp. $t = 5{,}58$ s

3.80 El collar A de 0,8 kg montado entre resortes oscila a lo largo de la barra horizontal que, a su vez, gira con una velocidad angular constante $\dot{\theta} = 6$ rad/s. En cierto instante, r aumenta a razón de 800 mm/s. Si entre el collar y la barra el coeficiente de rozamiento cinético vale 0,40, calcular la fuerza de rozamiento F que en ese instante ejerce la barra sobre el collar.

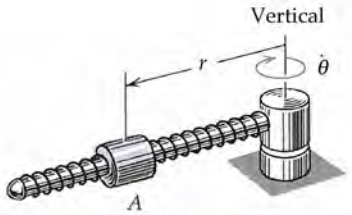


Figura problema 3.80

3.81 El tambor de 650 mm gira en torno a un eje horizontal con la velocidad angular constante $\Omega = 7{,}5$ rad/s. El pequeño bloque A no posee movimiento con relación al tambor cuando pasa por la posición $\theta = 0$. Hallar el coeficiente de rozamiento estático μ_e entre el bloque y el tambor si se observa que aquél resbala al llegar a (*a*) $\theta = 50°$ y (*b*) $\theta = 100°$. Comprobar que el contacto no se pierde hasta $\theta = 100°$.

Resp. (*a*) $\mu_e = 0{,}306$, (*b*) $\mu_e = 0{,}583$

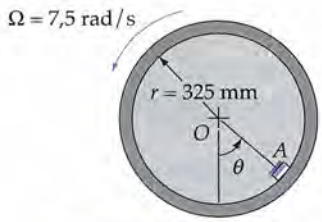


Figura problema 3.81

3.82 El cursor de 2 kg ajusta holgadamente en la ranura lisa del disco que gira en torno a un eje vertical que pasa por O. El cursor puede moverse levemente por la ranura antes de que uno de los alambres se tense. Si el disco gira partiendo del re-

http://gratislibrospdf.com/

poso en el instante $t = 0$ animado de una aceleración angular horaria constante de 0,5 rad/s^2, representar gráficamente en función del tiempo t, en el intervalo $0 \le t \le 5$s, las tensiones en los alambres 1 y 2 y el módulo N de la fuerza normal a la ranura.

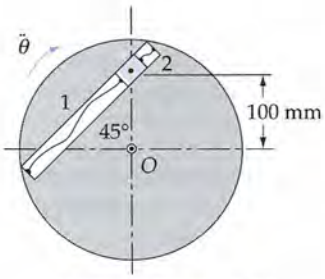


Figura problema 3.82

3.83 El cohete se mueve en un plano vertical y se le da un impulso mediante un empuje T de 32 kN. Además se encuentra sometido a una resistencia atmosférica R de 9,6 kN. Si el cohete tiene una velocidad de 3000 m/s y si la aceleración de la gravedad es de 6 m/s^2 a la altura en que se halla el cohete, calcular el radio de curvatura ρ de su trayectoria para la posición representada y la variación por unidad de tiempo del módulo v de la velocidad del cohete. La masa del cohete en el instante considerado es 2000 kg.

Resp. $\rho = 3000$ km, $\dot{v} = 6{,}00$ m/s^2

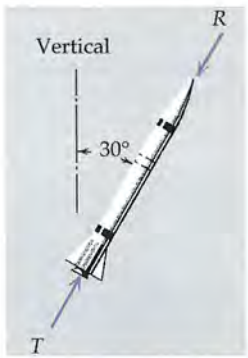


Figura problema 3.83

3.84 Se coloca una pequeña moneda sobre la superficie horizontal del disco giratorio. Si éste parte del reposo y está animado de una aceleración angular constante $\ddot{\theta} = \alpha$, hallar cuántas revoluciones N da el disco antes de que la moneda resbala. El coeficiente de rozamiento estático entre disco y moneda es μ_e.

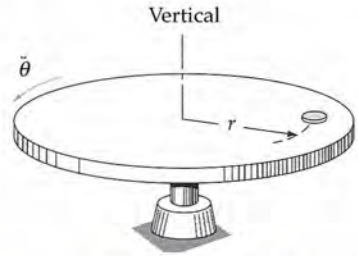


Figura problema 3.84

3.85 Un vehículo de pequeñas dimensiones entra en el punto más alto A de la trayectoria con una velocidad v_0 y gana velocidad conforme desciende por ella. Hallar la expresión del ángulo β hasta la posición en que el vehículo abandona su trayectoria y se convierte en un proyectil. Despreciar el rozamiento y tratar el vehículo como una partícula.

Resp. $\beta = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)$, $\beta = 48{,}2°$

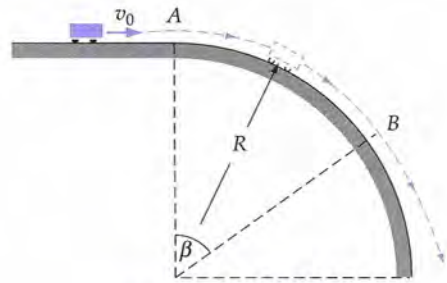


Figura problema 3.85

3.86 Un tramo de carretera comprende una sucesión de crestas y valles regularmente espaciados y cuyo contorno se supone representado por la función $y = b$ sen $(2\pi x/L)$. ¿Qué celeridad máxima puede llevar el automóvil A en una cresta sin perder contacto con la calzada? Si el vehículo conserva esa celeridad crítica, ¿cuánto vale la reacción total N sobre las ruedas en el fondo de un valle?. La masa del automóvil es m.

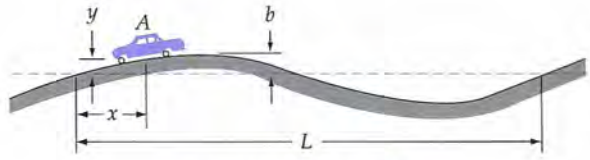


Figura problema 3.86

http://gratislibrospdf.com/

3.87 En el fondo de la depresión el automóvil lleva una celeridad de 70 km/h y el conductor aplica los frenos produciendo una desaceleración de 0,5 g. ¿Qué ángulo mínimo θ de inclinación debe tener el cojín del asiento para que el paquete no resbale hacia adelante? El coeficiente de rozamiento estático entre el paquete y el asiento es (*a*) 0,2 y (*b*) 0,4.

Resp. (*a*) $\theta = 7{,}34°$, (*b*) $\theta = -3{,}16°$

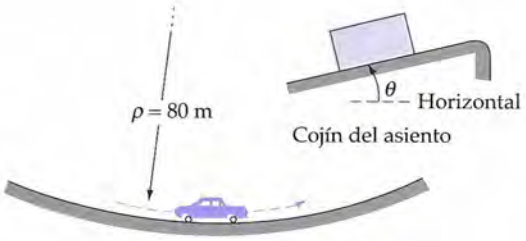


Figura problema 3.87

3.88 Animadas de una velocidad horizontal de 4,1 m/s, las bolitas de acero, de masa 65 g cada una, penetran por *A* en el canal semicircular vertical. Hallar, en función de θ y la velocidad v_B de las bolas en *B*, la fuerza *R* que el canal ejerce sobre cada una de ellas. Se desprecia el rozamiento.

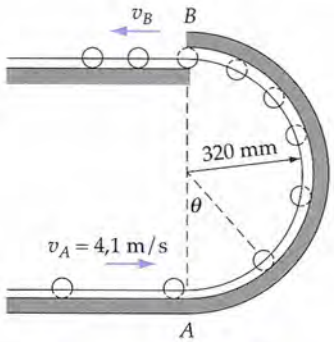


Figura problema 3.88

3.89 Un pequeño vehículo de propulsión por cohete, cuya masa es *m*, viaja hacia abajo por la trayectoria circular de radio efectivo *r* bajo la acción de su propio peso y del empuje constante *T* que le proporciona el motor. Si el vehículo parte del reposo en *A*, determinar su velocidad *v* cuando llega a *B* y la fuerza *N* ejercida por la guía sobre las ruedas antes de llegar a *B*. Despreciar los rozamientos y las pérdidas de masa del cohete.

Resp. $v = \sqrt{r\left(\frac{\pi T}{m} + 2g\right)}$

$N = T\pi + 3mg$

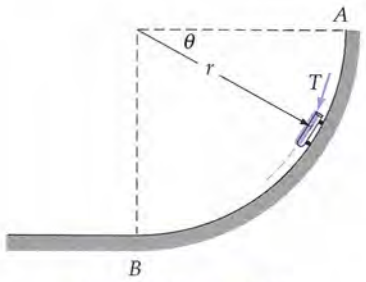


Figura problema 3.89

3.90 Un satélite *S*, cuya masa en el instante del lanzamiento era de 150 kg, es puesto en órbita elíptica alrededor de la Tierra. En el instante representado en la figura, el satélite se encuentra a una distancia $r = 10\,729$ km del centro de la Tierra y tiene una velocidad $v = 26\,730$ km/h formando un ángulo $\beta = 60°$ con la línea radial que pasa por *S*. La única fuerza que actúa sobre el satélite es la atracción terrestre, que es de 519 N en esas condiciones. Calcular el valor de $\dot{r}$ en la posición descrita.

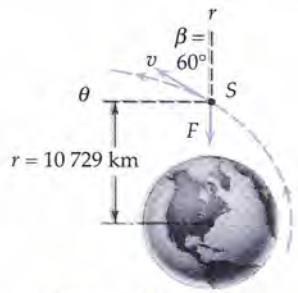


Figura problema 3.90

3.91 Con la mano derecha un lanzador de béisbol lanza un pelota curva apuntada inicialmente al borde derecho del pues-

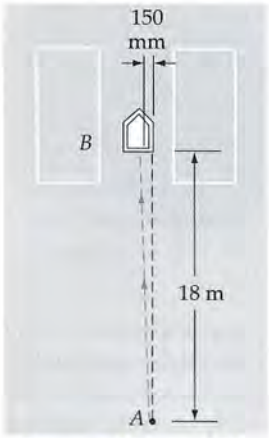


Figura problema 3.91

http://gratislibrospdf.com/

to meta B. Tal como se representa, la pelota se curva "quebrándose" 150 mm. Suponiendo una celeridad horizontal constante $v = 38$ m/s y despreciando el movimiento vertical, calcular aproximadamente (a) el radio medio de curvatura ρ de la trayectoria de la pelota y (b) la fuerza normal R que actúa sobre la masa de 146 g de la misma.

Resp. $\rho = 1080$ m, $R = 0{,}1952$ N

3.92 Desde $r = r_0$, en el instante $t = 0$, se abandona la partícula P en el interior del tubo liso sin velocidad respecto a éste, el cual se hace girar a una velocidad angular constante ω_0 en torno a un eje vertical. Hallar la velocidad radial v_r, la posición radial r y la velocidad tangencial v_θ en función del tiempo t. Explicar por qué, en ausencia de fuerzas radiales, la velocidad radial aumenta con el tiempo. Representar gráficamente la trayectoria absoluta de la partícula hasta que sale del tubo para $r_0 = 0{,}1$ m, $l = 1$ m y $\omega_0 = 1$ rad/s.

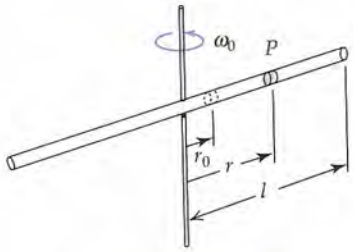


Figura problema 3.92

3.93 En el problema 3.92 se suprime la hipótesis de que las superficies son lisas y se admite que existe un coeficiente de rozamiento cinético μ_c entre la partícula y el tubo giratorio. Hallar, en función del tiempo t, la posición r de la partícula si ésta se suelta sin velocidad relativa en $r = r_0$ cuando $t = 0$. Se supondrá vencido el rozamiento estático.

$$\text{Resp. } r = \frac{r_0}{2\sqrt{\mu_c^2+1}}\left[(\mu_c+\sqrt{\mu_c^2+1})e^{\omega_0(-\mu_c+\sqrt{\mu_c^2+1})t}\right.$$

$$\left.+(-\mu_c+\sqrt{\mu_c^2+1})e^{\omega_0(-\mu_c+\sqrt{\mu_c^2+1})t}\right]$$

3.94 La varilla delgada uniforme de longitud L, masa m y sección A, gira con una velocidad angular constante alta ω, en un plano horizontal en torno al eje vertical O-O que pasa por su centro. Analizando las fuerzas horizontales actuantes sobre el elemento diferencial acelerado que se indica, deducir una expresión para el esfuerzo de tracción σ que sufre la varilla en función de r. El esfuerzo, comúnmente denominado esfuerzo centrífugo, es igual a la fuerza de tracción dividida por la sección A.

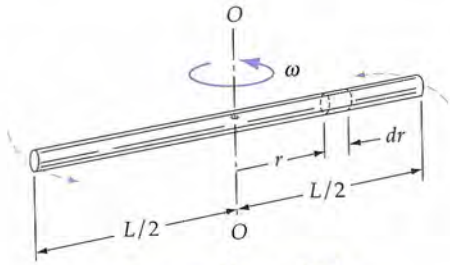


Figura problema 3.94

3.95 La bomba centrífuga de palas radiales lisas gira alrededor de su eje vertical con celeridad angular $\dot{\theta} = \omega$. Calcular la fuerza N ejercida por una de las palas sobre una partícula de masa m al moverse ésta hacia afuera a lo largo de la pala. La partícula se introduce en $r = r_0$ sin velocidad radial. Supóngase que la partícula sólo toca el costado de la pala.

Resp. $N = 2m\omega^2\sqrt{r^2 - r_0^2}$

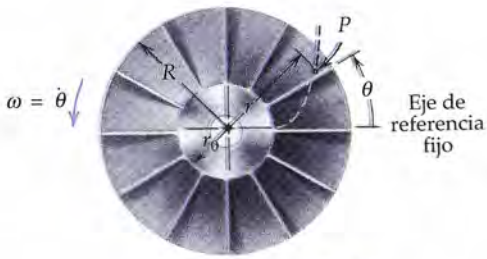


Figura problema 3.95

▶ **3.96** Cada neumático del automóvil de 1350 kg puede soportar una fuerza máxima de 2500 N paralela a la calzada. Esta fuerza límite es prácticamente constante en todos los movimientos posibles, rectilíneos o curvilíneos, del vehículo y es alcanzado sólo si el mismo no patina. En estas condiciones de

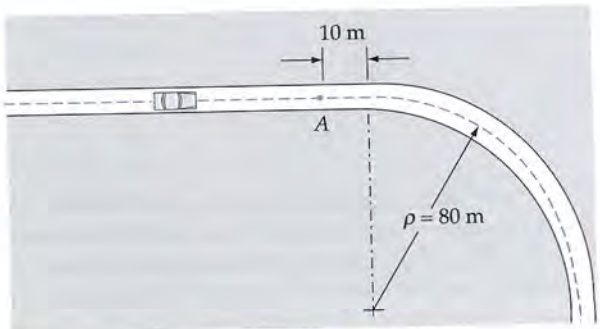


Figura problema 3.96

http://gratislibrospdf.com/

frenado a tope, hallar la distancia total de parada s si los frenos comienzan a aplicarse en el punto A, donde la velocidad es de 25 m/s, y el automóvil sigue la línea de división de la carretera.

Resp. $s = 47{,}4$ m

▶ **3.97** El tubo hueco rota en torno al eje horizontal que pasa por O con una velocidad angular constante ω_0. En $r = 0$ y cuando $\theta = 0$ se introduce una partícula de masa m con una velocidad relativa nula, la cual se desliza hacia afuera por el interior liso del tubo. Hallar r en función de θ.

$$Resp.\, r = \frac{g}{2\omega_0^2}(\text{senh}\,\theta - \text{sen}\,\theta)$$

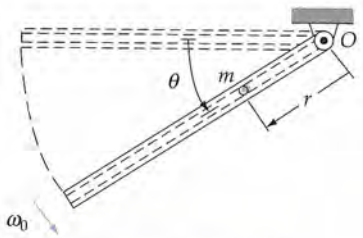


Figura problema 3.97

▶ **3.98** El pequeño péndulo de masa m cuelga de un carrito que corre por un raíl horizontal. Inicialmente el carrito y el péndulo se hallan en reposo con $\theta = 0$. Si el carrito recibe un aceleración constante $a = g$, hallar el ángulo máximo θ_{max} que alcanza el péndulo en sus oscilaciones. Hallar también la tracción T que sufre la cuerda en función de θ.

$$Resp.\, \theta_{max} = \pi/2,\ T = mg(3\,\text{sen}\,\theta + 3\cos\theta - 2)$$

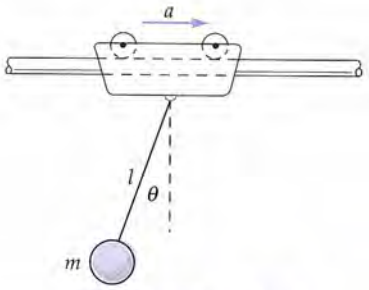


Figura problema 3.98

▶ **3.99** Un collarín de masa m recibe una velocidad inicial de módulo v_0 sobre la guía circular horizontal hecha de varilla delgada. Siendo μ_c el coeficiente de rozamiento cinético, hallar la distancia que recorre el collarín antes de pararse. (*Indicación*: Recuérdese que la fuerza de rozamiento depende sólo de la fuerza normal total.)

$$Resp.\, s = \frac{r}{2\mu_c}\ln\left[\frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + r^2g^2}}{rg}\right]$$

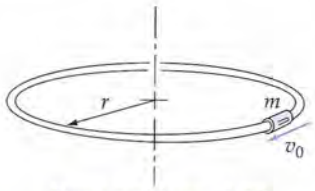


Figura problema 3.99

▶ **3.100** Desde el reposo en A se suelta un pequeño objeto que se desliza con rozamiento por la trayectoria circular. Si el coeficiente de rozamiento es 0,2, hallar la velocidad del objeto cuando pasa por B. (*Indicación*: Escribir las ecuaciones del movimiento en coordenadas locales n y t, eliminar N y hacer la sustitución $v\,dv = a_t\,r\,d\theta$. Resulta así una ecuación diferencial inhomogénea de la forma $dy/dx + f(x)y = g(x)$, cuya solución se conoce perfectamente.)

Resp. $v = 5{,}52$ m/s

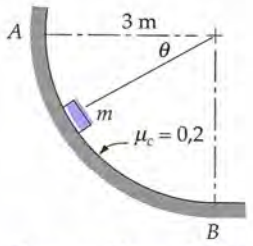


Figura problema 3.100

▶ **3.101** El brazo ranurado OB gira en un plano horizontal en torno al punto O de la leva circular fija con una velocidad angular $\dot{\theta} = 15$ rad/s. El resorte tiene un constante recuperadora

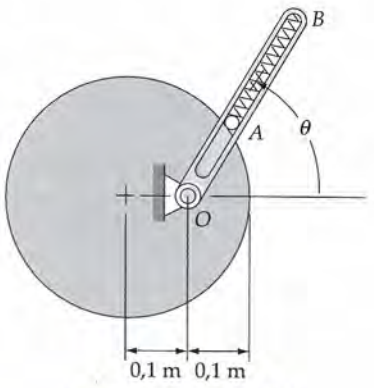


Figura problema 3.101

http://gratislibrospdf.com/

de 5 kN/m y está en su longitud natural cuando $\theta = 0$. El rodillo liso A tiene una masa de 0,5 kg. Hallar la fuerza normal N que la leva ejerce sobre A y también la fuerza R que sobre A ejercen los costados de la ranura cuando $\theta = 45°$. Las superficies son todas lisas. Se desprecia el pequeño diámetro del rodillo.

Resp. $N = 81{,}6$ N, R = 38,7 N

3.102 En su posición de reposo en A la pequeña vagoneta recibe un pequeño impulso que la precipita, con una velocidad inicial despreciable, por la trayectoria parabólica contenida en un plano vertical. Despreciar el rozamiento y demostrar que la vagoneta se mantiene en contacto con la parábola para todos los valores de k.

Resp. $N = \dfrac{mg}{(1 + 4k^2x^2)^{3/2}} > 0$

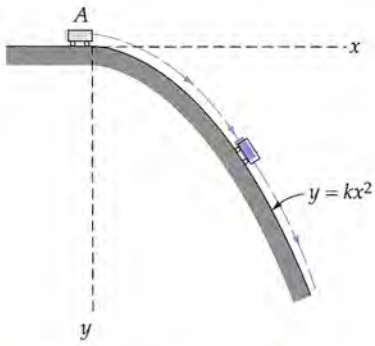


Figura problema 3.102

SECCIÓN B. TRABAJO Y ENERGÍA

3.6 TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

En los dos apartados anteriores se aplicó la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ a diversos problemas de movimiento de puntos materiales para establecer la relación que en cada instante guardan la fuerza resultante actuante sobre el punto y la aceleración que éste adquiere. Cuando se quería obtener la variación de velocidad o el desplazamiento correspondiente del punto, se integraba la ecuación resultante de aplicar las ecuaciones cinemáticas adecuadas.

Hay dos clases generales de problemas en los que interesa conocer los efectos acumulativos de las fuerzas no equilibradas actuantes sobre un punto material. Respectivamente, en estos casos interviene la integración de las fuerzas respecto al desplazamiento del punto y la integración de las fuerzas respecto al tiempo que dura su aplicación. Los resultados de esas integraciones pueden incorporarse directamente a las ecuaciones que rigen el movimiento, con lo que resulta innecesario despejar directamente la aceleración. La integración respecto al desplazamiento conduce a ecuaciones que relacionan trabajo y energía, las cuales son el tema de este apartado. La integración respecto al tiempo conduce a las ecuaciones que relacionan impulso y cantidad de movimiento, las cuales se estudian en la parte C de este capítulo.

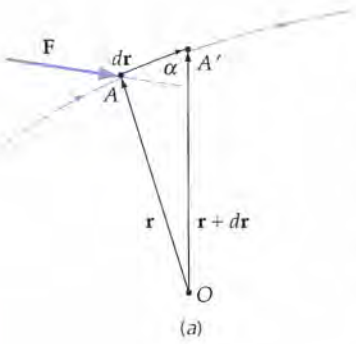
(a) Trabajo. Estableceremos ahora el significado cualitativo del término trabajo.[1] En la figura 3.2*a* se muestra una fuerza **F** actuando sobre una partícula A que se desplaza a lo largo de la trayectoria representada. El vector de posición **r**, medido desde un origen convenido O, sitúa a la partícula a su paso por el punto A y $d\mathbf{r}$ es el desplazamiento infinitesimal asociado a un movimiento in-

[1] El concepto de trabajo se desarrolló también al estudiar el principio de los trabajos virtuales en el capítulo 7 del tomo I, *Estática*.

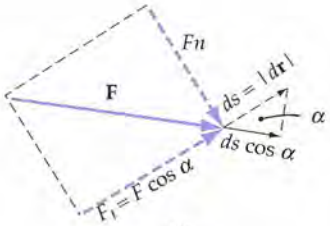
http://gratislibrospdf.com/

finitesimal desde A a A'. Por definición, el trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ durante el desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$ es

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



(a)



(b)

Figura 3.2

El valor de este producto escalar es $dU = F\,ds\,\cos\alpha$, donde α es el ángulo que forman $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$, y ds es el módulo de $d\mathbf{r}$. Esta expresión puede interpretarse como el desplazamiento multiplicado por la componente $F_t = F\cos\alpha$ en la dirección del desplazamiento, tal como representan las rectas de trazo discontinuo. De otra forma, el trabajo dU puede interpretarse también como la fuerza multiplicada por la componente del desplazamiento $ds\,\cos\alpha$ en la dirección de la fuerza, tal como representan las rectas de trazo lleno de la figura 3.2*b*. Definido así el trabajo, debemos observar que la componente $F_n = F\,\text{sen}\,\alpha$ normal al desplazamiento no efectúa trabajo. Por tanto, el trabajo dU puede escribirse

$$dU = F_t\,ds$$

El trabajo será positivo cuando la componente que realiza trabajo F_t tenga el mismo sentido que el desplazamiento y será negativo cuando ambos sentidos sean opuestos. Llamamos *fuerzas activas* a las fuerzas que realizan trabajo; a las de ligadura, que no realizan trabajo, las llamamos *fuerzas reactivas*.

La unidad SI de trabajo es igual a la unidad de fuerza (N) por la unidad de desplazamiento (m); o sea, N · m. Esta unidad recibe el nombre de *joule* y es, por definición, el trabajo que efectúa una fuerza de 1 N cuando se desplaza una distancia de un metro en su propia dirección. El uso del joule como unidad de trabajo (y de energía) en vez de N · m evitará la posible ambigüedad con las unidades de momento de una fuerza o de un par de fuerzas que se expresan en m · N.

Debe observarse que el trabajo es una magnitud escalar, dada por el producto escalar, o interno, de una fuerza por una distancia, medidas ambas a lo largo de la misma línea. El momento, por su parte, es una magnitud vectorial dada por el producto vectorial de un vector de posición por una fuerza.

Durante un desplazamiento finito del punto de aplicación de una fuerza, ésta realiza un trabajo

$$U = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$$

o sea

$$U = \int F_t\,ds$$

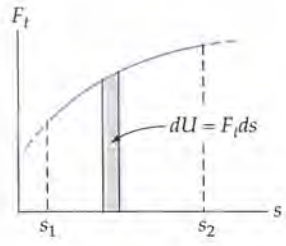


Figura 3.3

Para efectuar esta integración es preciso conocer la relación existente entre las componentes de la fuerza y sus respectivas coordenadas y las relaciones entre F_t y s. Si no se conociese la relación funcional como expresión matemática integrable, pero estuviera especificada en forma de datos aproximados o experimentales, podría calcularse el trabajo efectuando una integración numérica o gráfica que estaría representada por el área limitada bajo la curva de F_t en función de s, según se indica en la figura 3.3.

Un ejemplo muy corriente de trabajo realizado sobre un cuerpo por una fuerza variable lo encontramos en la acción de un resorte sobre un cuerpo mo-

http://gratislibrospdf.com/

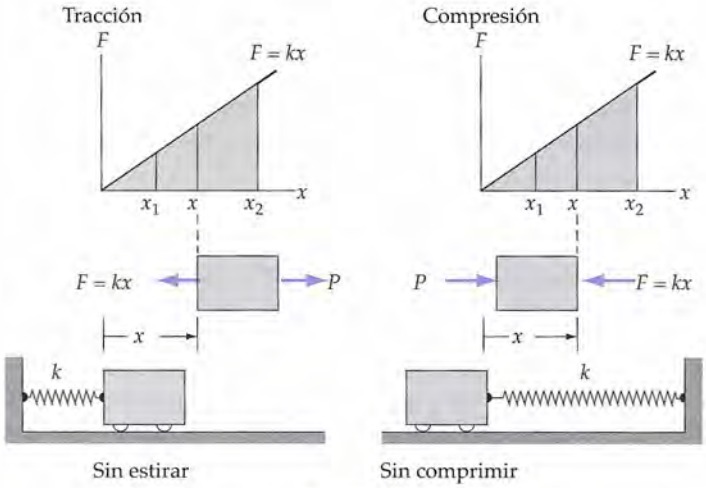


Figura 3.4

vible al que se halle unido. Supondremos aquí que el resorte es del tipo lineal común de constante recuperadora o rigidez k, de tal modo que la fuerza F que desarrolla, de tracción o compresión, es proporcional a su deformación x, es decir, $F = kx$. En la figura 3.4 se representan los dos casos en que el cuerpo se mueve (por acción de fuerzas que no se indican) bien para alargar el resorte una longitud x, bien para comprimirlo una longitud x. En cada caso, la fuerza que ejerce el resorte sobre el cuerpo es de *sentido contrario* al desplazamiento, por lo que el trabajo que realiza sobre el cuerpo es *negativo*. Así pues, tanto si el resorte se alarga como si se acorta, el trabajo realizado *sobre* el cuerpo es *negativo* y vale

$$U_{1\text{-}2} = -\int_{x_1}^{x_2} F\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = -\tfrac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

Cuando un resorte se libera, desde un estado de tracción o de compresión, vemos ahora en los dos ejemplos de la figura 3.4 que su deformación cambia desde x_2 a una deformación menor x_1. En esta situación la fuerza que actúa en cualquiera de los dos casos sobre el cuerpo tiene el *mismo sentido* que el desplazamiento y, por tanto, el trabajo realizado *sobre* el cuerpo es *positivo*.

El valor del trabajo, positivo o negativo, se ve que es igual al área trapezoidal sombreada que para ambos casos se representa en la figura 3.4. Al calcular el trabajo efectuado por la fuerza de un resorte debe ponerse cuidado en comprobar que las unidades en las que se expresen k y x sean coherentes. Es decir, si x está en metros, k debe estar en N/m.

En realidad, la expresión $F = kx$ es de naturaleza elástica y sólo es válida cuando todas las partes del resorte carecen de aceleración. El estudio dinámico del comportamiento de un resorte cuando se tiene en cuenta su masa es bastante complicado y no vamos a tratarlo aquí; supondremos que la masa del resorte es pequeña comparada con las masas de otras partes del sistema que estén aceleradas, en cuyo caso la relación estática lineal no implicará errores apreciables.

Consideremos ahora el trabajo realizado sobre una partícula de masa m (fig. 3.5) que se mueve describiendo una trayectoria curva bajo la acción de la fuer-

http://gratislibrospdf.com/

za **F**, que representa la resultante $\Sigma\mathbf{F}$ de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. La posición de m es establecida por el vector de posición **r**, y su desplazamiento a lo largo de su trayectoria durante el tiempo dt está representado por la variación $d\mathbf{r}$ de su vector de posición. El trabajo de **F** durante un desplazamiento finito de la partícula desde el punto 1 al punto 2 es

$$U_{1\text{-}2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds$$

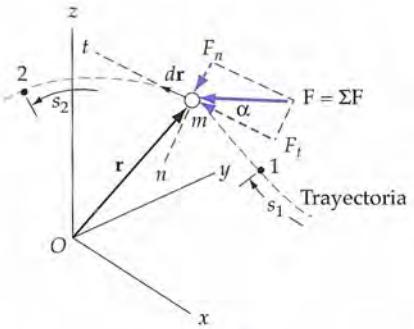


Figura 3.5

donde los límites especifican los puntos inicial y final del intervalo de movimiento en cuestión. Introduciendo la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, la expresión del trabajo de todas las fuerzas queda

$$U_{1\text{-}2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

Pero $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = a_t \, ds$, donde a_t es la componente tangencial de la aceleración de m y ds es el módulo de $d\mathbf{r}$. Atendiendo a la velocidad v de la partícula, la ecuación 2.3 da $a_t \, ds = v \, dv$. Con ello, la expresión del trabajo de **F** queda en la forma

$$U_{1\text{-}2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{v_1}^{v_2} mv \, dv = \tfrac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \qquad (3.9)$$

donde la integración se ha efectuado entre los puntos 1 y 2 de la curva en los cuales las velocidades tienen por módulo v_1 y v_2, respectivamente.

(b) Energía cinética. La *energía cinética* T de la partícula o punto material es, por definición,

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (3.10)$$

y es el trabajo total a realizar sobre la partícula para que ésta adquiera una velocidad de módulo v partiendo del estado de reposo. La energía cinética T es una magnitud escalar cuya unidad SI es el N · m, o *joule* (J), y que es *siempre* positiva independientemente de cuáles sean la dirección y el sentido de la velocidad. La ecuación 3.9 podemos escribirla otra vez en la forma más simple

$$U_{1\text{-}2} = T_2 - T_1 = \Delta T \qquad (3.11)$$

que es la ecuación que relaciona el trabajo efectuado sobre un punto material con la variación de su energía cinética, relación conocida de antiguo como *teorema de las fuerzas vivas*, ya que *fuerza viva* es otro nombre que ha recibido la energía cinética. Nos dice que el *trabajo total efectuado* por todas las fuerzas que se ejercen sobre un punto material durante el intervalo de movimiento desde el estado 1 al estado 2 es igual a la correspondiente *variación de energía cinética* del punto material. Aunque T es siempre positiva, su variación ΔT puede ser positiva, negativa o nula. Escrita de esta forma concisa, la ecuación 3.11 nos informa de que el trabajo siempre conlleva un *cambio* de energía cinética.

Otra manera de entender el teorema de las fuerzas vivas sería afirmar que la energía cinética inicial T_1 más el trabajo realizado $U_{1\text{-}2}$ es igual a la energía cinética final T_2 o sea

$$T_1 + U_{1\text{-}2} = T_2 \qquad (3.11a)$$

http://gratislibrospdf.com/

Expresado así, el teorema presenta los términos obedeciendo a la sucesión natural de los acontecimientos. Es obvio que ambas formas, la 3.11 y la 3.11*a*, son equivalentes.

Vemos ahora de la ecuación 3.11 que el teorema de las fuerzas vivas presenta la importante ventaja de evitar el cálculo de la aceleración y lleva directamente a las variaciones de velocidad como funciones de las fuerzas que trabajan. Es más, en el teorema de las fuerzas vivas sólo intervienen aquellas fuerzas que trabajan y dan lugar a variaciones de módulo en las velocidades.

Consideremos dos o más partículas unidas por conexiones exentas de rozamiento y que no pueden deformarse elásticamente. Las fuerzas de las conexiones aparecen por parejas de igual módulo y dirección y sentidos opuestos, y los puntos de aplicación de tales fuerzas tendrán necesariamente componentes de desplazamiento iguales en la dirección de las fuerzas. Por tanto, el trabajo total efectuado por dichas fuerzas internas será nulo para todo movimiento del sistema de las dos o más partículas conectadas. Así pues, la ecuación 3.11 será aplicable al sistema total, siendo $U_{1\text{-}2}$ el trabajo total efectuado sobre el sistema por las fuerzas exteriores a él y siendo ΔT la variación $T_2 - T_1$ de la energía cinética total del sistema. La energía cinética total es la suma de las energías cinéticas de todos los elementos del sistema. Podemos observar ahora que una nueva ventaja del teorema de las fuerzas vivas consiste en que permite el análisis de un sistema de puntos materiales, unidos de la manera descrita, sin necesidad de desmembrar el sistema.

La aplicación del teorema de las fuerzas vivas reclama el aislamiento del punto material o del sistema en cuestión. En el caso de un punto material solo, deberá trazarse un *diagrama para sólido libre* donde se representen todas las fuerzas externamente aplicadas. En el caso de sistemas de puntos materiales unidos rígidamente sin miembros elásticos, puede trazarse un *diagrama de fuerzas activas* donde sólo se incluyan las fuerzas que trabajen.[1]

(c) Potencia. La capacidad de una máquina se mide por la cantidad de trabajo que realiza o de energía que entrega por unidad de tiempo. El trabajo total o energía producida no constituye una medida de tal capacidad puesto que un motor, por pequeño que sea, puede entregar una gran cantidad de energía si se le da tiempo suficiente. Por otra parte, se requieren máquinas grandes y muy potentes para conseguir grandes cantidades de energía en períodos de tiempo cortos. De esta forma, la capacidad de las máquinas se clasifica de acuerdo con su *potencia*, que por definición es *la cantidad de trabajo efectuada por unidad de tiempo.*

De acuerdo con ello, la potencia P desarrollada por una fuerza $\mathbf{F}$ que realiza un trabajo U es $P = dU/dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt$. Como $d\mathbf{r}/dt$ es la velocidad $\mathbf{v}$ del punto de aplicación de la fuerza, tenemos

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \qquad (3.12)$$

La potencia es, evidentemente, una magnitud escalar y su unidad SI es $\text{N}\cdot\text{m}/\text{s} = \text{J}/\text{s}$, que recibe el nombre de *watt* (W) y es un joule por segundo.

(d) Rendimiento. El cociente entre el trabajo realizado *por* una máquina y el trabajo realizado *sobre* esa máquina durante un mismo intervalo de tiempo recibe el nombre de *rendimiento mecánico* e_m de la máquina. En esta definición se

[1] El diagrama de fuerzas activas fue introducido en el método de los trabajos virtuales. Véase el capítulo 7 del tomo I, *Estática*.

http://gratislibrospdf.com/

supone que la máquina funciona regularmente de forma que en su interior no se acumula ni se consume energía. El rendimiento es siempre inferior a la unidad puesto que todo mecanismo funciona siempre con cierta pérdida de energía y no puede crearse energía en el interior de la máquina. En los dispositivos mecánicos que incluyen piezas móviles existirá siempre alguna pérdida de energía a causa del trabajo negativo realizado por las fuerzas de rozamiento cinético, trabajo que se transforma en energía calorífica y que a su vez se disipa en el ambiente. En un instante dado, el rendimiento mecánico puede expresarse en función de la potencia mecánica P por

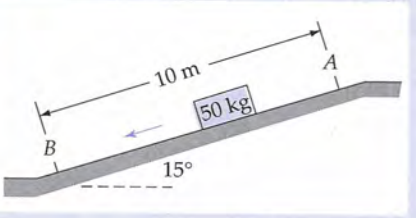
$$e_m = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{consumida}}}$$

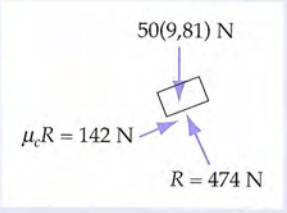
Además de pérdidas de energía producidas por el rozamiento, puede haber además pérdidas de energía eléctrica y térmica, en cuyo caso intervendrán también el *rendimiento eléctrico* e_e y el *rendimiento térmico* e_t. En tales circunstancias, el rendimiento global sería

$$e = e_m e_e e_t$$

PROBLEMA TIPO 3.11

Calcular la velocidad v de la caja de 50 kg cuando llega al final B de la rampa si en A recibe una velocidad inicial de 4 m/s rampa abajo. El coeficiente de rozamiento cinético es 0,30.





Solución. El diagrama para sólido libre de la caja comprende la fuerza normal R y la fuerza de rozamiento cinético F calculada del modo usual. El trabajo realizado por la componente del peso paralela al plano es positivo, mientras que el de la fuerza de rozamiento es negativo. El trabajo realizado sobre la caja durante el movimiento es

$$[U = Fs] \qquad U_{1\text{-}2} = [50(9{,}81)\ \text{sen}\ 15° - 142]10 = -152\ \text{J}$$ (1)

(1) Como el trabajo realizado total es negativo, resulta que la energía cinética disminuye.

La variación de energía cinética es $T_2 - T_1 = \Delta T$

$$[T = \tfrac{1}{2}mv^2] \qquad \Delta T = \tfrac{1}{2}(50)(v^2 - 4^2)$$

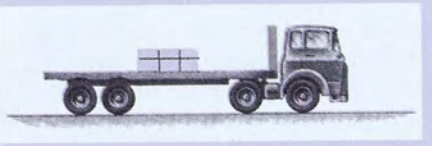
El teorema de las fuerzas vivas da

$$[U_{1\text{-}2} = \Delta T] \qquad -152 = 25(v^2 - 16)$$

$$v^2 = 9{,}93\ (\text{m/s}^2) \qquad v = 3{,}15\ \text{m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

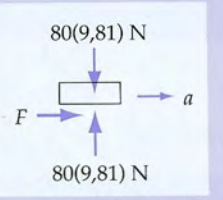
http://gratislibrospdf.com/

El camión de plataforma abierta, que transporta un embalaje de 80 kg, parte del reposo y alcanza una celeridad de 72 km/h en una distancia de 75 m a lo largo de una carretera horizontal bajo aceleración constante. Calcular el trabajo de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre el embalaje si los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre embalaje y plataforma son, respectivamente, (a) 0,30 y 0,28, ó (b) 0,25 y 0,20.



Solución. Si el embalaje no resbala sobre la plataforma, su aceleración será la misma que la del camión, y ésta es

$$[v^2 = 2as] \qquad a = \frac{v^2}{2s} = \frac{(72/3{,}6)^2}{2(75)} = 2{,}67 \text{ m/s}^2$$



Caso (a). Esta aceleración requiere que sobre el bloque actúe la fuerza de rozamiento

$$[F = ma] \qquad F = 80(2{,}67) = 213 \text{ N}$$

que es menor que el máximo valor posible de $\mu_e N = 0{,}30(80)(9{,}81) = 235$ N. Por tanto, el embalaje no resbala y el trabajo efectuado por la auténtica fuerza de rozamiento, que es la estática de 213 N es

(1) $$[U = Fs] \qquad U_{1\text{-}2} = 213(75) = 16\,000 \text{ J} \qquad \text{o sea} \qquad 16{,}0 \text{ kJ}$$

Caso (b). Para $\mu_e = 0{,}25$, la fuerza de rozamiento máxima posible es $0{,}25(80)(9{,}81) = 196$ N, ligeramente inferior al valor de 213 N necesario para que no haya deslizamiento. Resulta pues que el embalaje resbala y el valor de la fuerza de rozamiento está determinado por el coeficiente cinético y es $F = 0{,}20(80)(9{,}81) = 157$ N. La aceleración se hace

$$[F = ma] \qquad a = F/m = 157/80 = 1{,}96 \text{ m/s}^2$$

Las distancias recorridas por el embalaje y el camión son proporcionales a sus aceleraciones. Entonces, el embalaje se desplaza $(1{,}96/2{,}67)75 = 55{,}2$ m, y el trabajo efectuado por la fuerza de rozamiento cinético es

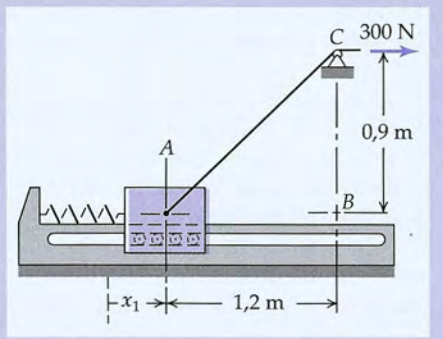
(2) $$[U = Fs] \qquad U_{1\text{-}2} = 157(55{,}2) = 8660 \text{ J} \qquad \text{o sea} \qquad 8{,}66 \text{ kJ} \qquad \textit{Resp.}$$

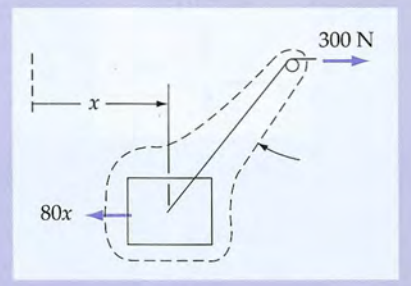
(1) **Obsérvese que las fuerzas de rozamiento estático no trabajan cuando ambas superficies en contacto están en reposo. Cuando se mueven, no obstante, como ocurre en este caso, la fuerza de rozamiento estático que actúa sobre el embalaje hace un trabajo positivo y la que actúa sobre la plataforma hace un trabajo negativo.**

(2) **Este problema muestra que una fuerza de rozamiento cinético puede realizar una trabajo positivo cuando la superficie que soporta el objeto y que genera la fuerza de rozamiento está en movimiento. Si la superficie portante está en reposo, la fuerza de rozamiento cinético que actúa sobre la parte móvil realizará un trabajo negativo.**

http://gratislibrospdf.com/

El bloque A de 50 kg está montado sobre rodillos de forma que puede moverse con rozamiento despreciable por el carril horizontal fijo bajo la acción de la fuerza constante de 300 N que actúa sobre el cable. El bloque se abandona en A desde el reposo, estando el resorte al que está unido estirado inicialmente $x_1 = 0{,}233$ m. La rigidez del resorte es $k = 80$ N/m. Calcular la velocidad v del bloque cuando llega a la posición B.





Solución. Partiremos de la hipótesis de que la rigidez del resorte es suficientemente reducida para permitir que el bloque llegue a la posición B. Se representa, para una posición cualquiera, el diagrama de fuerzas activas del sistema formado por bloque y cable. La fuerza del resorte $80x$ y la tensión de 300 N son las únicas fuerzas exteriores al sistema que realizan trabajo sobre el mismo. La fuerza que ejerce el carril sobre el bloque, el peso de éste, y la reacción de la pequeña polea sobre el cable no realizan trabajo sobre el sistema y no se incluyen en el diagrama de fuerzas activas.

Cuando el bloque se mueve desde $x = 0{,}233$ m a $x = 0{,}233 + 1{,}2 = 1{,}433$, el trabajo efectuado por la tensión del resorte que actúa sobre el bloque es negativo y vale

$$[U = \int F\,dx] \qquad U_{1\text{-}2} = -\int_{0{,}233}^{1{,}433} 80x\,dx = -40x^2\Big]_{0{,}233}^{1{,}433} = -80{,}0\ \text{J} \quad (1)$$

El trabajo que la fuerza constante de 300 N aplicada al cable realiza sobre el sistema es el producto de ésta por el desplazamiento horizontal del cable sobre la polea C, el cual vale $\sqrt{(1{,}2)^2 + (0{,}9)^2} - 0{,}9 = 0{,}6$ m. Así pues, el trabajo realizado es $300(0{,}6) = 180$ J. Aplicando ahora el teorema de las fuerzas vivas se obtiene

$$[U_{1\text{-}2} = \Delta T] \qquad -80{,}0 + 180 = \tfrac{1}{2}(50)(v^2 - 0) \qquad v = 2{,}0\ \text{m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

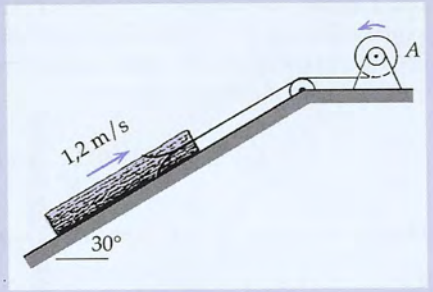
Observemos particularmente la ventaja de haber tomado un sistema como el elegido. Si el sistema hubiera estado formado sólo por el bloque, la componente horizontal de la tensión del cable de 300 N habría tenido que integrarse a lo largo del desplazamiento de 1,2 m. Esta operación requeriría un esfuerzo notablemente superior que el necesario en la solución ofrecida. De haber existido un rozamiento apreciable entre el bloque y su carril de guía, se habría visto la necesidad de aislar el bloque en solitario con el fin de calcular la fuerza normal variable y, a partir de la misma, la fuerza de rozamiento variable. A continuación, hubiera sido necesario integrar la fuerza de rozamiento a lo largo del desplazamiento para calcular el trabajo negativo realizado por la misma.

(1) Si la variable x se hubiera medido a partir de la posición de partida A, la tensión del resorte habría sido $80(0{,}233 + x)$ y los límites de integración 0 y 1,2 m.

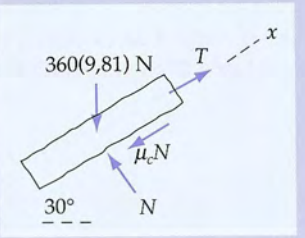
http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMA TIPO 3.14

El torno motorizado A iza el tronco de 360 kg por el plano inclinado 30° a la celeridad de 1,2 m/s. Si la potencia útil desarrollada por el torno es de 4 kW, calcular el coeficiente de rozamiento cinético μ_c entre tronco y plano. ¿Cuál sería la correspondiente aceleración instantánea a del tronco, si la potencia aumentase repentinamente a 6 kW?



Solución. Según el diagrama para sólido libre del tronco tenemos $N = 360(9,81)\cos 30° = 3058$ N, y la fuerza de rozamiento cinético valdrá $3058\mu_c$. Como la celeridad es constante, las fuerzas están en equilibrio, por lo que



$$[\Sigma F_x = 0] \qquad T - 3058\mu_c - 360(9,81)\,\text{sen}\,30° = 0$$

$$T = 3058\mu_c + 1766$$

La potencia útil del torno nos da la tensión del cable

$$[P = Tv] \qquad T = P/v = 4000/1,2 = 3333 \text{ N}$$

(1)

Sustituyendo T por su valor resulta

$$3333 = 3058\mu_c + 1766 \qquad \mu_c = 0,513 \qquad \textit{Resp.}$$

(1) Obsérvese que los kilowatt se pasan a watt. Asimismo empleamos J/s y no N·m/s.

Cuando la potencia aumenta, la tensión pasa a ser momentáneamente

$$[P = Tv] \qquad T = P/v = 6000/1,2 = 5000 \text{ N}$$

y la aceleración correspondiente es

$$[\Sigma F_x = ma_x] \qquad 5000 - 3058(0,513) - 360(9,81)\,\text{sen}\,30° = 360a$$

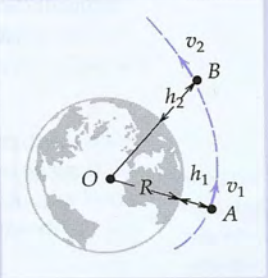
(2)

$$a = 4,63 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

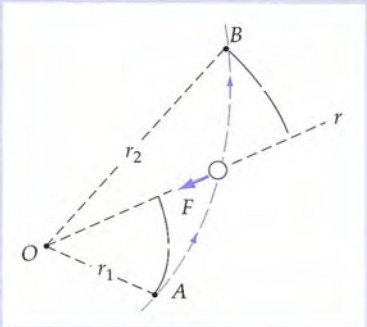
(2) A medida que aumenta la celeridad, la aceleración disminuye hasta que aquélla se estabiliza en un valor superior a 1,2 m/s.

PROBLEMA TIPO 3 .15

Un satélite de masa m se coloca en órbita elíptica en torno a la Tierra. En el punto A su distancia a la Tierra es $h_1 = 500$ km y su velocidad $v_1 = 30\,000$ km/h. Determinar la velocidad v_2 del satélite cuando llega al punto B, a una distancia $h_2 = 1200$ km de la Tierra.



http://gratislibrospdf.com/



Solución. El satélite se mueve fuera de la atmósfera terrestre, por lo que la única fuerza que sobre él actúa es la atracción gravitatoria de la Tierra. Siendo m_e y R la masa y el radio de la Tierra, respectivamente, la ley de la atracción universal (ec. 1.2) nos da $F = Gmm_e/r^2 = gR^2m/r^2$, cuando se sustituyen los valores en la superficie $F = mg$ y $r = R$ por $Gm_e = gR^2$. El trabajo realizado por F se debe únicamente a la componente radial del movimiento a lo largo de la recta soporte de F y es negativo cuando r aumenta.

$$U_{1\text{-}2} = -\int_{r_1}^{r_2} F\,dr = -mgR^2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

El teorema de las fuerzas vivas $U_{1-2} = \Delta T$ da

① Obsérvese que el resultado es independiente de la masa del satélite.

② Para el radio R de la Tierra, consultar la tabla D.2 del apéndice D.

① $$mgR^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) = \tfrac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \qquad v_2^2 = v_1^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

② Introduciendo los valores numéricos resulta

$$v_2^2 = \left(\frac{30\,000}{3{,}6}\right)^2 + 2(9{,}81)[(6371)(10^3)]^2\left(\frac{10^{-3}}{6371+1200}-\frac{10^{-3}}{6371+500}\right)$$

$$= 69{,}44(10^6) - 10{,}72(10^6) = 58{,}73(10^6)(\text{m/s})^2$$

$$v_2 = 7663 \text{ m/s} \qquad \text{o sea} \qquad v_2 = 7663(3{,}6) = 27\,590 \text{ km/h} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

3.103 Cuando $x = 0$, el resorte tiene su longitud natural. Si el cuerpo se desplaza desde su posición inicial $x_1 = 100$ mm hasta la posición final $x_2 = 200$ mm, hallar (*a*) el trabajo que realiza el resorte sobre el cuerpo y (*b*) el trabajo que sobre el cuerpo realiza su propio peso.

Resp. (*a*) $U_{1\text{-}2} = -60$ J, (*b*) $U_{1\text{-}2} = 2{,}35$ J

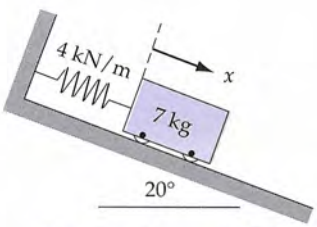


Figura problema 3.103

3.104 Aplicando el teorema de las fuerzas vivas hallar una expresión para la máxima altura que alcanza un proyectil lanzado desde el suelo con una velocidad inicial v_0. Evaluar la expresión hallada para $v_0 = 50$ m/s. Supóngase que la aceleración gravitatoria es constante y despréciese la resistencia del aire.

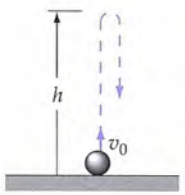


Figura problema 3.104

3.105 En el punto A el pequeño cuerpo posee una celeridad $v_A = 5$ m/s. Despreciando el rozamiento, hallar su celeridad v_B en el punto B, tras haberse elevado 0,8 m. ¿Es necesario conocer el perfil de la pista?

Resp. $v_B = 3{,}05$ m/s; no

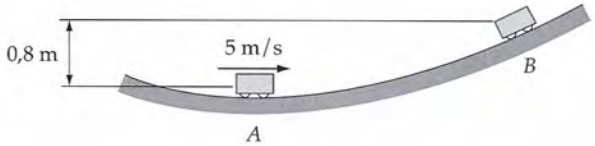


Figura problema 3.105

http://gratislibrospdf.com/

3.106 Al proyectar un parachoques elástico para un automóvil de 1500 kg, se desea que el vehículo se detenga desde una celeridad de 8 km/h con una longitud de deformación de los resortes de 150 mm. Especificar qué constante recuperadora debe tener cada uno de los dos resortes montados detrás del parachoques. Ambos están sin deformar al inicio del impacto.

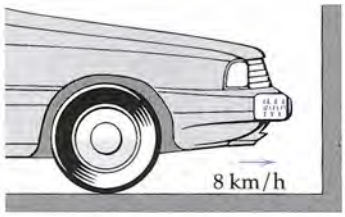


Figura problema 3.106

3.107 El pequeño collar de masa m se suelta desde el reposo en A y se desliza, sin rozamiento apreciable, por la varilla curva vertical. Expresar, en función de las condiciones dadas, la velocidad v del collar cuando choca con la base B.

Resp. $v = \sqrt{2gh}$

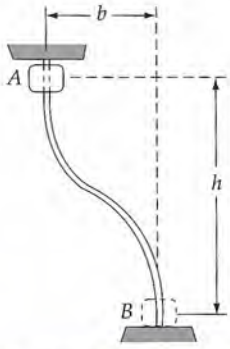


Figura problema 3.107

3.108 Si para el collar deslizante del problema 3.107 es m = 0,5 kg, $b = 0{,}8$ m y $h = 1{,}5$ m y, además, la velocidad del collar es de 4,70 m/s al chocar con la base B tras haber partido del reposo, calcular el trabajo Q realizado por el rozamiento. ¿Qué se hace de la energía perdida?

3.109 El anillo de 0,8 kg se desliza con rozamiento despreciable a lo largo de la varilla inmovilizada en el plano vertical. Si el anillo parte del reposo en A bajo la acción de la fuerza horizontal constante de 8 N, calcular su velocidad v cuando choca con el tope B.

Resp. $v = 4{,}73$ m/s

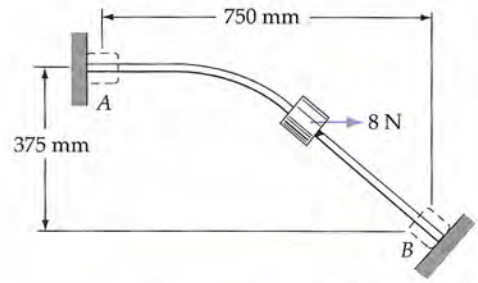


Figura problema 3.109

3.110 El anillo de 2 kg se abandona desde el reposo en A y se desliza por la varilla inclinada fija en el plano vertical. El coeficiente de rozamiento cinético es 0,4. Calcular (*a*) la velocidad v del anillo cuando golpea contra el resorte y (*b*) el acortamiento máximo x del resorte.

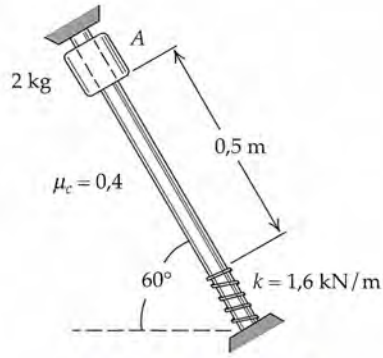


Figura problema 3.110

3.111 El automóvil sube con una celeridad $v_0 = 105$ km/h por la pendiente del 6 por ciento cuando el conductor aplica los frenos en el punto A, haciendo que todas las ruedas patinen. El coeficiente de rozamiento cinético en la calzada resbaladiza de lluvia es $\mu_c = 0{,}6$. Hallar la distancia de parada s_{AB}. Repetir los cálculos para el caso en que el vehículo se mueva cuesta abajo de B a A.

Resp. $s_{AB} = 65{,}8$ m, $s_{BA} = 80{,}4$ m

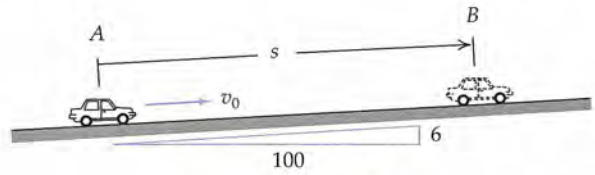


Figura problema 3.111

http://gratislibrospdf.com/

3.112 La muchacha de 54 kg sube el tramo de escalera en cinco segundos. Determinar la potencia útil media que desarrolla.

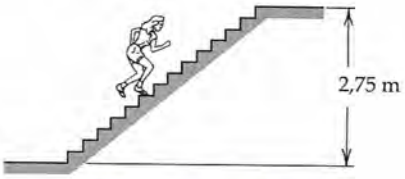


Figura problema 3.112

Problemas representativos

3.113 El vector de posición de un punto material es $\mathbf{r} = 8t\mathbf{i} + 1{,}2t^2\mathbf{j} - 0{,}5(t^3 - 1)\mathbf{k}$, donde t es el tiempo en segundos desde el inicio del movimiento y $\mathbf{r}$ se expresa en metros. Para el instante $t = 4$ s, determinar la potencia P desarrollada por la fuerza $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 36\mathbf{k}$ N que actúa sobre el punto material.

Resp. $P = 0{,}992$ kW

3.114 La escalera mecánica de unos grandes almacenes transporta una carga constante de 36 personas por minuto desde la primera planta hasta la segunda, con una diferencia de nivel de 7 m. La masa media de las personas es de 65 kg. Si el motor que acciona el dispositivo entrega 3 kW, calcular el rendimiento mecánico del sistema.

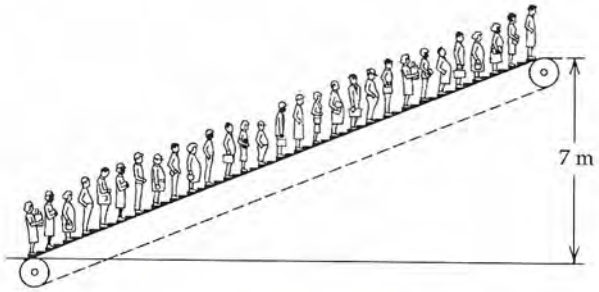


Figura problema 3.114

3.115 La bola de 4 kg y la varilla liviana a ella unida rotan en un plano vertical en torno al eje fijo O. Si el conjunto se abandona desde el reposo en $\theta = 0$ y se mueve bajo la acción de la fuerza de 60 N, que se mantiene normal a la varilla, hallar la velocidad v de la bola cuando θ tiende a 90°. La bola puede tratarse como masa puntual.

Resp. $v = 1{,}881$ m/s

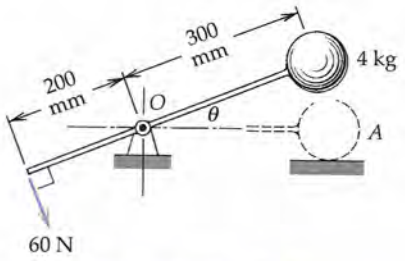


Figura problema 3.115

3.116 Un automóvil de 1500 kg de masa parte del reposo al pie de una cuesta del 10 por ciento y alcanza una celeridad de 50 km/h a los 100 m de estar uniformemente acelerado pendiente arriba. ¿Qué potencia P entrega el motor a las ruedas motrices cuando el vehículo adquiere esa velocidad?

3.117 Un automóvil de 1200 kg entra, a 100 km/h, en una pendiente del 8 por ciento. El conductor aplica los frenos y reduce la velocidad hasta 25 km/h en una distancia de 0,5 km medida a lo largo de la calzada. Calcular la energía perdida Q en forma de calor disipado en los frenos. Despréciese cualquier pérdida por rozamientos de otro origen tal como la resistencia del aire.

Resp. $Q = 903$ kJ

3.118 La unidad motriz A se emplea para elevar el cilindro de 300 kg a la velocidad constante de 2 m/s. Si el wattímetro B registra un consumo de potencia eléctrica de 2,20 kW, calcular el rendimiento combinado electromecánico e del sistema.

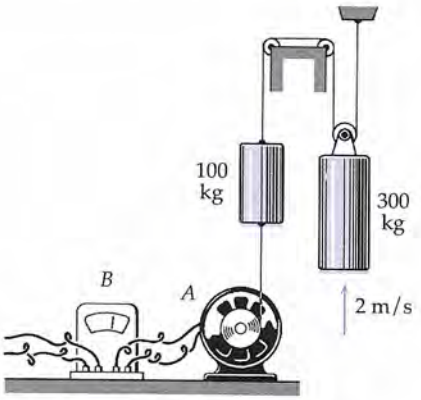


Figura problema 3.118

3.119 El collar cilíndrico de 6 kg se suelta desde el reposo en la posición indicada. Calcular su velocidad v cuando el resorte se ha comprimido 50 mm.

Resp. $v = 2{,}41$ m/s

http://gratislibrospdf.com/

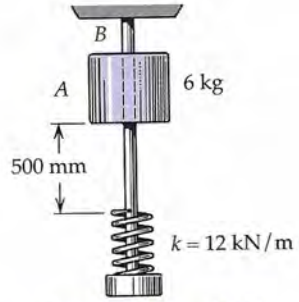


Figura problema 3.119

3.120 En el diseño estructural de los pisos superiores de una nave industrial, hay que tener en cuenta la posibilidad de caídas accidentales de maquinaria pesada a través de una distancia corta. Para una máquina de masa m que caiga una distancia muy corta sobre un suelo que actúe elásticamente, determinar la fuerza máxima F que soporta el piso. (El modelo de este problema es una masa m montada sobre apoyos a una distancia despreciable por encima de un resorte de rigidez k, teniendo lugar la acción cuando los apoyos se retiran bruscamente.)

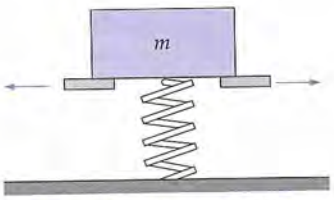


Figura problema 3.120

3.121 La presión p en el interior del cañón de un fusil varía con la posición de la bala tal como muestra el gráfico. Si el calibre es 7,5 mm y la masa de la bala es 14 g, determinar la velocidad en boca. Despreciar el efecto del rozamiento en el cañón comparado con la fuerza de los gases sobre la bala. Recuérdese que un megapascal (MPa) vale 10^6 N/m^2.

Resp. $v = 940$ m/s

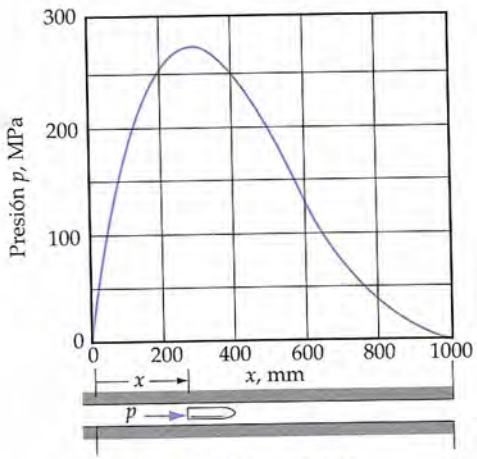


Figura problema 3.121

3.122 El anillo de 0,8 kg se desliza libremente por la varilla circular fija. Calcular su velocidad v cuando choca con el tope B sabiendo que sube bajo la acción de la fuerza constante de 40 N que se ejerce sobre la cuerda. Ésta está guiada por las pequeñas poleas fijas.

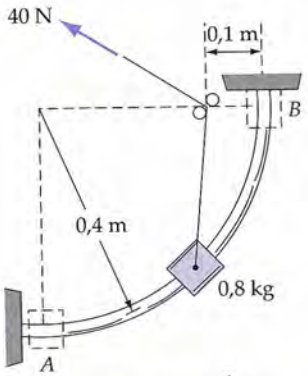


Figura problema 3.122

3.123 Los dos sistemas se sueltan desde el reposo. Calcular la velocidad v de cada cilindro de 25 kg después de que los de 20 kg hayan descendido 2 m. El cilindro de 10 kg del caso (*a*) está sustituido por una fuerza de 10(9,81) N en el caso (*b*).

Resp. (*a*) $v = 1{,}889$ m/s, (*b*) $v = 2{,}09$ m/s

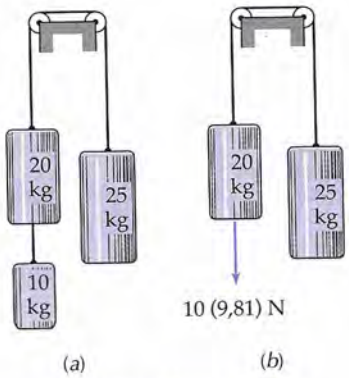


Figura problema 3.123

3.124 El carro A de la grúa puente se desplaza a 0,9 m/s cuando bruscamente se detiene. (*a*) Para el caso en que la distancia d sea grande en el momento de la parada, calcular el ángulo

http://gratislibrospdf.com/

máximo de oscilación θ de los cables. (*b*) Para el caso en que d valga 0,75 en el momento de parada, calcular la celeridad v con que la bola pesada B golpea el muro. Despreciar las masas de los cables, las poleas y el gancho, pero tener en cuenta el diámetro de 0,8 m de la bola B.

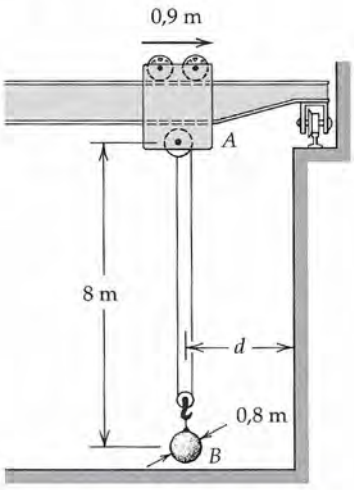


Figura problema 3.124

3.125 La esfera parte de la posición A con una velocidad de 3 m/s y oscila en un plano vertical. En la posición más baja, el cordón choca con una barra fija en B y la esfera continúa oscilando siguiendo el arco punteado. Calcular la velocidad v_c de la esfera cuando llega a la posición C.

Resp. $v_c = 3{,}59$ m/s

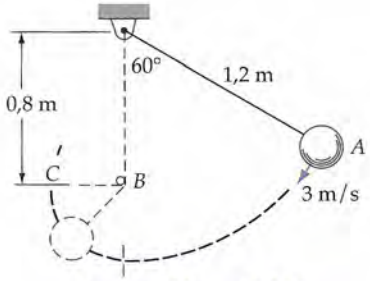


Figura problema 3.125

3.126 En un ensayo para determinar las características de aplastamiento de un material de empacado, se deja caer sobre éste un cono de acero de masa m desde una altura h para que lo penetre. El radio del cono depende del cuadrado de la distancia medida desde la punta. La resistencia R del material a la penetración depende de la sección transversal del objeto penetrante y es, por ello, proporcional a la cuarta potencia de la distancia x que penetra el cono, o sea, es $R = kx^4$. Si el cono se detiene a una distancia $x = d$, hallar la constante k en función de las condiciones y resultados del ensayo. Aplicar una sola vez el teorema de las fuerzas vivas.

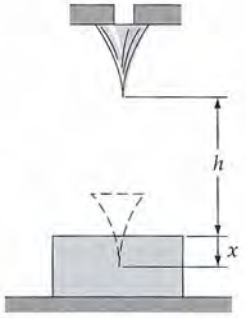


Figura problema 3.126

3.127 Al sistema articulado se aplica una fuerza horizontal constante $P = 700$ N del modo que se indica. Estando la esfera de 14 kg inicialmente en reposo sobre el soporte cuando $\theta = 60°$, calcular su velocidad v cuando θ se aproxima al valor cero y la bola se acerca a su posición más alta.

Resp. $v = 3{,}88$ m/s

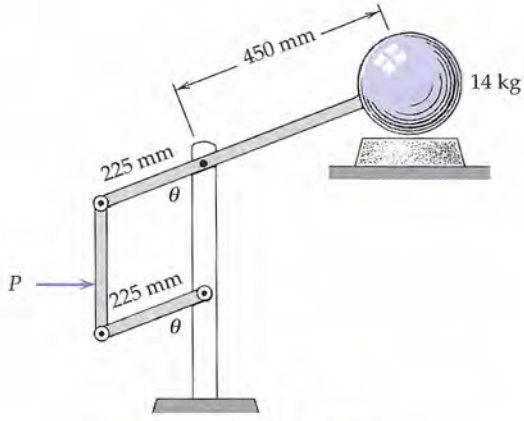


Figura problema 3.127

3.128 El carro de 150 kg inicia su descenso por el plano inclinado con una velocidad de 3 m/s, cuando al cable se aplica una fuerza constante de 550 N del modo que se indica. Calcular la velocidad del carro al llegar a B. Demostrar que, en ausencia de rozamiento, esa velocidad es independiente de que la velocidad inicial del carro en A fuese ascendente o descendente.

http://gratislibrospdf.com/

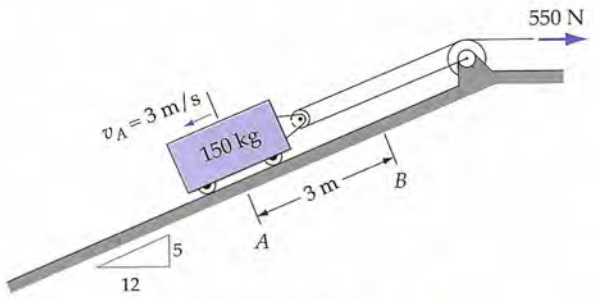


Figura problema 3.128

3.129 En un apartadero de clasificación ferroviaria, un vagón de mercancías de 68 Mg que pasa por A a 0,5 m/s penetra en B en un tramo de freno de vía que le ejerce una fuerza retardadora de 32 kN en sentido opuesto al movimiento. ¿A lo largo de qué distancia x debe actuar el freno de vía para limitar a 3 m/s la velocidad en C del vagón?

Resp. $x = 53{,}2$ m

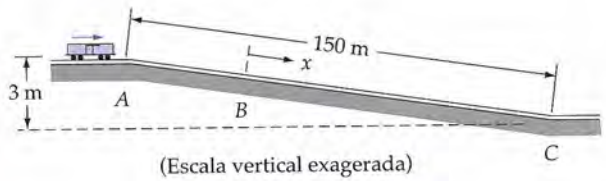


Figura problema 3.129

3.130 El cilindro de 6 kg se abandona desde el reposo en la posición indicada y cae sobre el resorte precomprimido 50 mm mediante la pletina y los alambres de sujeción sin peso. Si la rigidez del resorte es 4 kN/m, calcular el acortamiento adicional δ del resorte que produce el cilindro en su caída antes de rebotar.

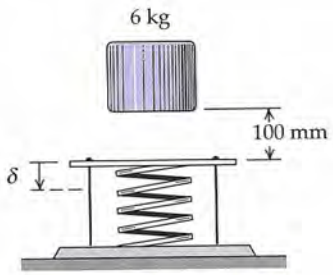


Figura problema 3.130

3.131 Un vehículo de prueba pequeño, propulsado por cohete, con una masa total de 100 kg, parte del reposo en A y avanza, con rozamiento despreciable, a lo largo de la pista en el plano vertical según se indica. Si el cohete propulsor ejerce un empuje constante T de 1,5 kN desde A hasta B en que se apaga, hallar la distancia s que rueda el vehículo por la pendiente antes de pararse. La pérdida de masa por la expulsión de gases del cohete es pequeña y se puede despreciar.

Resp. $s = 160{,}0$ m

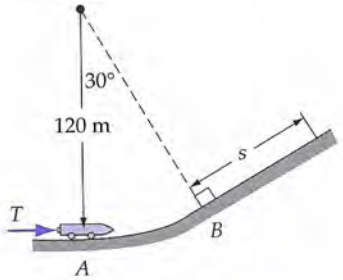


Figura problema 3.131

3.132 Las correderas A y B tienen una masa de 2 kg cada una y se mueven sin rozamiento apreciable por sus guías respectivas, situándose y en la dirección vertical. En el centro de la barra de enlace, de masa despreciable, se aplica una fuerza horizontal de 20 N y el conjunto se abandona desde el reposo con $\theta = 0$. Calcular con qué velocidad v_A choca A con la guía horizontal, cuando $\theta = 90°$.

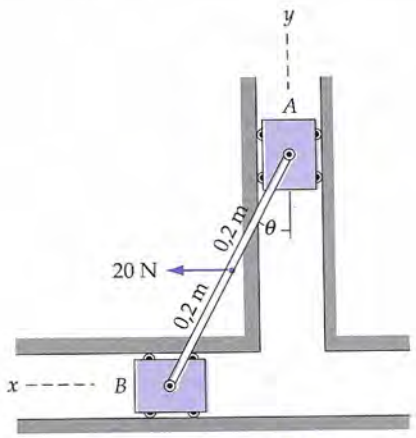


Figura problema 3.132

3.133 El montaje de dos resortes sirve para detener el émbolo de 0,5 kg desde una celeridad de 5 m/s e invertir su movimiento. El resorte interno aumenta la desaceleración y su posición se ajusta a efectos de controlar el punto exacto en que tiene lugar la inversión. Si se desea que ese punto se corresponda con un acortamiento $\delta = 200$ mm del resorte externo, especificar el

http://gratislibrospdf.com/

ajuste del resorte interno mediante la distancia s. La rigidez del resorte externo es 300 N/m y la del resorte interno es 150 N/m.

Resp. $s = 142{,}3$ mm

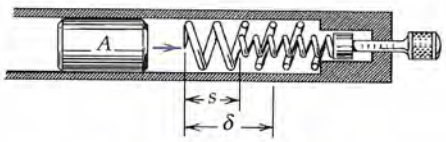


Figura problema 3.133

3.134 El anillo A de 7 kg se desliza sin rozamiento apreciable por la barra vertical. Cuando el anillo parte del reposo desde la posición más baja, señalada en la figura, se mueve hacia arriba bajo la acción de una fuerza constante $F = 200$ N aplicada mediante el cable. Calcular la constante k del resorte para que la compresión de éste quede limitada sólo a 75 mm. La posición de la pequeña polea B es fija.

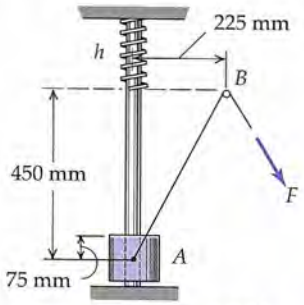


Figura problema 3.134

3.135 Extensos ensayos de un automóvil experimental de 900 kg revelan que la fuerza de resistencia aerodinámica F_D y la fuerza no aerodinámica total de resistencia a la rodadura F_R varían tal como se representa. Determinar (*a*) la potencia necesaria para mantener unas velocidades constantes de 50 y 100 km/h en una carretera plana, (*b*) la potencia necesaria para mantener una velocidad de 100 km/h hacia arriba y hacia abajo de una pendiente del seis por ciento y (*c*) la velocidad constante que no necesita potencia para bajar por la pendiente del seis por ciento.

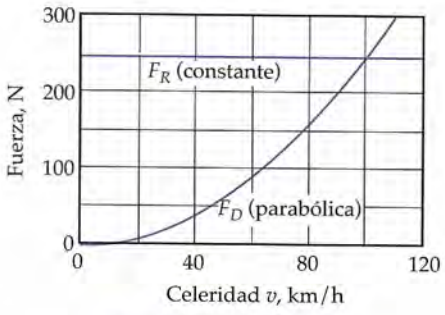


Figura problema 3.135

Resp. (*a*) $P_{50} = 4{,}34$ kW, $P_{100} = 13{,}89$ kW

(*b*) $P_{\text{arriba}} = 28{,}6$ kW, $P_{\text{abajo}} = -800$ W

(*c*) $v = 105{,}6$ km/h

3.136 El movimiento vertical del bloque de 20 kg está gobernado por las dos fuerzas P aplicadas a los extremos A y B del sistema articulado, estando A y B limitados a moverse por la guía horizontal. Si al sistema, inicialmente en reposo con $\theta = 60°$, se aplican unas fuerzas $P = 1100$ N, hallar la velocidad ascendente v del bloque cuando θ tiende a 180°. Despréciense el rozamiento y las masas de las varillas articuladas y adviértase que P es mayor que su valor para el equilibrio, el cual es (5W/2) ctg 30° = 850 N.

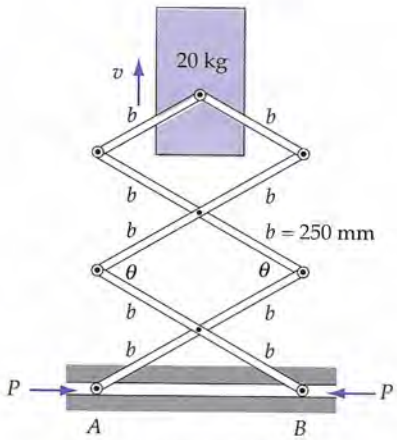


Figura problema 3.136

3.137 Al sistema, inicialmente en reposo, se aplica la fuerza $P = 40$ N. Hallar las celeridades de A y B después de que A se haya desplazado 0,4 m.

Resp. $v_A = 1{,}180$ m/s, $v_B = 2{,}36$ m/s

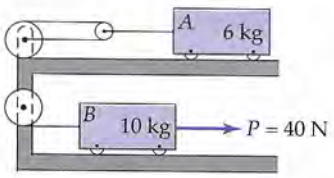


Figura problema 3.137

http://gratislibrospdf.com/

3.138 En la posición inicial indicada la corredera de 25 kg está animada de una velocidad $v_0 = 0{,}6$ m/s al deslizarse por el raíl inclinado bajo la acción de la gravedad y el rozamiento. Entre la corredera y el raíl hay un coeficiente de rozamiento cinético de 0,5. Calcular la velocidad de la corredera cuando pasa por la posición en que el resorte se ha comprimido una distancia x = 100 mm. El resorte ofrece una resistencia a la compresión C y es del tipo "duro", pues su rigidez aumenta con la deformación tal como se muestra en la gráfica adjunta.

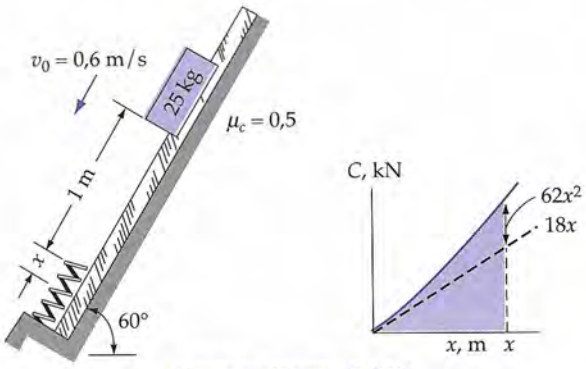


Figura problema 3.138

3.139 El bloque de 10 kg se suelta desde el reposo en el punto B, en que el resorte está alargado 0,5 m respecto a su longitud natural, y se mueve sobre la superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre ésta y el bloque es de 0,30. Calcular (*a*) la velocidad v del bloque cuando pasa por el punto A y (*b*) la longitud máxima x que el bloque recorre a la izquierda de A.

Resp. $v = 2{,}13$ m/s, $x = 0{,}304$ m

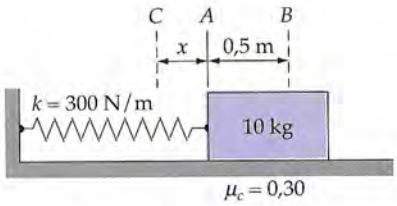


Figura problema 3.139

3.140 Los tres resortes de constantes iguales tienen sus longitudes naturales cuando se suelta el carro desde el reposo en la posición $x = 0$. Si $k = 120$ N/m y $m = 10$ kg, hallar (*a*) la celeridad v del carro cuando x = 50 mm, (*b*) el desplazamiento máximo x_{max} del carro y (*c*) el desplazamiento estacionario x_{est} que existiría tras el cese de las oscilaciones.

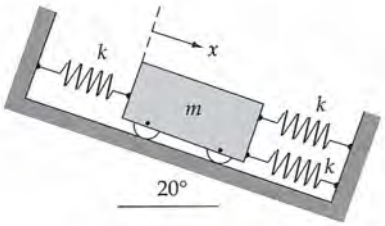


Figura problema 3.140

3.141 Bajo la acción de la fuerza motriz F el automóvil de masa m acelera desde una celeridad v_1 hasta otra mayor v_2 a lo largo de una distancia s de la carretera horizontal. Si el motor desarrolla una potencia útil constante P, hallar v_2. El automóvil puede tratarse como una partícula sometida a la acción de la única fuerza horizontal F.

Resp. $v_2 = \left(\frac{3Ps}{m} + v_1^3\right)^{1/3}$

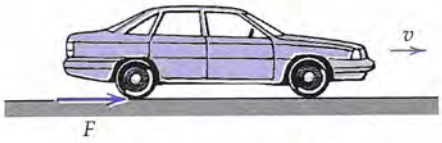


Figura problema 3.141

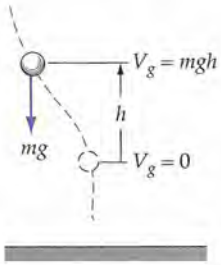
3.142 El cilindro de 10 kg se abandona desde el reposo con $x = 1$ m, en que el resorte está sin deformar. Hallar (*a*) la velocidad máxima v del cilindro y el valor de x correspondiente y (*b*) el valor máximo de x durante el movimiento. La rigidez del resorte es de 450 N/m.

Figura problema 3.142

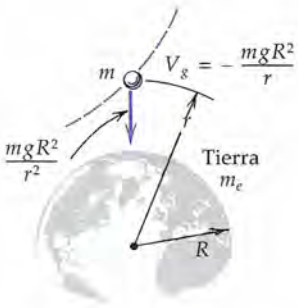
http://gratislibrospdf.com/

3.7 ENERGÍA POTENCIAL

En el apartado anterior, dedicado al trabajo y la energía cinética, se aislaba un punto material o partícula, o se aislaba un conjunto de éstos unidos entre sí y se determinada el trabajo realizado sobre el punto material o sobre el conjunto de puntos por fuerzas gravitatorias o por fuerzas elásticas o de otra naturaleza, externamente aplicadas, al objeto de calcular el término U que figura en el teorema de las fuerzas vivas. En este apartado se trata del trabajo de las fuerzas gravitatorias y elásticas introduciendo el concepto de *energía potencial*. Este concepto simplifica los cálculos en numerosos problemas.



(*a*)



(*b*)

Figura 3.6

(a) Energía potencial gravitatoria. Empecemos considerando el movimiento de una masa puntual m en la proximidad inmediata de la superficie terrestre, donde la atracción gravitatoria (peso) mg es prácticamente constante (fig. 3.6*a*). La *energía potencial gravitatoria* V_g de esa masa puntual es, por definición, el trabajo mgh que se realiza *contra* el campo gravitatorio para elevar la masa una distancia h por encima de un plano de referencia arbitrario en el que V_g se toma como cero. Así pues, la energía potencial puede escribirse

$$V_g = mgh \tag{3.14}$$

Este trabajo recibe el nombre de energía potencial porque puede convertirse en energía si permitimos que la masa puntual realice un trabajo sobre un cuerpo portante, mientras regresa a su plano original de referencia situado a menor altura. Al pasar de una altura $h = h_1$ a otra más elevada $h = h_2$, la variación de energía potencial es

$$\Delta V_g = mg(h_2 - h_1) = mg\Delta h$$

El correspondiente trabajo que realiza la fuerza gravitatoria *sobre* la masa puntual es $-mg\Delta h$. Así pues, el trabajo efectuado por la fuerza gravitatoria es igual y opuesto a la variación de energía potencial.

Al considerar grandes variaciones de altitud en el campo gravitatorio terrestre (fig. 3/6*b*), la fuerza gravitatoria $Gmm_e/r^2 = mgR^2/r^2$ ya no puede considerarse constante. El trabajo efectuado *contra* esa fuerza para cambiar la posición radial de la masa puntual desde r a r' es la variación $V_g' - V_g$ de la energía gravitatoria:

$$\int_r^{r'} mgR^2 \frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = V_g' - V_g$$

Se acostumbra a tomar $V_g' = 0$ para $r' = \infty$ con lo que, con esta referencia, se tiene

$$V_g = -\frac{mgR^2}{r} \tag{3.15}$$

De r_1 a r_2, el correspondiente cambio de energía potencial es

$$\Delta V_g = mgR^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

http://gratislibrospdf.com/

que, como antes, resulta ser igual y *opuesta* al trabajo efectuado por la fuerza gravitatoria. Adviértase que la energía potencial de una masa puntual depende sólo de su posición, h ó r, y no de la trayectoria concreta que haya seguido para llegar a esa posición.

(b) Energía potencial elástica. El segundo ejemplo de energía potencial lo encontramos en la deformación de los cuerpos elásticos, como es el caso de los resortes. El trabajo que se realiza sobre un resorte para deformarlo se almacena en el mismo y recibe el nombre de *energía potencial elástica* V_e. Esta energía es recuperable en forma de trabajo que realiza el resorte sobre el cuerpo al que está unido por su extremo móvil, durante la restauración del resorte a su longitud natural. En el caso de un resorte lineal unidimensional de rigidez k, que tratamos en el apartado 3.6 e ilustramos en la figura 3.4, la fuerza que soporta para toda deformación x, tracción o compresión, medida desde su posición no deformada, o longitud natural, es $F = kx$. O sea, definimos la energía potencial elástica de un resorte como el valor del trabajo necesario para deformarlo una longitud x y, entonces,

$$V_e = \int_0^x kx\, dx = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{3.16}$$

Si la deformación, de tracción o compresión, de un resorte aumenta desde x_1 a x_2 durante el intervalo de movimiento, la variación de energía potencial del resorte será su valor final menos su valor inicial, es decir

$$\Delta V_e = \tfrac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

que es positiva. Y al revés, si la deformación del resorte disminuye desde x_2 a x_1 durante el intervalo de movimiento, la variación de su energía potencial se hará negativa. La cuantía de estos cambios está representada por el área trapezoidal sombreada de la figura 3.4.

Como la fuerza ejercida *sobre* el resorte *por* el cuerpo móvil es igual y opuesta a la fuerza F ejercida *sobre* el cuerpo *por* el resorte (fig. 3.4), resulta que el trabajo realizado sobre el resorte es igual al realizado sobre el cuerpo cambiado de signo. Por tanto, el trabajo U realizado por el resorte sobre el cuerpo podemos reemplazarlo por $-\Delta V_e$, o variación de energía potencial del resorte cambiada de signo, con tal que el resorte esté en este caso incluido en el sistema.

(c) Teorema de las fuerzas vivas. Con el miembro elástico incluido en el sistema, modifiquemos ahora la expresión del teorema de las fuerza vivas de forma que incluya los términos de energía potencial. Si representamos por $U'_{1\text{-}2}$ el trabajo que sobre la partícula efectúan las fuerzas *que no son* ni de la gravedad ni del resorte, la ecuación 3.11 que relaciona el trabajo con la variación de energía cinética queda en la forma $U'_{1\text{-}2} + (-\Delta V_g) + (-\Delta V_e) = \Delta T$, o sea

$$U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \tag{3.17}$$

Esta otra manera de expresar la relación entre trabajo y energía suele ser de utilización mucho más cómoda que la ecuación 3.11, ya que el trabajo de las fuerzas de la gravedad y el de las del resorte se considera atendiendo a las posiciones extremas del centro de gravedad y de la longitud del resorte elásti-

http://gratislibrospdf.com/

co. El camino seguido entre dichas posiciones extremas carece de importancia en el cálculo de ΔV_g y ΔV_e.

Obsérvese que la ecuación 3.17 puede escribirse otra vez en la forma

$$T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} + U'_{1\text{-}2} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2} \qquad (3.17a)$$

Para aclarar más la diferencia entre las aplicaciones de las ecuaciones 3.11 y 3.17, en la figura 3.7 se representa una partícula de masa m obligada a describir una trayectoria fija bajo la acción de las fuerzas F_1 y F_2, la fuerza gravitatoria $W = mg$, la fuerza F del resorte y la reacción N. En la parte b de la figura se presenta el diagrama para sólido libre de la partícula aislada y se calcula el trabajo de las fuerzas F_1, F_2, W y la del resorte $F = kx$ para el intervalo de movimiento en cuestión, es decir, desde A hasta B, trabajo que se iguala, mediante la ecuación 3.11, a la variación de energía cinética ΔT. La reacción de ligadura N es normal a la trayectoria y no trabaja. En la parte c de la figura se ilustra el otro procedimiento y el resorte se incluye como parte del sistema. El trabajo de F_1 y F_2 durante el intervalo es el término $U'_{1\text{-}2}$ de la ecuación 3.17 y en el segundo miembro de la ecuación figuran las variaciones de las energías potenciales gravitatoria y elástica. Adviértase que, con el primer método, el trabajo realizado por $F = kx$ podría requerir una integración algo molesta al tener en cuenta las variaciones en módulo y dirección de F conforme la partícula se desplaza desde A hacia B. Sin embargo, con el segundo método sólo harían falta las longitudes inicial y final del resorte para calcular ΔV_e, lo cual simplifica notablemente los cálculos.

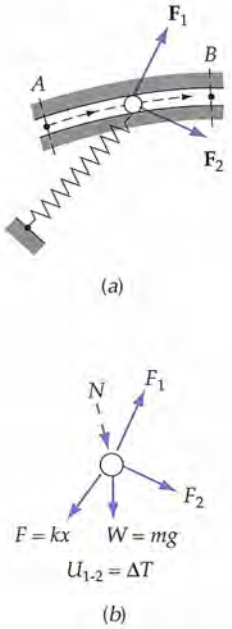


Figura 3.7

Para un sistema de partícula y resorte, la otra expresión (ec. 3.17) del teorema de las fuerzas vivas podemos volver a escribirla

$$U'_{1\text{-}2} = \Delta(T + V_g + V_e) = \Delta E \qquad (3.17b)$$

donde $E = T + V_g + V_e$ es la energía mecánica total de la partícula y con el resorte unido a ella. La ecuación 3.17*b* afirma que el trabajo neto realizado sobre el sistema por todas las fuerzas no gravitatorias ni elásticas es igual a la variación total de la energía mecánica del sistema. En los casos en que sólo intervengan fuerzas elásticas, fuerzas gravitatorias y fuerzas de ligadura que no trabajen, el término U' es nulo y la ecuación de la energía se queda en

$$\Delta E = 0 \qquad \text{o sea} \qquad E = \text{constante} \qquad (3.18)$$

Cuando E sea contante, pues, vemos que se podrán producir cambios de energía cinética a potencial y viceversa, con tal que no varíe la energía mecánica total $T + V_g + V_e$. La ecuación 3.18 expresa el *principio de conservación de la energía dinámica*.

[1]***(d) Campos de fuerzas conservativos.*** Hemos visto que el trabajo realizado contra una fuerza gravitatoria o elástica sólo depende de la variación total de posición pero no de la trayectoria concretamente seguida para alcanzar la nueva posición. Las fuerzas de dichas características están asociadas a *campos de fuerzas conservativos* que poseen una propiedad matemática de gran importancia. Consideremos un campo de fuerzas cuya fuerza **F** sea función de las coor-

[1] Optativo.

http://gratislibrospdf.com/

denadas (fig. 3.8). El trabajo realizado por **F** durante un desplazamiento $d\mathbf{r}$ de su punto de aplicación es $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ y el trabajo total cuando se desplaza desde 1 a 2 es

$$U = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz)$$

La integral $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es una integral curvilínea que depende, en general, del camino seguido para ir de un punto 1 a otro punto 2 cualesquiera del espacio. Sin embargo, si $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ fuese una *diferencial exacta*[1] $-dV$ de una cierta función escalar V de las coordenadas, tendríamos

$$U_{1\text{-}2} = \int_{v_1}^{v_2} -dV = -(V_2 - V_1) \qquad (3.19)$$

que sólo depende de los puntos extremos del movimiento y que, en consecuencia, será *independiente* del camino seguido. El signo menos ante dV es arbitrario y sólo se toma para que haya concordancia con la designación habitual del signo de la variación de energía potencial en el campo gravitatorio terrestre. Si existe V, la variación diferencial de V podrá escribirse en la forma

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial y}\, dy + \frac{\partial V}{\partial z}\, dz$$

Comparándola con $-dV = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$ se tiene

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

La fuerza también puede escribirse en la forma vectorial

$$\mathbf{F} = -\nabla V \qquad (3.20)$$

donde el símbolo ∇ representa el operador vectorial "nabla" que es

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

La cantidad V se denomina *función potencial* y la expresión ∇V recibe el nombre de *gradiente de la función potencial*.

Cuando las componentes de una fuerza pueden derivarse de un potencial de la manera descrita, se dice que la fuerza es *conservativa* y se deduce que el trabajo efectuado por **F** entre dos puntos cualesquiera es independiente del camino seguido.

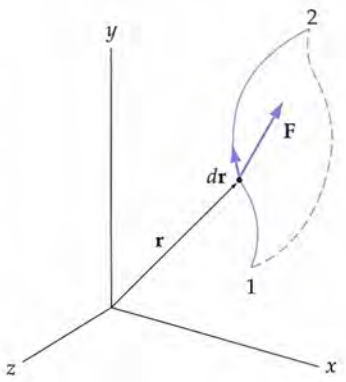


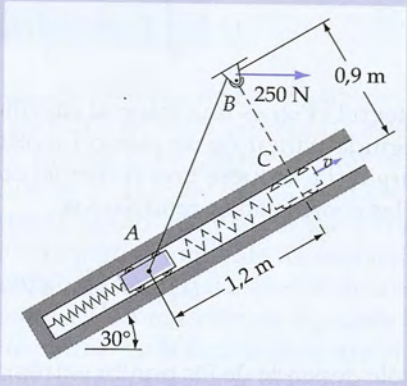
Figura 3.8

[1] Recordemos que una función $d\phi = P\, dx + Q\, dy + R\, dz$ será diferencial exacta en las coordenadas x-y-z si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

http://gratislibrospdf.com/

La corredera A de 10 kg se mueve sin rozamiento en un plano vertical a lo largo de la guía inclinada. El resorte unido a ella tiene una constante de 60 N/m y está sometido a un alargamiento de 0,6 m en la posición A, desde la que se suelta la corredera partiendo del reposo. Se aplica una fuerza constante de 250 N a una cuerda ligera que pasa por una pequeña polea en B. La polea no ofrece resistencia al movimiento de la cuerda. Calcular la velocidad v de la corredera cuando pasa por el punto C.



Solución. La corredera y la cuerda inextensible, junto con el resorte, serán analizados como un sistema único, lo que permitirá emplear la ecuación 3.17. La única fuerza que actúa sobre este sistema realizando trabajo es la tensión de 250 N aplicada a la cuerda. Mientras la corredera se mueve desde A a C, el punto de aplicación de la fuerza de 250 N se mueve una distancia $\overline{AB} - \overline{BC}$ ó 1,5 – 0,9 = 0,6 m. Así

(1) $$U'_{1\text{-}2} = 250(0{,}6) = 150 \text{ J}$$

La variación de energía cinética de la corredera es

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}m(v^2 - v_0{}^2) = \tfrac{1}{2}(10)v^2$$

donde la velocidad inicial v_0 es nula. El incremento de energía potencial gravitatoria es

(2) $$\Delta V_g = mg(\Delta h) = 10(9{,}81)(1{,}2 \operatorname{sen} 30°) = 58{,}9 \text{ J}$$

El incremento de energía potencial elástica es

(3) $$\Delta V_e = \tfrac{1}{2}k(x_2{}^2 - x_1{}^2) = \tfrac{1}{2}(60)([1{,}2 + 0{,}6]^2 - [0{,}6]^2) = 86{,}4 \text{ J}$$

Sustituyendo por sus valores en la otra ecuación energética resulta

$$[U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e] \qquad 150 = \tfrac{1}{2}(10)v^2 + 58{,}9 + 86{,}4$$

$$v = 0{,}974 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

(1) **Las reacciones de la guía sobre la corredera son perpendiculares a la dirección de su movimiento y no realiza trabajo.**

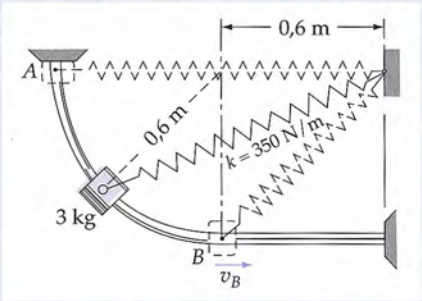
(2) **Como el desplazamiento del centro de masa de la corredera tiene una componente ascendente, ΔV_g es positivo.**

(3) **Hay que cuidar de no cometer el error de emplear $\tfrac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$ como expresión de ΔV_e. Se necesita la diferencia de los cuadrados y no el cuadrado de la diferencia.**

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMA TIPO 3.17

La corredera de 3 kg se abandona partiendo del reposo en el punto A y se desliza con rozamiento despreciable en un plano vertical a lo largo de la guía circular. El resorte al que está unida tiene una constante de 350 N/m y su longitud natural es de 0,6 m. Hallar la velocidad de la corredera al pasar por la posición B.



Solución. Los trabajos del peso y la fuerza del resorte sobre la corredera se tratarán como variaciones de energías potenciales, y la reacción de la guía sobre la corredera es perpendicular al movimiento y no realiza trabajo. Por tanto, $U'_{1\text{-}2} = 0$. Las variaciones de las energías potencial y cinética del sistema formado por la corredera y el muelle son

$$\Delta V_e = \tfrac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2) = \tfrac{1}{2}(350)\{(0{,}6[\sqrt{2}-1])^2 - (0{,}6)^2\} = -52{,}2\ \text{J}$$

(1)

$$\Delta V_g = W\Delta h = 3(9{,}81)(-0{,}6) = -17{,}66\ \text{J}$$

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = \tfrac{1}{2}3(v_B^2 - 0) = 1{,}5v_B^2$$

$$[\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0] \qquad 1{,}5v_B^2 - 17{,}66 - 52{,}2 = 0$$

$$v_B = 6{,}82\ \text{m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

(1) Obsérvese que si calculáramos el trabajo realizado por la fuerza del resorte actuante sobre la corredera mediante la integral $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ los cálculos se alargarían porque habríamos de tener en cuenta la variación del módulo de la fuerza y también la del ángulo que forma ésta con la tangente a la trayectoria. Obsérvese además que v_B depende sólo de las condiciones en los extremos y no requiere conocer la forma de la trayectoria.

PROBLEMAS

Problemas introductorios

3.143 La dos partículas de masas iguales están unidas por una varilla de masa despreciable. Si se abandonan desde el reposo en la posición indicada y se deslizan sin rozamiento por la guía vertical plana, calcular su velocidad v cuando A llega a la posición de B y ésta se encuentra en B'.

Resp. $v = 2{,}21$ m/s

3.144 La corredera de 4 kg se abandona desde el reposo en A y se desliza con rozamiento despreciable por la varilla circular

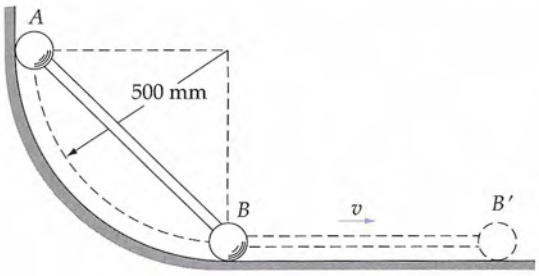


Figura problema 3.143

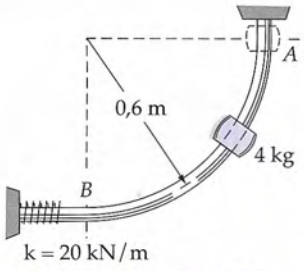


Figura problema 3.144

http://gratislibrospdf.com/

vertical. Hallar (*a*) la velocidad v de la corredera cuando llega al punto más bajo B y (*b*) la deformación máxima x del resorte.

3.145 El resorte tiene una longitud natural de 0,4 m y una constante de 200 N/m. La corredera unida a él se suelta en reposo en el punto A y se mueve en el plano vertical. Calcular la velocidad v de la corredera cuando llega a B en ausencia de rozamiento.

Resp. $v = 1{,}537$ m/s

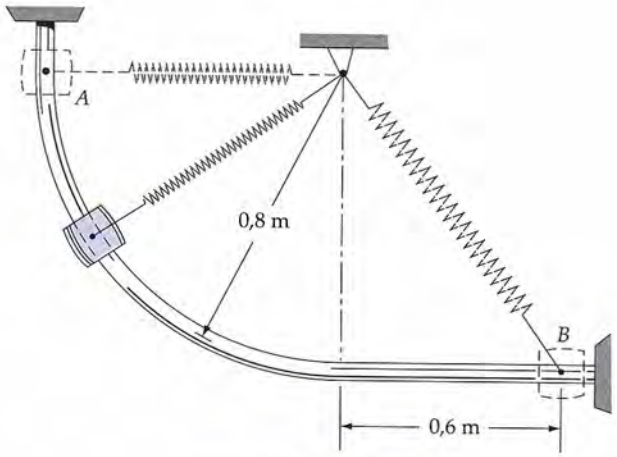


Figura problema 3.145

3.146 El punto P del cilindro de 2 kg posee una velocidad inicial $v_0 = 0{,}8$ m/s al pasar por la posición A. Despreciando la masa de las poleas y el cable, hallar la distancia y del punto P por debajo de A cuando el cilindro de 3 kg ha adquirido una velocidad ascendente de 0,6 m/s.

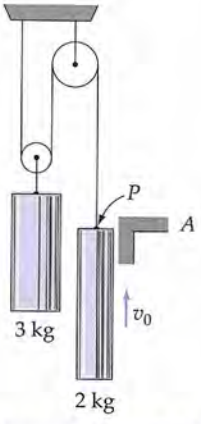


Figura problema 3.146

3.147 La pequeña cuenta de 0,25 kg se abandona sin velocidad en A y corre a lo largo del alambre liso inmóvil. Hallar la fuerza N entre el alambre y la cuenta cuando ésta pasa por el punto B.

Resp. $N = 14{,}42$ N

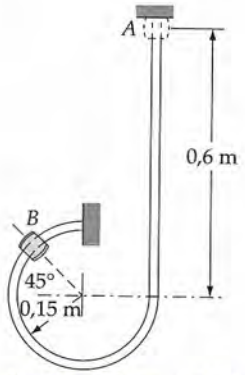


Figura problema 3.147

3.148 Cuando la corredera de masa m pasa por B, el resorte de constante k tiene su longitud natural. Si la corredera parte del reposo en A, hallar su celeridad cuando pasa por los puntos B y C. ¿Qué fuerza normal ejerce la guía sobre la corredera en la posición C? Despreciar el rozamiento entre la corredera y la guía, la cual está en un plano vertical.

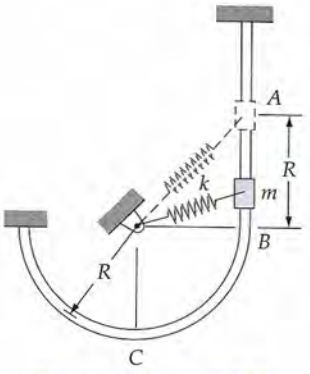


Figura problema 3.148

3.149 La barra liviana está articulada en O a un eje de giro y lleva las dos masas puntuales de 2 y 4 kg. Si la barra se abandona desde el reposo con $\theta = 60°$ y oscila en el plano vertical, calcular (*a*) la velocidad v de la masa de 2 kg inmediatamente antes de chocar con el resorte en la posición marcada a trazos y (*b*) la compresión máxima x del resorte. Se supondrá que x es pequeña de modo que la posición de la barra cuando comprime el resorte es prácticamente horizontal.

Resp. (*a*) $v = 1{,}162$ m/s, (*b*) $x = 12{,}07$ mm

http://gratislibrospdf.com/

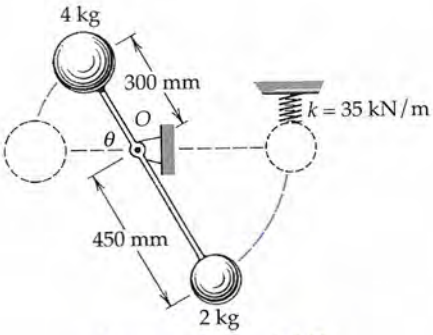


Figura problema 3.149

Problemas representativos

3.150 El anillo de 7 kg se desliza libremente por la barra fija vertical y recibe una velocidad ascendente $v_0 = 2{,}5$ m/s en la posición representada. El anillo comprime el resorte de arriba y es así proyectado hacia abajo. Calcular la deformación máxima x resultante en el resorte inferior.

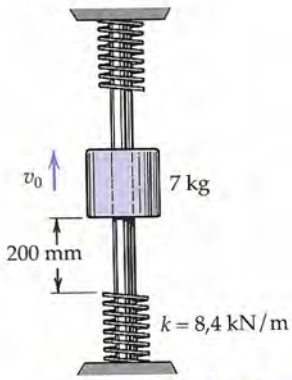


Figura problema 3-150

3.151 Los dos resortes, ambos de rigidez $k = 1{,}2$ kN/m, tienen longitudes iguales y están sin deformar cuando $\theta = 0$. Si el mecanismo parte del reposo en la posición $\theta = 20°$, hallar su velocidad angular $\dot{\theta}$ cuando $\theta = 0$. La masa m de cada esfera es 3 kg. Tratar las esferas como partículas y despreciar las masas de las varillas y los resortes.

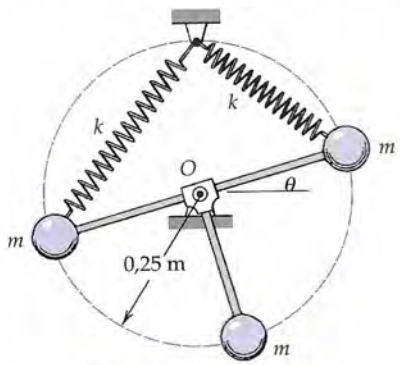


Figura problema 3.151

Resp. $\dot{\theta} = 4{,}22$ rad/s

3.152 El cilindro de 0,9 kg se abandona desde el reposo en A y se desliza libremente por la varilla hacia arriba, chocando con el tope B a la velocidad v. La longitud natural del resorte de rigidez $k = 24$ N/m es 375 mm. Calcular v.

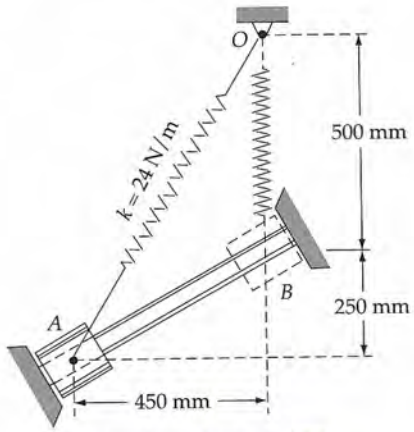


Figura problema 3.152

3.153 Las dos barras iguales de masa despreciable parten a la vez del reposo con $\theta = 30°$. Hallar la velocidad v de cada esfera de 1,2 kg cuando $\theta = 90°$, posición en que el resorte tiene su longitud natural.

Resp. $v = 2{,}71$ m/s

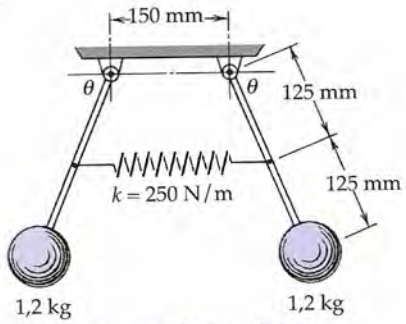


Figura problema 3.153

3.154 Se desea que el recipiente de 45 kg, al ser abandonado en reposo en la posición representada, llegue sin velocidad a la plataforma situada 2 m por debajo. Especificar la masa m que debe tener el contrapeso.

http://gratislibrospdf.com/

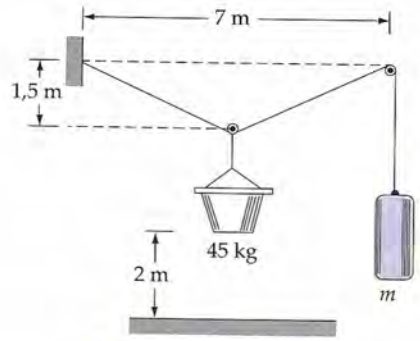


Figura problema 3.154

3.155 Si el sistema se suelta desde el reposo, hallar las celeridades de ambas masas cuando B ha recorrido 1 m. Despreciar el rozamiento y las masa de las poleas.

Resp. $v_A = 0{,}616$ m/s, $v_B = 0{,}924$ m/s

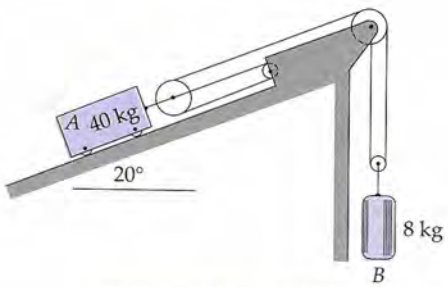


Figura problema 3.155

3.156 La corredera C de 1,5 kg se mueve por la varilla inmóvil bajo la acción del resorte cuya longitud natural es de 0,3 m. Si la velocidad de la corredera es de 2 m/s en el punto A y de 3 m/s en el punto B, calcular el trabajo U_f que realiza el rozamiento entre esos dos puntos. Hallar asimismo la fuerza de rozamiento media que actúa sobre la corredera entre A y B si la longitud del trayecto es de 0,70 m. El plano x-y es horizontal.

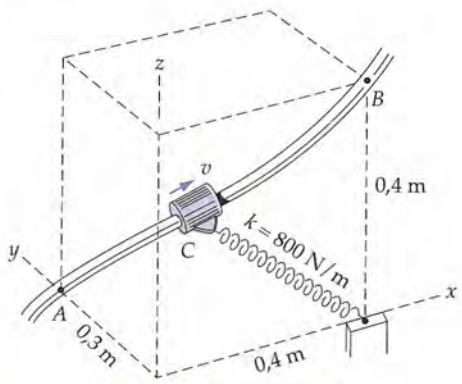


Figura problema 3.156

3.157 Al diseñar un rizo interno para una atracción de feria, se desea mantener una aceleración centrípeta constante en toda su longitud. Suponer que es despreciable la pérdida de energía durante el movimiento y hallar el radio de curvatura ρ de la trayectoria en función de la altura y por encima del punto más bajo A, donde la velocidad y el radio de curvatura son v_0 y ρ_0, respectivamente. Para un valor de ρ_0 dado, ¿cuál es el valor mínimo de v_0 para que el vehículo no se separe de la pista en la cima del rizo?

Resp. $\rho = \rho_0\left(1 - \dfrac{2gy}{{v_0}^2}\right)$, $v_{0_{\min}} = \sqrt{\rho_0 g}$

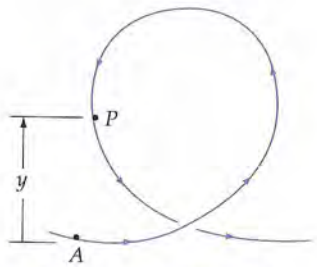


Figura problema 3.157

3.158 La masa del anillo es 2 kg y el mismo está unido al resorte de masa despreciable cuya rigidez es 30 N/m y longitud natural 1,5 m. El anillo se suelta en A desde el reposo y sube por el vástago liso bajo la acción de la fuerza constante de 40 N. Calcular la velocidad v del anillo cuando pasa por la posición B.

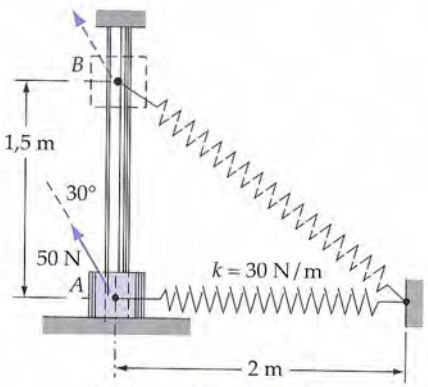


Figura problema 3.158

3.159 Una nave espacial m se dirige hacia el centro de la Luna con una velocidad de 3000 km/h cuando se halla a una distancia de la superficie de nuestro satélite igual al radio R del mismo. Calcular la velocidad de impacto v contra la superficie lunar si a la nave espacial le fallan los retrocohetes. Se supone que la Luna se halla inmóvil en el espacio. El radio de ésta es R

http://gratislibrospdf.com/

= 1738 km y la aceleración de la gravedad en su superficie es 1,62 m/s².

Resp. $v = 6740$ km/h

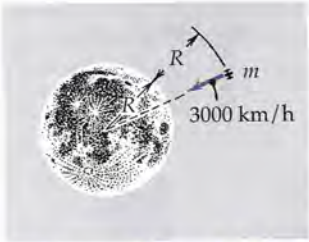


Figura problema 3.159

3.160 El sistema formado por las dos esferas y las varillas acodadas en ángulo recto se abandona desde el reposo en la posición $\theta = 0$. Hallar la constante k del resorte, si se observa que el sistema se halla momentáneamente en reposo cuando $\theta = 45°$. Para $\theta = 0$ el resorte tiene su longitud natural. Tratar las esferas como partículas y despreciar el rozamiento.

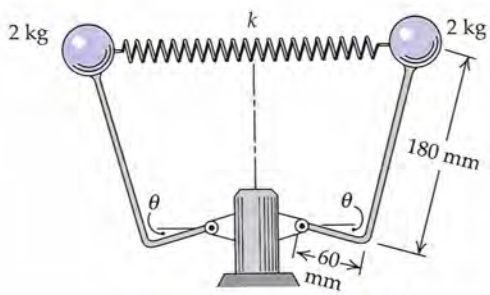


Figura problema 3.160

3.161 En la posición A, correspondiente al estado no deformado de los dos resortes horizontales, la bola de 1,5 kg recibe una velocidad inicial $v_A = 2{,}5$ m/s en el plano vertical. La bola describe la trayectoria señalada con trazo discontinuo y pasa por el punto B, a 125 mm directamente por debajo de A. Calcular la velocidad v_B cuando pasa por B. La rigidez de cada resorte es 1800 N/m.

Resp. $v_B = 2{,}68$ m/s

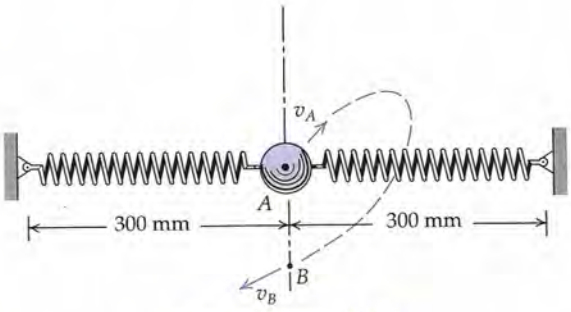


Figura problema 3.161

3.162 Un saltador con pértiga de 80 kg, cuya pértiga uniforme de 4,9 m tiene una masa de 4,5 kg, se aproxima al obstáculo con una velocidad v y consigue salvar apenas la barra a una altura de 5,5 m. Al pasar por encima de la barra, su velocidad y la de la pértiga son prácticamente nulas. Calcular el valor mínimo posible de v para que pueda dar el salto. Durante la aproximación los centros de gravedad tanto del atleta como de la pértiga horizontal se hallan a 1,1 m por encima del suelo.

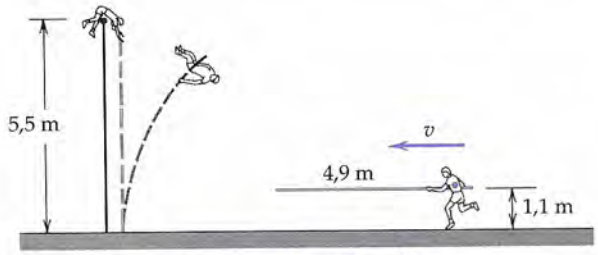


Figura problema 3.162

3.163 Cuando el cilindro de 5 kg se abandona en reposo en la guía vertical con $\theta = 0$, cada resorte de rigidez $k = 3{,}5$ kN/m está sin comprimir. Las barras pueden deslizarse libremente por sus collarines giratorios y comprimir los resortes. Calcular la velocidad v del cilindro al pasar por la posición $\theta = 30°$.

Resp. $v = 0{,}972$ m/s

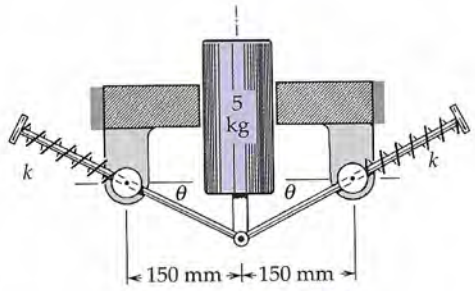


Figura problema 3.163

3.164 El punto fijo O ocupa uno de los focos de la guía elíptica. El resorte tiene una rigidez de 3 N/m y está sin estirar cuando la corredera está en A. Si la celeridad v_A es tal que la celeridad de la corredera de 0,4 kg se aproxima a cero en C, hallar su celeridad en B. La guía lisa está en un plano vertical. (Si

http://gratislibrospdf.com/

es necesario, véase la ecuación 3.39 con relación a la geometría de la elipse.)

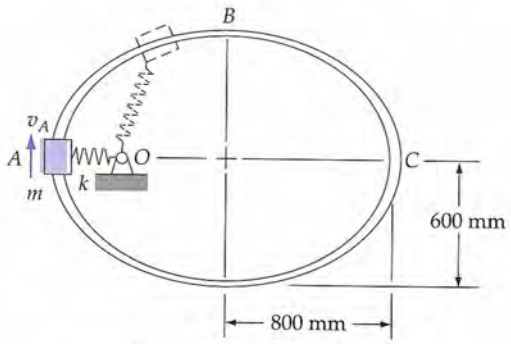


Figura problema 3.164

3.165 El mecanismo se suelta desde el reposo con $\theta = 180°$, en que el resorte no comprimido de rigidez $k = 900$ N/m está iniciando el contacto con la base inferior del anillo de 4 kg. Hallar el ángulo θ correspondiente a la máxima compresión del resorte. El movimiento tiene lugar en el plano vertical y la masa de las barras puede despreciarse.

Resp. $\theta = 43{,}8°$

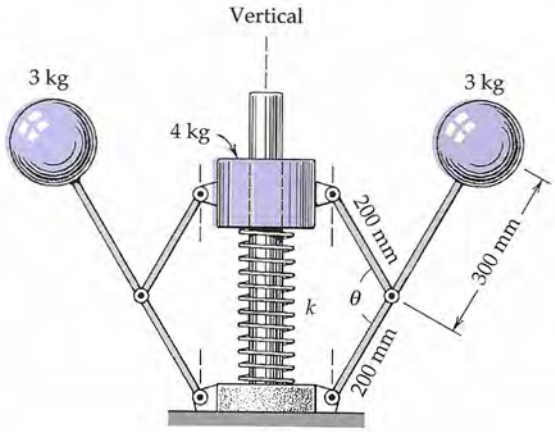


Figura problema 3.165

3.166 El cilindro de masa m está sujeto en A al soporte del collarín mediante un resorte de rigidez k. El collarín se ajusta holgadamente en el árbol vertical, el cual hace descender al collarín y al cilindro con una velocidad constante v. Cuando el collarín choca con la base B, se detiene bruscamente prácticamente sin rebote. Hallar la deformación adicional máxima δ del resorte tras el impacto.

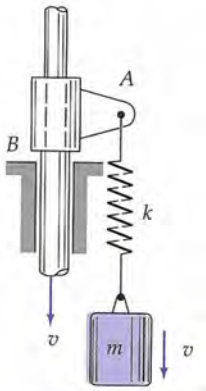


Figura problema 3.166

3.167 El mecanismo articulado de barras mueve la esfera de 3 kg y el resorte tiene su longitud natural cuando $\theta = 90°$. Si el mecanismo parte del reposo en $\theta = 90°$, calcular la velocidad v de la esfera cuando pasa por la posición $\theta = 135°$. Las barras están en el plano vertical y sus masas son pequeñas y pueden despreciarse.

Resp. $v = 1{,}143$ m/s

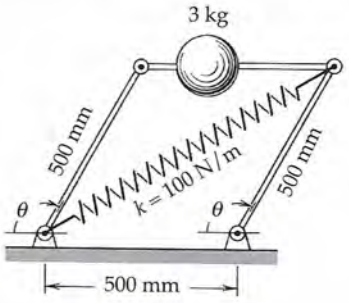


Figura problema 3.167

3.168 La longitud natural del resorte es de 625 mm. Si el sistema se abandona en reposo en la posición representada, hallar

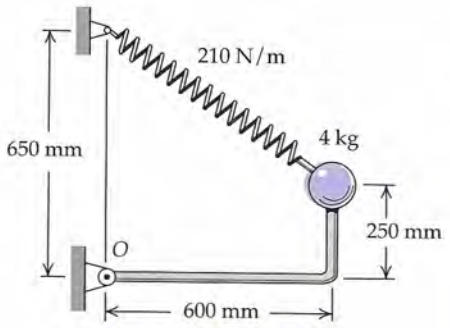


Figura problema 3.168

http://gratislibrospdf.com/

la celeridad v de la bola (*a*) cuando ha descendido una distancia vertical de 250 mm y (*b*) cuando la varilla ha girado 35°.

3.169 Las vagonetas de unas montañas rusas llevan una celeridad $v_2 = 90$ km/h en el punto más bajo de la pista. Hallar su velocidad en el punto más alto de la misma. Despreciar la pérdida de energía por rozamiento. (*Advertencia*: Mucho cuidado con la variación de energía potencial del tren de vagonetas.)

Resp. $v_2 = 35{,}1$ km/h

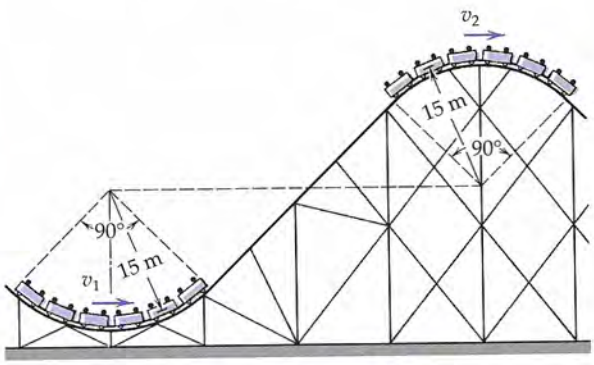


Figura problema 3.169

3.170 La corredera de 0,6 kg parte del reposo en A y se desliza por la guía parabólica lisa (contenida en un plano vertical) bajo la influencia de su propio peso y del resorte de constante 120 N/m. Hallar la celeridad de la corredera cuando pasa por B y la correspondiente fuerza normal que la guía ejerce sobre ella. La longitud natural del resorte es 200 mm.

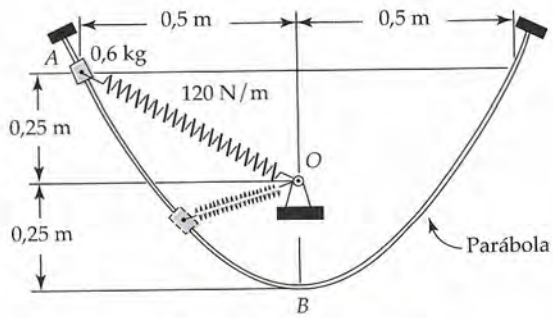


Figura problema 3.170

3.171 En el viaje de regreso a la Tierra, una cápsula espacial tiene una velocidad absoluta de 24 000 km/h en el punto A que dista 7000 km del centro de la Tierra. Calcular la velocidad absoluta de la cápsula cuando alcanza el punto B a 6500 km del centro de la Tierra. La trayectoria entre estos dos puntos queda fuera de la influencia de la atmósfera terrestre.

Resp. $v_B = 26\,300$ km/h

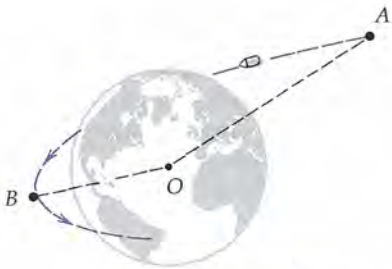


Figura problema 3.171

3.172 Un satélite artificial se pone en órbita elíptica alrededor de la Tierra y su velocidad en el perigeo P es v_P. Hallar la expresión de la velocidad v_A en el apogeo A. Los radios de A y P son, respectivamente, r_A y r_P. Téngase en cuenta que la energía total permanece constante.

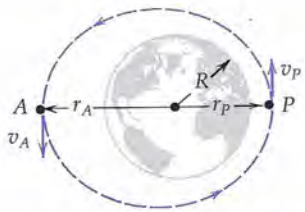


Figura problema 3.172

3.173 El vástago del émbolo vertical de 2 kg ocupa la posición marcada a trazos cuando descansa en equilibrio apoyado en el resorte de rígidez $k = 1{,}6$ kN/m. El extremo superior del resorte está soldado al émbolo y el inferior a la placa de base. Si se eleva el émbolo 40 mm por encima de su posición de equilibrio y se suelta partiendo del reposo, calcular la velocidad v cuando golpea contra el disco A. El rozamiento es despreciable.

Resp. $v = 1{,}119$ m/s

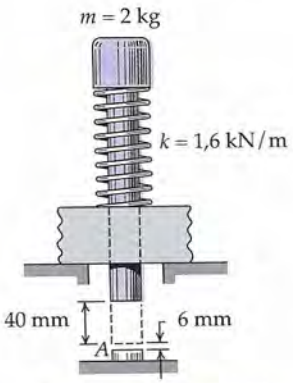


Figura problema 3.173

http://gratislibrospdf.com/

3.174 La cuerda que se representa en la parte *a* de la figura se suelta a partir del reposo en la guía lisa semicircular y adquiere una velocidad v cuando ha abandonado por completo la guía tal como se ve en la parte *b* de la figura. Hallar v. (*Sugerencia*: Al hallar la variación de energía potencial, imagínese que la porción semicircular de la cuerda correspondiente a la posición inicial pasa a ser la parte inferior de la cuerda de longitud equivalente en la posición final.)

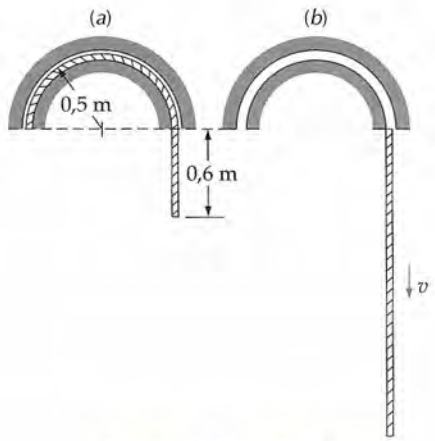


Figura problema 3.174

▶3.175 El extremo libre de una cuerda de longitud L y masa ρ por unidad de longitud se suelta desde el reposo tal como se muestra en la parte *a* de la figura. Hallar la velocidad v de la porción móvil de la cuerda en función de y. Discutir el significado de v cuando $y = L$ y explicar todos los cambios energéticos.

$$Resp.\ v = \sqrt{2gy\frac{L - y/2}{L - y}}$$

▶3.176 El funicular se compone de dos vagones de pasajeros, de masa m cada uno, sujetos cada uno a un extremo del cable de longitud L y masa ρ por unidad de longitud. El sistema se acciona aplicando un par M al tambor de radio r instalado en la parte superior del recorrido. El resbalamiento queda impedido arrollando varias vueltas de cable en torno al tambor y la longitud de cable arrollado en el tambor puede despreciarse en comparación con L. Si los vagones arrancan del reposo con $x = 0$ y M es constante, deducir la expresión de la velocidad de cada vagón en función de x. Despreciar la masa del tambor y todos los rozamientos.

$$Resp.\ v = \sqrt{\frac{2}{2m + \rho L}}\sqrt{\frac{Mx}{r} - \rho g x(L - x)\ \text{sen}\ \theta}$$

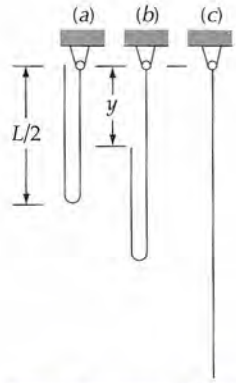


Figura problema 3.175

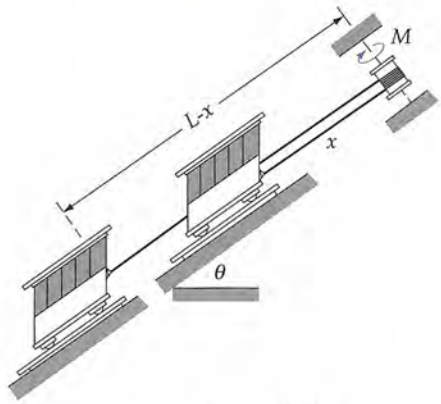


Figura problema 3.176

SECCIÓN C. IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

3.8 INTRODUCCIÓN

En los dos apartados anteriores hemos centrado nuestra atención en las ecuaciones que relacionan trabajo y energía deducidas al integrar respecto al desplazamiento del punto material la ecuación del movimiento $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Como consecuencia encontramos que las variaciones de velocidad pueden expresar-

http://gratislibrospdf.com/

se directamente en función del trabajo o en función de la variación de energía total. En los dos apartados siguientes, vamos a dirigir la atención a la integración de la ecuación del movimiento respecto al tiempo y no respecto al desplazamiento y ello nos llevará a las ecuaciones del impulso y la cantidad de movimiento. Veremos que estas ecuaciones facilitan notablemente la resolución de numerosos problemas en que las fuerzas aplicadas actúan durante intervalos de tiempos cortísimos (como en los problemas de choques) o bien durante intervalos de tiempo especificados.

3.9 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Consideremos de nuevo el movimiento curvilíneo general en el espacio de un punto material de masa m (fig. 3.9), cuyo vector de posición es $\mathbf{r}$ con relación a un origen fijo O. La velocidad de esa partícula es $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ y es tangente a su trayectoria (que se representa en trazo discontinuo). La resultante $\Sigma\mathbf{F}$ de todas las fuerzas actuantes sobre m tiene la misma dirección y sentido que su aceleración. La ecuación fundamental del movimiento (ec. 3.3) para esta partícula podemos escribirla en la forma

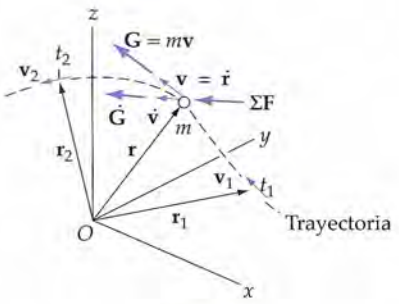


Figura 3.9

$$\Sigma\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \qquad \text{o sea} \qquad \Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}} \tag{3.21}$$

donde, por definición, el producto de la masa por la velocidad es la *cantidad de movimiento* $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$ de la masa puntual o partícula. Según la ecuación 3.21 *la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un punto material es igual a la variación por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento.* La unidad SI de cantidad de movimiento será kg·m/s o, lo que es lo mismo, N · s.

Como la 3.21 es una ecuación vectorial, debemos tener presente que, además de ser iguales los módulos de $\Sigma\mathbf{F}$ y $\dot{\mathbf{G}}$, la dirección y sentido de la fuerza resultante deben coincidir con la dirección y sentido de la derivada temporal de la cantidad de movimiento, que tiene la misma dirección y sentido que la derivada temporal de la velocidad. La ecuación 3.21 es una de las relaciones más útiles e importantes de la Dinámica y conserva su validez en tanto no varíe con el tiempo la masa m de la partícula. En el apartado 4.7 del capítulo 4 se trata del caso en que m varía con el tiempo. De momento, las tres componentes escalares de la ecuación 3.21 podemos escribirlas en la forma

$$\Sigma F_x = \dot{G}_x \qquad \Sigma F_y = \dot{G}_y \qquad \Sigma F_z = \dot{G}_z \tag{3.22}$$

las cuales pueden aplicarse independientemente unas de otras.

Hasta aquí, en este apartado no hemos hecho otra cosa que escribir de otra manera la segunda ley de Newton e introducir en ella la cantidad de movimiento. No obstante, ahora podemos describir el efecto de la fuerza resultante $\Sigma\mathbf{F}$ sobre el movimiento del punto material a través de un intervalo de tiempo finito sin más que integrar la ecuación 3.21 respecto al tiempo t. Al multiplicar la ecuación por dt resulta $\Sigma\mathbf{F}\,dt = d\mathbf{G}$, e integrando ésta entre los instantes t_1 y t_2 obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{F}\,dt = \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1 = \Delta\mathbf{G} \tag{3.23}$$

http://gratislibrospdf.com/

donde $\mathbf{G}_2 = m\mathbf{v}_2$ es la cantidad de movimiento en el instante t_2 y $\mathbf{G}_1 = m\mathbf{v}_1$ es la cantidad de movimiento en el instante t_1. El producto de la fuerza por el tiempo se llama *impulso de la fuerza*, y la ecuación 3.23 dice que el *impulso total de la fuerza que se ejerce sobre m es igual a la correspondiente variación de la cantidad de movimiento*. Esta relación 3.23 suele conocerse como *teorema de la cantidad de movimiento*.

La ecuación 3.23 podríamos escribirla también como

$$\mathbf{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{F}\, dt = \mathbf{G}_2 \qquad (3.23a)$$

que simplemente establece que la cantidad de movimiento inicial del punto material más el impulso que recibe es igual a su cantidad de movimiento final.

La integral del impulso es un vector que, en el caso general, puede variar tanto en módulo como en dirección durante el intervalo de tiempo. En tales condiciones, será necesario expresar $\Sigma\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ en forma de componentes y luego combinar las componentes integradas. Entonces, la ecuación 3.23 descompuesta en sus componentes escalares se convierte en

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x\, dt = (mv_x)_2 - (mv_x)_1$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y\, dt = (mv_y)_2 - (mv_y)_1$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_z\, dt = (mv_z)_2 - (mv_z)_1$$

Estas tres ecuaciones escalares son completamente independientes. Las expresiones escalares correspondientes a la ecuación vectorial 3.23*a* no son sino esa misma ecuación reordenada.

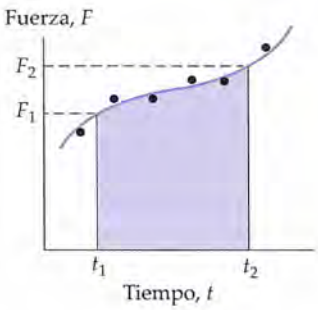


Figura 3.10

En ocasiones, alguna de las fuerzas que actúan sobre un punto material varía con el tiempo de algún modo que se determina experimentalmente u otros procedimientos aproximados. En estos casos, debe recurrirse a la integración gráfica o numérica. Por ejemplo, si una fuerza F que actúa sobre una partícula en una dirección dada varía con el tiempo t tal como se muestra en la figura 3.10, el impulso $\int_{t_1}^{t_2} F\, dt$ de esa fuerza entre los instantes t_1 y t_2 será el área comprendida bajo la curva.

Al calcular el impulso es necesario incluir el efecto de *todas* las fuerzas que se ejercen sobre m salvo aquellas cuyo módulo sea despreciable. El lector debe estar ya perfectamente al corriente de que el único procedimiento fiable para tener en cuenta los efectos de *todas* las fuerzas es aislar la partícula en cuestión dibujando su *diagrama para sólido libre*.

Conservación de la cantidad de movimiento. Si la fuerza resultante que actúa sobre un punto material es nula durante un intervalo de tiempo, vemos que la ecuación 3.21 impone que su cantidad de movimiento $\mathbf{G}$ permanezca constante. Se dice, en tal caso, que la cantidad de movimiento del punto material *se conserva*. Puede ocurrir que la cantidad de movimiento se conserve según una de las direcciones coordenadas, como la x, pero no siempre en las direcciones y o z. Un examen atento del diagrama para sólido libre de la partícula revelará si

http://gratislibrospdf.com/

su cantidad de movimiento total es nula en alguna dirección. Si es así, la correspondiente cantidad de movimiento no varía (se conserva) en esa dirección.

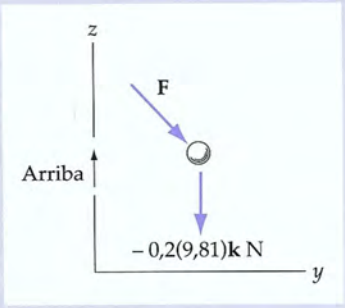
Consideremos ahora el movimiento de dos puntos materiales a y b que interactúan durante un intervalo de tiempo. Si, durante ese intervalo, las únicas fuerzas no equilibradas que se ejercen sobre esas partículas son las fuerzas recíprocas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$, resulta que la cantidad de movimiento de la partícula a es la opuesta a la cantidad de movimiento de la partícula b. Por consiguiente, según la ecuación 3.23, la variación $\Delta\mathbf{G}_a$ de la cantidad de movimiento de a es la variación $\Delta\mathbf{G}_b$ de b cambiada de signo. Es decir, tenemos que $\Delta\mathbf{G}_a = -\Delta\mathbf{G}_b$; o sea, $\Delta(\mathbf{G}_a + \mathbf{G}_b) = \mathbf{0}$. Así pues, durante el intervalo, la cantidad de movimiento total $\mathbf{G} = \mathbf{G}_a + \mathbf{G}_b$ del sistema permanece constante y podemos escribir

$$\Delta\mathbf{G} = \mathbf{0} \qquad \text{o sea} \qquad \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 \tag{3.24}$$

Esta ecuación 3.24 expresa el *principio de conservación de la cantidad de movimiento.*

PROBLEMA TIPO 3.18

Una masa puntual de 0,2 kg se mueve dentro del plano vertical y-z (z vertical, y horizontal) bajo la acción de su propio peso y de una fuerza F que varía con el tiempo. Su cantidad de movimiento, en kg·m/s, está dada por $G = \frac{3}{2}(t^2+3)\mathbf{j} - \frac{2}{3}(t^3-4)\mathbf{k}$, *donde t es el tiempo en segundos. Determinar* $\mathbf{F}$ *para* $t = 2$ *s.*



Solución. El peso, expresado vectorialmente, es $-0{,}2(9{,}81)\mathbf{k}$ N. La ecuación que relaciona las fuerzas con la cantidad de movimiento queda

$$[\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}] \qquad \mathbf{F} - 0{,}2(9{,}81)\mathbf{k} = \frac{d}{dt}\left[\tfrac{3}{2}(t^2+3)\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}(t^3-4)\mathbf{k}\right]$$

$$= 3t\mathbf{j} - 2t^2\mathbf{k}$$

$$\text{Para } t = 2s \qquad \mathbf{F} = 0{,}2(9{,}81)\mathbf{k} + 3(2)\mathbf{j} - 2(2^2)\mathbf{k}$$

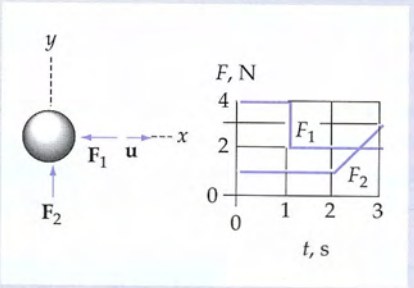
$$= 6\mathbf{j} - 6{,}04\mathbf{k}$$

$$\text{Entonces} \qquad F = \sqrt{6^2 + (6{,}04)^2} = 8{,}51 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

① No debe olvidarse que en $\Sigma\mathbf{F}$ se incluyen todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, entre las cuales se encuentra el peso.

http://gratislibrospdf.com/

Una masa puntual de 0,5 kg lleva una velocidad u = 10 m/s dirigida según el eje x en el instante t = 0. Sobre esta partícula se ejercen las fuerzas $\mathbf{F}_1$ *y* $\mathbf{F}_2$ *cuyas intensidades varían con el tiempo según se indica en la gráfica adjunta. Determinar la velocidad final* **v** *de la partícula al cabo de 3 segundos.*



Solución. Al aplicar el teorema de la cantidad de movimiento en forma de componentes, se obtiene para las direcciones x e y respectivamente

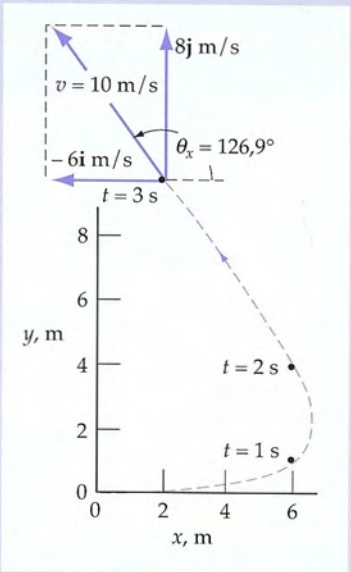
$$\left[\int \Sigma F_x \, dt = m\Delta v_x\right] \qquad -[4(1) + 2(3-1)] = 0{,}5(v_x - 10)$$

$$v_x = -6 \text{ m/s}$$

(1)

$$\left[\int \Sigma F_x \, dt = m\Delta v_x\right] \qquad [1(2) + 2(3-2)] = 0{,}5(v_y - 0)$$

$$v_y = 8 \text{ m/s}$$



Así pues,

$$\mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} \text{ m/s} \qquad \text{y} \qquad v = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m/s}$$

$$\theta_x = \text{arctg}\,\frac{8}{-6} = 126{,}9^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

(2)

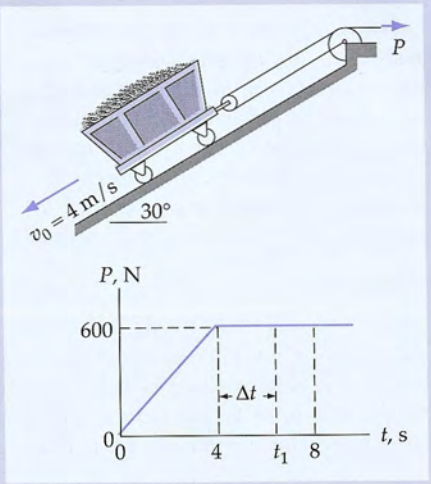
Si bien no se solicita, se ha representado la trayectoria de la masa puntual durante los tres primeros segundos. Se representa la velocidad para $t = 3$ s junto con sus componentes.

(1) El impulso en cada dirección es el área correspondiente situada bajo la curva de la fuerza en función del tiempo. Obsérvese que F_1 tiene el sentido de x negativo, por lo que produce un impulso negativo.

(2) Muy importante es tener en cuenta que deben respetarse cuidadadosamente los signos algebraicos al aplicar las ecuaciones de la cantidad de movimiento. Además, debemos tener presente que el impulso y la cantidad de movimiento son magnitudes vectoriales, al contrario que el trabajo y la energía, que son escalares.

http://gratislibrospdf.com/

Una vagoneta de mina de 150 kg rueda rampa abajo a 4 m/s cuando en el instante $t = 0$ se aplica al cable una fuerza P, tal como se representa. Esa fuerza aumenta constantemente con el tiempo hasta valer 600 N cuando $t = 4$ s, instante a partir del cual conserva ese valor. Calcular: (a) el instante t_1 en que la vagoneta invierte su marcha y (b) la velocidad v de la misma para $t = 8$ s. Se tratará la vagoneta como si fuera una masa puntual.



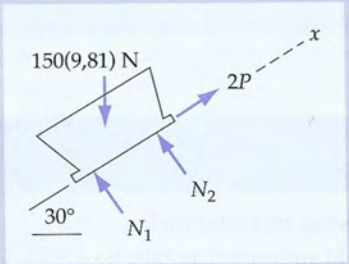
Solución. Se representa la gráfica de la variación de P con el tiempo y el diagrama para sólido libre de la vagoneta.

Parte (a). La vagoneta invierte su marcha cuando su velocidad se anula. Supongamos que ese estado se alcanza para $t = 4 + \Delta t$ segundos. La ecuación de la cantidad de movimiento aplicada en la dirección x nos dará

$$\left[\int \Sigma F_x dt = m\Delta v_x\right]$$

① $\frac{1}{2}(4)(2)(600) + 2(600)\Delta t - 150(9{,}81)\ \text{sen}\ 30°(4 + \Delta t) = 150(0 - [-4])$

$$464\Delta t = 1143 \qquad \Delta t = 2{,}46\ \text{s} \qquad t = 4 + 2{,}46 = 6{,}46\ \text{s} \qquad \textit{Resp.}$$



Parte (b). Al aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento al intervalo completo resulta

$$\left[\int \Sigma F_y dt = m\Delta v_y\right]$$

$\frac{1}{2}(4)(2)(600) + 4(2)(600)\Delta t - 150(9{,}81)\ \text{sen}\ 30°(8) = 150(v - [-4])$

$$150v = 714 \qquad v = 4{,}76\ \text{m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

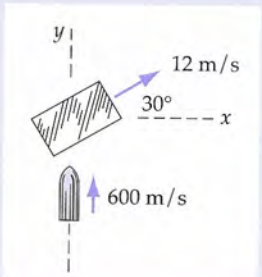
Se habría obtenido el mismo resultado estudiando el intervalo comprendido entre t_1 y 8 s.

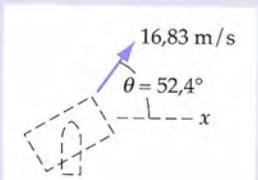
① **El diagrama para sólido libre nos impide caer en el error de calcular el impulso producido por una fuerza *P* en lugar de 2*P* u olvidar el impulso producido por el peso. El primer término de la ecuación es el área triangular de la relación *P*- *t* durante los 4 primeros segundos, doblada para la fuerza 2*P*. Los signos se han escrito en concordancia con el sentido positivo asignado a la coordenada de posición**

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMA TIPO 3.21

La bala de 50 g, que se desplaza a 600 m/s, choca centralmente con el bloque de 4 kg y se incrusta en él. Si el bloque se deslizaba, sobre un plano horizontal liso, con una celeridad de 12 m/s, en la dirección que se indica, justo antes del impacto, determinar la velocidad v del bloque y la bala inmediatamente después del impacto.





Solución. Como la fuerza del impacto es interna al sistema compuesto por el bloque y la bala y no hay fuerzas exteriores que actúen sobre el sistema en el plano del movimiento, se deduce que la cantidad de movimiento del sistema se conserva en las direcciones x e y. Por lo tanto,

$$[\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2] \qquad 0{,}050(600\mathbf{j}) + 4(12)(\cos 30^\circ \mathbf{i} + \operatorname{sen} 30^\circ \mathbf{j}) = (4 + 0{,}050)\mathbf{v} \quad (1)$$

$$\mathbf{v} = 10{,}26\mathbf{i} + 13{,}33\mathbf{j} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

(1) Escribir que la variación de la cantidad de movimiento es igual a cero, $\Sigma G = 0$, es lo mismo que afirmar que las cantidades de movimiento inicial y final son iguales.

La celeridad final y su dirección son, pues,

$$[v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}] \qquad v = \sqrt{(10{,}26)^2 + (13{,}33)^2} = 16{,}83 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$[\operatorname{tg}\theta = v_y/v_x] \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{13{,}33}{10{,}26} = 1{,}30 \qquad \theta = 52{,}4^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

3.177 El automóvil de 1500 kg sube a 30 km/h por la pendiente del 10 por ciento cuando el conductor acelera durante 8 s hasta los 60 km/h. Calcular el valor medio temporal F de la fuerza total tangente a la calzada que soportan los neumáticos durante los 8 s. Tratar el vehículo como una partícula y despreciar la resistencia del aire.

Resp. $F = 3{,}03$ kN

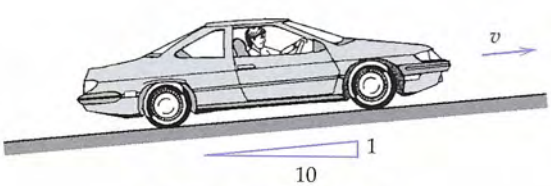


Figura problema 3.177

3.178 La velocidad de una partícula de 1,2 kg está dada por $\mathbf{v} = 1{,}5t^3\mathbf{i} + (2{,}4 - 3t^2)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, donde v está en metros por segundo y el tiempo t está en segundos. Hallar la cantidad de movimiento $\mathbf{G}$ de la partícula, su módulo G y la fuerza total que actúa sobre la partícula cuando $t = 2$ s.

3.179 Los dos motores de maniobra orbital de la lanzadera espacial desarrollan un empuje de 25 kN cada uno. Si el vehículo recorre su órbita con una celeridad de 26 000 km/h, ¿cuánto tardaría en alcanzar una celeridad de 26 200 km/h tras haber encendido ambos motores? La lanzadera tiene una masa de 90 Mg.

Resp. $t = 1$ min 36 s

3.180 Bajo la acción del empuje T de su motor y de la resistencia R del aire, igual y opuesta a T, un avión de propulsión a chorro de masa 10 Mg vuela horizontalmente con una celeridad constante de 1000 km/h. El piloto enciende dos cohetes auxiliares, cada de los cuales desarrolla un empuje T_0 de 8 kN

http://gratislibrospdf.com/

durante 9 s. Si el avión adquiere una velocidad horizontal de 1050 km/h al cabo de los nueve segundos, calcular el incremento medio temporal ΔR de la resistencia del aire. La masa del combustible consumido es despreciable en comparación con la del avión.

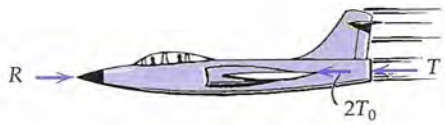


Figura problema 3.180

3.181 Un proyectil de 75 g que va a 600 m/s choca y se incrusta en el bloque de 50 kg, inicialmente inmóvil. Calcular la energía que se pierde en el impacto. Expresar la respuesta como valor absoluto $|\Delta E|$ y como porcentaje n de la energía original E del sistema.

Resp. $|\Delta E| = 13\,480$ J, $n = 99{,}9\%$

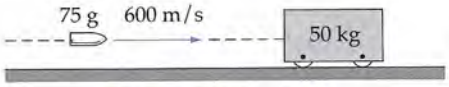


Figura problema 3.181

3.182 El vagón de carga A de masa total 80 Mg se mueve a 3 km/h sobre una vía horizontal de una playa de maniobras. El vagón B de masa total 60 Mg y que se mueve a 5 km/h alcanza al vagón A y se engancha al mismo. Hallar (*a*) la velocidad v del conjunto de ambos vagones cuando se muevan a la vez tras el enganche y (*b*) la pérdida de energía $|\Delta E|$ originada por el impacto.

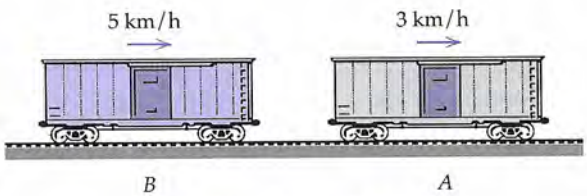


Figura problema 3.182

3.183 Un muchacho de masa 50 kg corre y salta a su trineo de 10 kg con una velocidad horizontal de 4 m/s. Si el muchacho y el trineo se deslizan 20 m sobre la nieve plana antes de detenerse, calcular el coeficiente de rozamiento μ_c entre la nieve y los patines del trineo.

Resp. $\mu_c = 0{,}028$

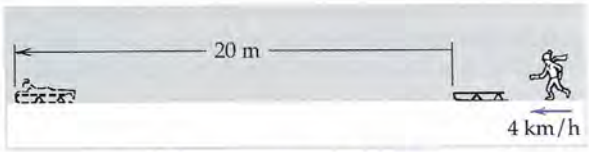


Figura problema 3.183

3.184 Un vagón de carga de masa m y celeridad inicial v choca y engancha con otros dos vagones iguales. Calcular la celeridad final v' del grupo de tres vagones y la fracción n de energía perdida si (*a*) la distancia de separación inicial es $d = 0$ (o sea, los dos vagones inmóviles están inicialmente enganchados sin huelgo entre ellos) y (*b*) la distancia $d \neq 0$ y los vagones están desenganchados y algo separados. Despreciar la resistencia a la rodadura.

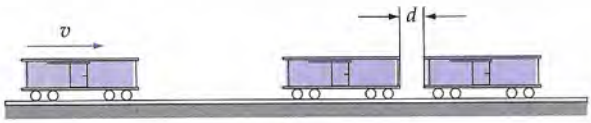


Figura problema 3.184

3.185 El alunizador de 200 kg desciende sobre la superficie lunar a 6 m/s cuando se enciende el retromotor. Si éste genera un empuje T durante 4 s que varía con el tiempo tal como se muestra y entonces se corta, calcular la velocidad del vehículo cuando $t = 5$ s suponiendo que aún no haya tocado suelo. En la superficie de la Luna la gravedad vale 1,62 m/s^2.

Resp. $v = 2{,}10$ m/s

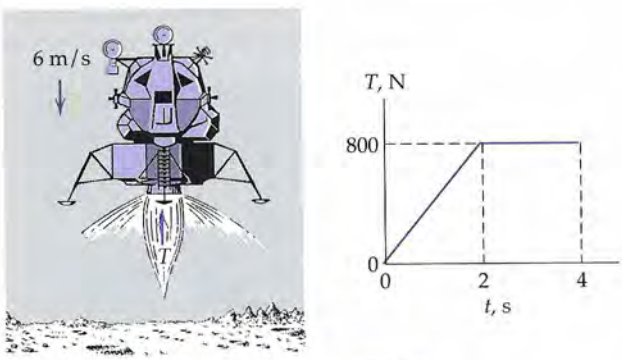


Figura problema 3.185

3.186 El bloque de 9 kg se mueve hacia la derecha sobre una superficie horizontal con una velocidad de 0,6 m/s cuando, en el instante $t = 0$, se le aplica una fuerza P. Calcular su velocidad

http://gratislibrospdf.com/

cuando $t = 0{,}4$ s. El coeficiente de rozamiento cinético entre bloque y superficie es $\mu_c = 0{,}3$.

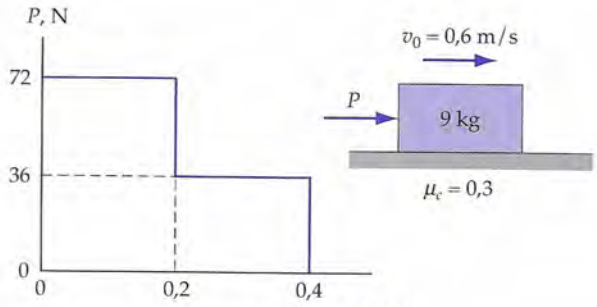


Figura problema 3.186

Problemas representativos

3.187 El superpetrolero tiene un desplazamiento total (masa) de 150 000 toneladas (métricas) y está quieto en el agua cuando el remolcador comienza a remolcarlo. Si en el cable de arrastre se desarrolla una tensión constante de 200 kN, calcular el tiempo necesario para llevar el barco hasta la velocidad de un nudo a partir del reposo. A esta reducida velocidad, la resistencia del casco al movimiento a través del agua es muy pequeña y puede despreciarse (1 nudo = 1,852 km/h).

Resp. $t = 6{,}84$ min

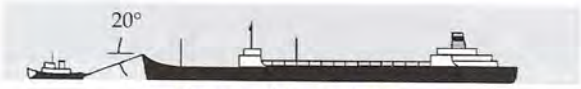


Figura problema 3.187

3.188 La lanzadera espacial lanza un satélite de 800 kg expulsándolo desde el compartimiento de carga. Al activarse el mecanismo de expulsión, éste permanece en contacto con el satélite durante 4 segundos y le comunica una velocidad de 0,3 m/s en la dirección z relativa a la lanzadera. La masa de ésta es de 90 Mg. Hallar qué velocidad v_f adquiere el vehículo en la dirección z negativa como consecuencia de la expulsión. Hallar asimismo la media temporal F de la fuerza de expulsión.

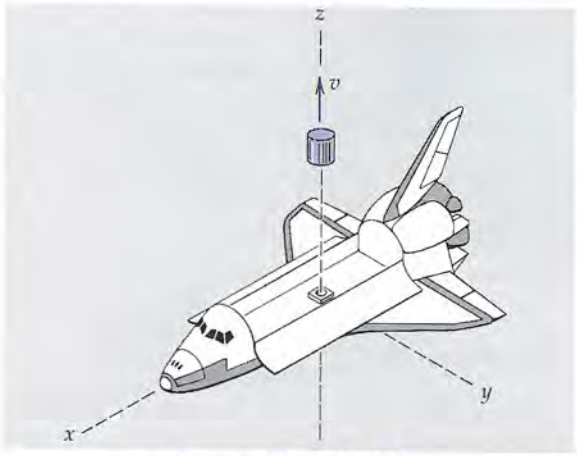


Figura problema 3.188

3.189 El carro de 4 kg, en reposo en el instante $t = 0$, está sometido a la acción de una fuerza horizontal que varía con el tiempo tal como se muestra. Despreciar el rozamiento y hallar la velocidad del carro para $t = 1$ s y $t = 3$ s.

Resp. $v_1 = 0{,}417$ m/s, $v_3 = 8{,}96$ m/s

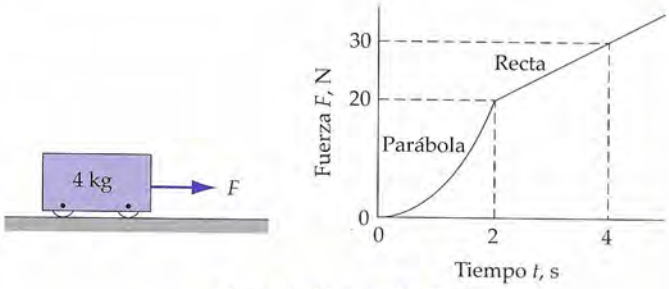


Figura problema 3.189

3.190 El carro de masa m está sometido a la fuerza F decreciente exponencialmente, que representa una carga por impacto o por explosión. Si el carro está inmóvil en el instante $t = 0$, hallar su velocidad v y su desplazamiento s como funciones del tiempo. ¿Cuánto vale v cuando t crece mucho?

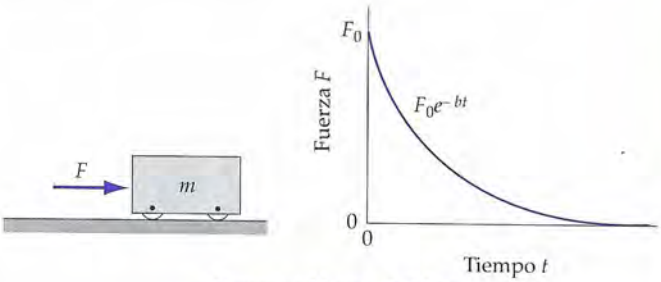


Figura problema 3.190

3.191 La velocidad del proyectil de 140 g es de 600 m/s cuando engancha las tres arandelas de 100 g cada una y se las lleva consigo. Hallar la velocidad v común de proyectil y arandelas. Hallar también la pérdida de energía $|\Delta E|$ durante la interacción.

Resp. $v = 190{,}9$ m/s, $|\Delta E| = 17{,}18(10)^3$ J

http://gratislibrospdf.com/

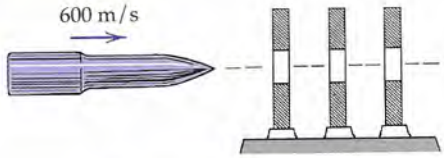


Figura problema 3.191

3.192 El automóvil B está parado cuando lo golpea el automóvil A que se mueve con una celeridad v. Tras la colisión ambos vehículos quedan trabados y se mueven con la celeridad v'. La masa del automóvil A es m y la del automóvil B es pm, siendo p la relación entre las masas de los automóviles B y A. Si la colisión dura Δt, expresar la velocidad común v' tras la colisión y la aceleración media de cada vehículo durante la colisión en función de v, p e Δt. Calcular el valor de la expresión deducida para $p = 0{,}5$.

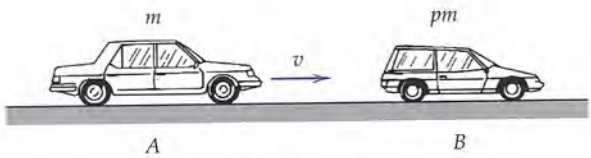


Figura problema 3.192

3.193 El mazo de un martinete tiene una masa de 450 kg y cae, sin velocidad inicial, desde una altura de 1 4 sobre la cabeza de un pilote de 240 kg que está hincado 0,9 m en el suelo. Se observa que después del choque el mazo se mueve con el pilote sin rebote apreciable. Hallar la velocidad común de mazo y pilote inmediatamente después del impacto. ¿Puede justificarse la aplicación del principio de la cantidad de movimiento aun cuando los pesos actúen durante el impacto?

Resp. $v = 3{,}42$ m/s

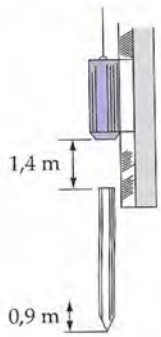


Figura problema 3.193

3.194 Un sistema de evacuación de emergencia de la torre de lanzamiento de astronautas consiste en un cable de lanzamiento de gran longitud por el que la cesta de salvamento desciende hasta una distancia de seguridad. Las cesta, con sus dos ocupantes, tiene una masa de 320 kg y se acerca a la malla horizontalmente con una celeridad de 28 m/s. La malla está sujeta al cable por una atadura movible y está unida a 20 m de cadena pesada cuya masa es de 18 kg/m. Entre la cadena y el suelo hay un coeficiente de rozamiento cinético de 0,70. Hallar la velocidad inicial v de la cadena cuando la cesta se acopla a la malla y el tiempo t que tarda en detenerse la cesta después del acoplo. Se supondrá que todos los eslabones de la cadena se mantienen en contacto con el suelo.

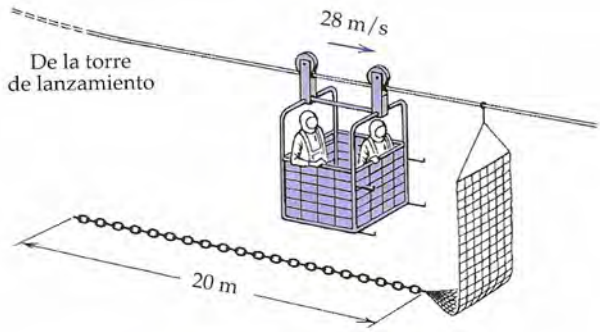


Figura problema 3.194

3.195 El camión remolque con el automóvil de 1200 kg que arrastra se acelera uniformemente desde 30 km/h hasta 70 km/h a lo largo de un intervalo de 15 s. La resistencia media a la rodadura del automóvil es de 500 N durante todo ese intervalo. Suponiendo que el ángulo de 60° represente la posición media del cable durante el intervalo, hallar la tensión media en el cable.

Resp. $T = 2780$ N

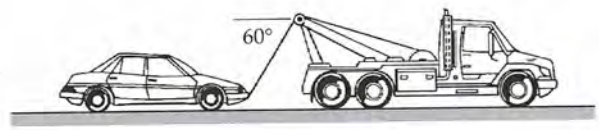


Figura problema 3.195

3.196 Un camión de 8 Mg descansa en la cubierta de una barcaza de 240 Mg de desplazamiento que reposa en agua encalmada. Si el camión arranca y se encamina hacia la proa con una velocidad $v_{rel} = 6$ km/h relativa a la embarcación, calcular la

http://gratislibrospdf.com/

velocidad x de ésta. La resistencia del agua al movimiento de la barcaza es despreciable a baja velocidad.

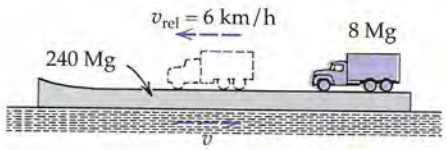


Figura problema 3.196

3.197 El movimiento vertical del cilindro de 3 kg está gobernado por las fuerzas P aplicadas a los rodillos de los extremos del sistema articulado de la figura. Si la velocidad ascendente del cilindro aumenta de 2 a 4 m/s en dos segundos, calcular la fuerza media R_{med} que actúa bajo cada rodillo durante los dos segundos. Estudiar el sistema completo como un todo y despreciar la pequeña masa del sistema articulado.

Resp. $R_{med} = 16{,}22$ N

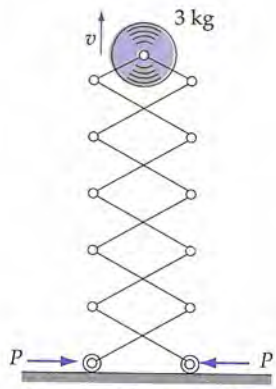


Figura problema 3.197

3.198 Hallar el tiempo que necesita una locomotora diesel-eléctrica, que produce una tracción de enganche constante de 270 kN, para aumentar la celeridad de un tren de carga de 1600 Mg desde 32 km/h hasta 48 km/h subiendo por una pendiente del 1 por ciento. El tren presenta una resistencia de 50 N por megagramo.

3.199 Una nave espacial que viaja por el espacio lejano está programada para aumentar de celeridad en una cuantía prefijada Δv encendiendo el motor durante un tiempo especificado t. Al cabo de un veinticinco por ciento del recorrido propulsado, el motor falla y a partir de ese instante genera sólo la mitad de su empuje normal. ¿Qué porcentaje n de Δv se consigue si el motor cohete se mantiene encendido durante el tiempo t planeado? ¿Cuánto tiempo adicional t' tendría que seguir funcionando el cohete para que compensara la avería?

Resp. $n = 62{,}5\%$, $t' = \frac{3}{4}t$

3.200 Unas medidas realizadas con gran precisión durante el choque del cilindro metálico de 200 g con la placa cargada por resorte revelan que entre la fuerza de contacto F y el instante t del choque existe una relación semielíptica como la representada. Hallar la velocidad de rebote v del cilindro si éste choca con la placa a 6 m/s.

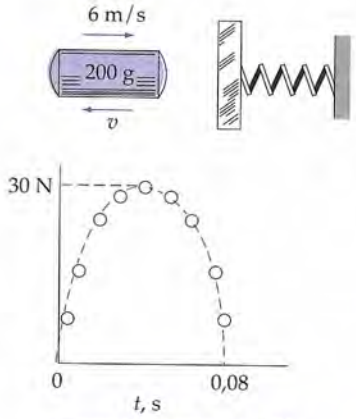


Figura problema 3.200

3.201 El movimiento de la caja de 9 kg en las guías lisas verticales lo controlan las tensiones T_1 y T_2 en los cables. Si la barquilla lleva una velocidad descendente de 1,2 m/s en el instante $t = 0$, hallar su velocidad v cuando $t = 10$ s.

Resp. $v = 0{,}700$ m/s hacia arriba

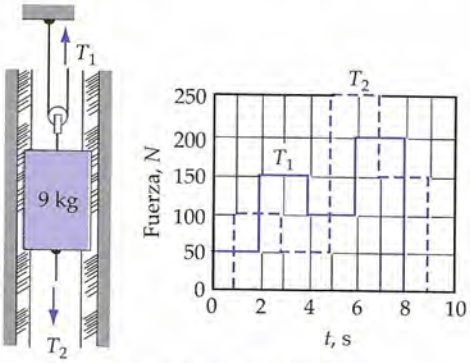


Figura problema 3.201

3.202 Las etapas tercera y cuarta de un cohete vuelan por inercia a 15 000 km/h cuando se enciende el motor de la cuarta etapa originando la separación de ambas bajo la acción de un empuje T y su reacción. Si la velocidad v de la cuarta etapa es 10 m/s mayor que la velocidad v_1 de la tercera etapa al final del intervalo de 0,5 s que dura la separación, calcular el empuje medio T durante ese período. Las masas de la tercera y cuarta

http://gratislibrospdf.com/

etapas en el instante de la separación son 40 y 60 kg, respectivamente. Supóngase que todo el chorro del motor de la cuarta etapa golpea contra la tercera etapa con una fuerza igual y contraria a T.

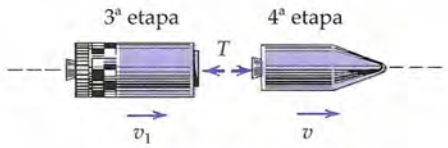


Figura problema 3.202

3.203 El automóvil B (1500 kg) viaja hacia el oeste a 48 km/h y choca con el automóvil A (1600 kg) que viaja hacia el norte a 32 km/h. Si los vehículos se empotran uno en otro y se desplazan juntos después del choque, calcular el módulo v de su velocidad común inmediatamente después del accidente y el ángulo θ que forma el vector velocidad con la dirección norte.

Resp. $v = 28{,}5$ km/h, $\theta = 54{,}6°$

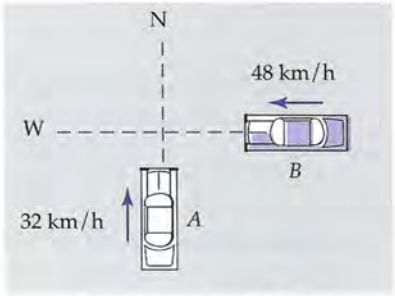


Figura problema 3.203

3.204 Una nave espacial de 1000 kg viaja por el espacio lejano con una celeridad $v_s = 2000$ m/s cuando choca con ella un meteoro de 10 kg que se mueve a una velocidad $\mathbf{v}_m$ de módulo 5000 km/h en la dirección indicada y que queda incrustado en la misma. Hallar la velocidad final $\mathbf{v}$ del centro de masa G de la nave y el ángulo β entre $\mathbf{v}$ y la velocidad inicial $\mathbf{v}_s$ de la nave.

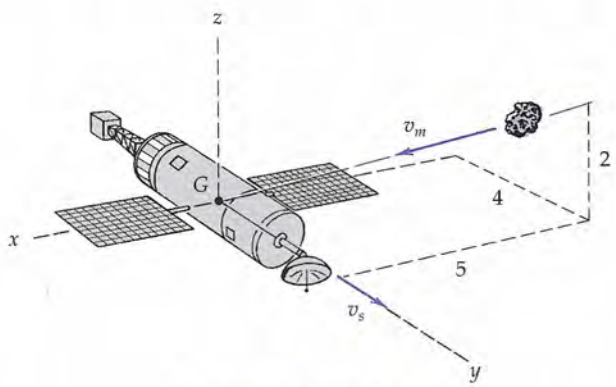


Figura problema 3.204

3.205 Un cuerpo de 4 kg, que se mueve sobre una superficie horizontal lisa con una velocidad de 10 m/s en la dirección x, está sometido a la fuerza F_x que varía con el tiempo tal como se muestra. Aproximar los datos experimentales mediante la línea de trazos que se indica y hallar la velocidad del cuerpo (*a*) en $t = 0{,}6$ s y (*b*) en $t = 0{,}9$ s.

Resp. (*a*) $v = 2$ m/s, (*b*) $v = -2{,}5$ m/s

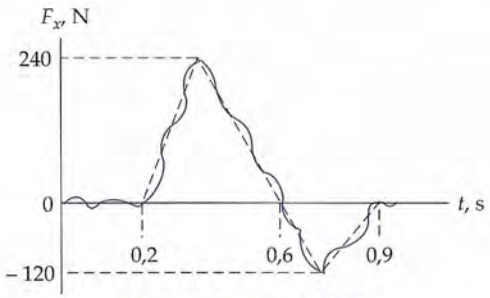


Figura problema 3.205

3.206 El tapón cilíndrico A de masa m_A se abandona en el reposo en B y se desliza por la guía circular lisa, en cuyo pie choca con el bloque C y se encaja en el mismo. Escribir la expresión de la distancia s que recorren bloque y tapón antes de detenerse. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie horizontal es μ_c.

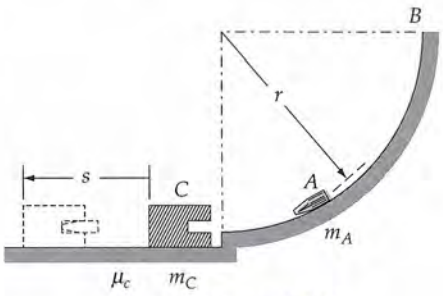


Figura problema 3.206

3.207 La fuerza P, que varía linealmente con el tiempo tal como se representa, se aplica al bloque de 10 kg inicialmente en reposo. Si los coeficientes de rozamiento estático y dinámico valen 0,6 y 0,4, respectivamente, hallar la velocidad del bloque para $t = 4$ s.

Resp. $v = 6{,}61$ m/s

http://gratislibrospdf.com/

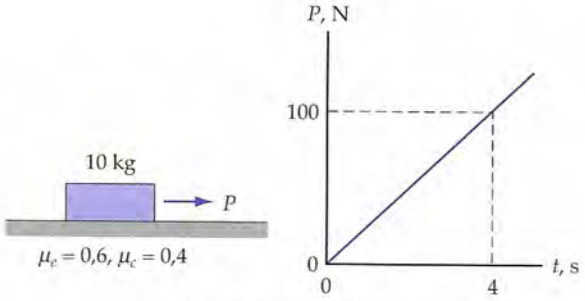


Figura problema 3.207

3.208 El carro de 30 kg se mueve por el raíl horizontal con rozamiento despreciable bajo la acción de la fuerza senoidal $F = 40 \operatorname{sen} \pi t$ N medida positivamente hacia la izquierda tal como se indica. Si en $t = 0$ el carro tiene una velocidad v de 1,5 m/s hacia la izquierda, hallar su velocidad v cuando $t = 1$ s. Por simple observación, ¿cuál será la velocidad del carro cuando $t = 2$ s?

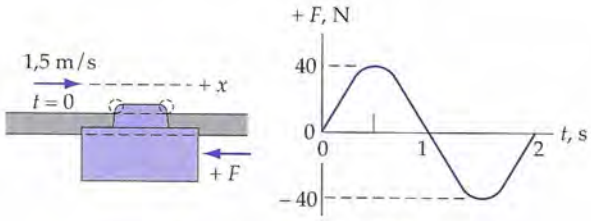


Figura problema 3.208

3.209 El remolcador de 500 toneladas arrastra la gabarra carbonera de 900 toneladas a la velocidad constante de 6 nudos. Durante un corto período de tiempo el torno de popa recoge cable de arrastre a razón de 0,5 m/s. Calcular la celeridad reducida v del remolcador durante ese intervalo. Se supondrá que el cable está horizontal. (Recuérdese, 1 nudo = 1,852 km/h.)

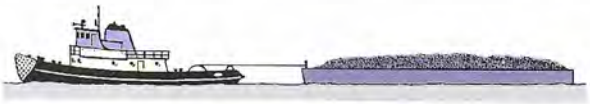


Figura problema 3.209

3.210 El carro de 10 kg se halla inmóvil en el instante $t = 0$ cuando es sometido a la fuerza senoidal $F = b + 45 \operatorname{sen} 6t$, donde F y b están en newtons y el tiempo t está en segundos. (*a*) Si $b = 22$ N, hallar su velocidad v cuando $t = 1{,}5$ s. (*b*) Hallar el valor de b para el que la velocidad sería nula tras finalizar el primer ciclo de aplicación de la fuerza. Despreciar el rozamiento

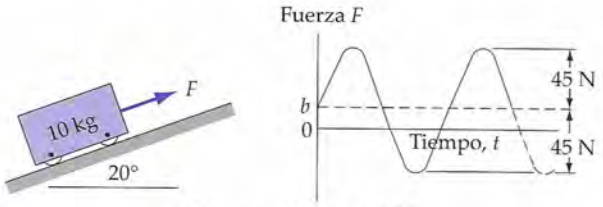


Figura problema 3.210

3.211 Un cuerpo de 10 kg se mueve en línea recta horizontal con una velocidad de 3 m/s cuando se le aplica una fuerza horizontal P perpendicular a la dirección inicial del movimiento. Si P varía según se muestra en la gráfica, permaneciendo constante su dirección y es la única fuerza que actúa sobre el cuerpo en el plano del movimiento, hallar la velocidad del cuerpo para $t = 2$ s y el ángulo θ que forma con la dirección de P.

Resp. $v = 3{,}91$ m/s, $\theta = 50{,}2°$

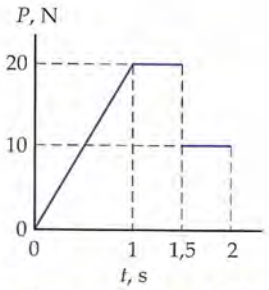


Figura problema 3.211

3.212 Un cuerpo de 0,5 kg oscila a lo largo del eje horizontal x bajo la única acción de una fuerza alternativa en la dirección x, cuya amplitud decrece con el tiempo t tal como se muestra y está dada por $F_x = 4e^{-t} \cos 2\pi t$, donde F_x está en newtons y t en segundos. Si en el instante $t = 0$ el cuerpo lleva una velocidad de 1,2 m/s en la dirección x negativa, hallar su velocidad v en el instante $t = 2$ s.

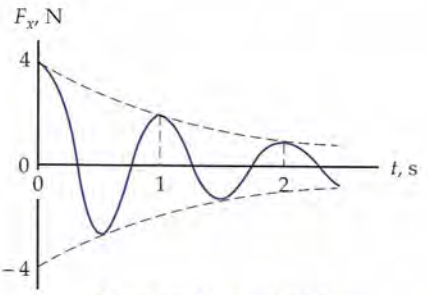


Figura problema 3.212

http://gratislibrospdf.com/

3.213 El disco de hockey sobre hielo de masa 0,20 kg lleva una velocidad de 12 m/s antes de recibir un golpe de "stick". Tras el impacto, el disco se desplaza en la dirección indicada a la velocidad de 18 m/s. Si el "stick" permanece en contacto con el disco durante 0,04 s, calcular el módulo de la fuerza media **F** que ejerce sobre el disco durante el contacto y hallar el ángulo β que forma **F** con la dirección x.

Resp. $F = 147{,}8$ N, $\beta = 12{,}02°$

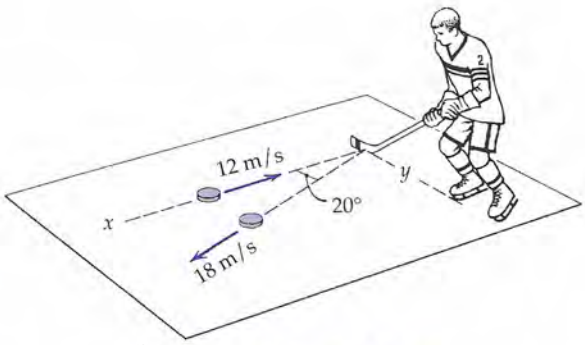


Figura problema 3.213

3.214 La pelota de béisbol se mueve con una velocidad horizontal de 135 km/h inmediatamente antes de golpear contra el bate. Inmediatamente tras el impacto, la velocidad de la pelota de 146 g es de 210 km/h formando, tal como se muestra, un ángulo de 35° con la horizontal. Hallar las componentes x e y de la fuerza media **R** que ejerce el bate sobre la pelota durante el impacto de 0,02 s. Comentar cómo se trata el peso de la pelota (*a*) durante el impacto y (*b*) transcurridos los dos o tres primeros segundos tras el impacto.

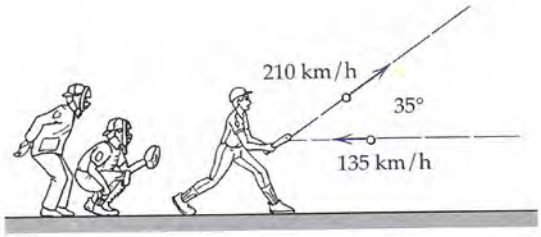


Figura problema 3.214

3.215 La tenista golpea la pelota con la raqueta mientras la pelota aún se está elevando. Antes de chocar con la raqueta, la celeridad de la pelota es $v_1 = 15$ m/s y $v_2 = 22$ m/s después del impacto, en las direcciones que se indican. Si la pelota de 60 g está en contacto con la raqueta durante 0,05 s, hallar el módulo de la fuerza media **R** que ejerce la raqueta sobre la pelota. Hallar el ángulo β que forma **R** con la horizontal. Comentar cómo se trata el peso de la pelota durante el impacto.

Resp. $R = 43{,}0$, $\beta = 8{,}68°$

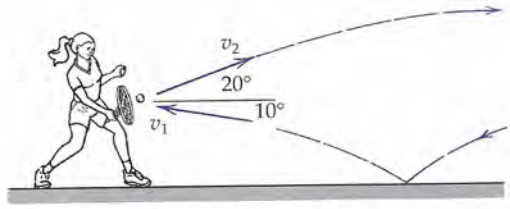


Figura problema 3.215

3.216 El bloque de 10 kg descansa sobre la superficie horizontal cuando recibe la acción de la fuerza T durante 7 segundos. Se representa la variación de T con el tiempo. Calcular la velocidad máxima alcanzada por el bloque y el tiempo total Δt durante el cual el bloque se halla en movimiento. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético valen ambos 0,50.

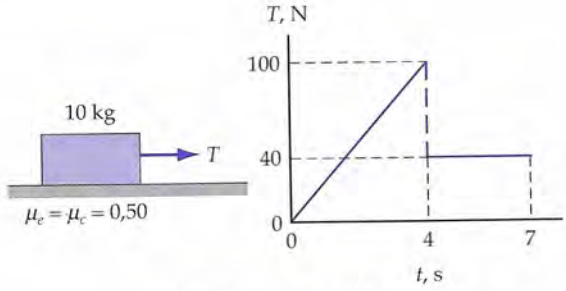


Figura problema 3.216

3.217 La carretilla de mina cargada tiene una masa de 3 Mg. El tambor izador produce una tracción T en el cable de acuerdo con

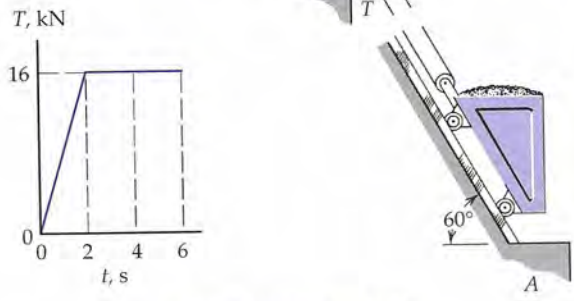


Figura problema 3.217

http://gratislibrospdf.com/

el cronograma que se muestra. Si la caja descansa sobre A cuando se arranca el tambor, hallar la celeridad v de la caja cuando $t = 6$ s. Pueden despreciarse las pérdidas por rozamiento.

Resp. $v = 9{,}13$ m/s

3.218 El péndulo simple A de masa m_A y longitud l cuelga del trole B de masa m_B. Si el sistema se suelta desde el reposo en $\theta = 0$, hallar la velocidad v_B del trole cuando $\theta = 90°$. El rozamiento es despreciable.

$$Resp. v_B = \frac{m_A}{m_B}\sqrt{\frac{2gl}{1 + m_A/m_B}}$$

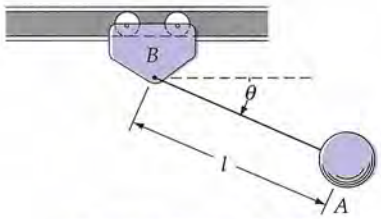


Figura problema 3.218

3.219 Dos barcazas que desplazan (cuya masa es de) 500 toneladas métricas cada una están fondeadas en aguas tranquilas. Un conductor acrobático pone en marcha su automóvil de 1500 kg en A, atraviesa la cubierta y se separa del extremo de la rampa de 15° a la celeridad de 50 km/h respecto a barcaza y rampa. El conductor consigue salvar el vacío y detiene en B su automóvil con relación a la barcaza 2. Calcular la velocidad v_1 que se imprime a la barcaza. Despreciar la resistencia que opone el agua al movimiento dadas las reducidas velocidades que intervienen.

Resp. $v_2 = 40{,}0$ mm/s

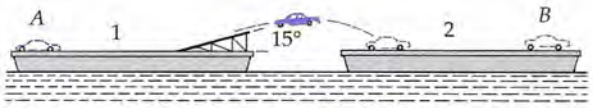


Figura problema 3.219

3.220 Un lanzatorpedos de 60 toneladas de desplazamiento navega a 18 nudos cuando dispara horizontalmente un torpedo de 140 kg con el tubo lanzador a 30°, tal como se representa. Si, cuando abandona el tubo, el torpedo lleva una velocidad de 6 m/s con relación a la embarcación, hallar la reducción instantánea de velocidad Δv que experimenta ésta. (Recuérdese que un nudo son 1,852 km/h.) Resolver también este problema refiriendo el movimiento a un sistema de coordenadas que se mueva con la velocidad inicial de la embarcación.

Resp. $\Delta v = 0{,}0121$ m/s

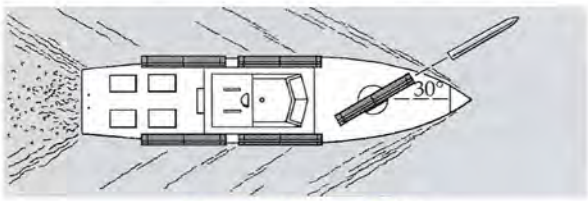


Figura problema 3.220

3.10 IMPULSO ANGULAR Y MOMENTO CINÉTICO

Además de las ecuaciones que relacionan el impulso con la cantidad de movimiento, existe un sistema paralelo de ecuaciones que relacionan el impulso angular con el momento cinético. Empecemos definiendo qué es momento cinético. En la figura 3.11*a* se representa un punto material P de masa m que se mueve a lo largo de una curva en el espacio y que queda localizado mediante su vector de posición $\mathbf{r}$ respecto a un origen conveniente O de coordenadas fijas x-y-z. La velocidad del punto es $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ y su cantidad de movimiento $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$. El *momento* respecto al origen O del *vector cantidad de movimiento* $m\mathbf{v}$ es, por definición, el momento cinético $\mathbf{H}_O$ de P respecto a O y vendrá dado por el producto vectorial que expresa el momento de un vector

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \tag{3.25}$$

Así pues, se trata de un vector perpendicular al plano A definido por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ y su sentido es, desde luego, el definido por la regla de la mano derecha.

http://gratislibrospdf.com/

Las componentes escalares del momento cinético pueden obtenerse del desarrollo

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(v_z y - v_y z)\mathbf{i} + m(v_x z - v_z x)\mathbf{j} + m(v_y x - v_x y)\mathbf{k}$$

o bien

$$\mathbf{H}_O = m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{3.26}$$

con lo que

$$H_x = m(v_z y - v_y z) \qquad H_y = m(v_x z - v_z x) \qquad H_z = m(v_y x - v_x y)$$

Cada una de estas expresiones del momento cinético puede comprobarse fácilmente con ayuda de la figura 3.12, en la que pueden verse las tres componentes de la cantidad de movimiento, tomando los momentos de dichas componentes respecto a los ejes respectivos.

Para que se imagine mejor qué es el momento cinético, en la figura 3.11*b* se representan en dos dimensiones coincidentes con el plano *A* los vectores representados en la parte *a* de la figura, contemplándose el movimiento en el plano *A* definido por **r** y **v**. El módulo del momento de $m\mathbf{v}$ respecto a *O* es sencillamente la cantidad de movimiento *mv* multiplicada por el brazo de momento *r* sen θ, o sea, *mvr* sen θ que es el módulo del producto vectorial $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$.

En unidades SI el momento cinético se expresará en $\text{kg}\cdot(\text{m/s})\cdot\text{m} = \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} = \text{m}\cdot\text{N/s}$.

Estamos ya preparados para relacionar el momento de las fuerzas actuantes sobre el punto material *P* con su momento cinético. Si $\Sigma\mathbf{F}$ representa la resultante de *todas* las fuerzas que actúan sobre el punto material *P* de la figura 3.11, su momento $\mathbf{M}_O$ respecto al origen *O* es el producto vectorial

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

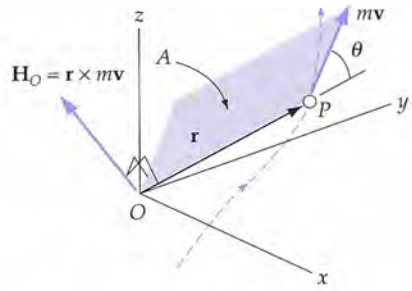
en el que se ha introducido la segunda ley de Newton $\Sigma\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$. Si derivamos la ecuación 3.25 respecto al tiempo, haciendo uso de la regla de derivación del producto vectorial (véase el punto 9 del apartado C.7 del apéndice C) resulta

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

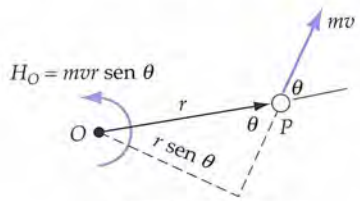
El término $\mathbf{v} \times m\mathbf{v}$ es nulo porque el producto vectorial de dos vectores paralelos es idénticamente nulo. Al sustituir valores en la expresión de $\Sigma\mathbf{M}_O$ resulta

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{3.27}$$

La ecuación 3.27 establece que *el momento respecto al punto fijo O de todas las fuerzas que actúan sobre m es igual a la variación por unidad de tiempo del momento cinético de m respecto a O*. Esta relación, especialmente cuando se amplía a los sistemas de puntos materiales, rígidos o no, constituye uno de los instrumen-



(*a*)



Vista en el plano *A*

(*b*)

Figura 3.11

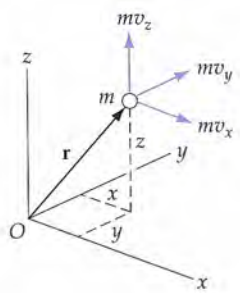


Figura 3.12

http://gratislibrospdf.com/

tos de análisis más eficaces de toda la Dinámica. Las componentes escalares de la ecuación 3.27 son

$$\Sigma M_{O_x} = \dot{H}_{O_x} \qquad \Sigma M_{O_y} = \dot{H}_{O_y} \qquad \Sigma M_{O_z} = \dot{H}_{O_z} \tag{3.28}$$

La ecuación 3.27 proporciona la relación instantánea existente entre el momento y la variación del momento cinético por unidad de tiempo. Para obtener el efecto del momento $\Sigma\mathbf{M}_O$ sobre el momento cinético de la partícula en un intervalo de tiempo finito, podemos integrar la ecuación 3.27 desde el instante t_1 hasta el instante t_2. Multiplicando la ecuación por dt se tiene $\Sigma\mathbf{M}_O\,dt = d\mathbf{H}_O$ que puede integrarse, dando

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{M}_O\,dt = \mathbf{H}_{O_2} - \mathbf{H}_{O_1} = \Delta\mathbf{H}_O \tag{3.29}$$

donde $\mathbf{H}_{O_2} = \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{H}_{O_1} = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1$. Al producto del momento por el tiempo se le denomina *impulso angular* y la ecuación 3.29 dice que el *impulso angular total aplicado a m respecto al punto fijo O es igual a la correspondiente variación de momento cinético respecto al punto fijo* O. Esta relación 3.29 suele conocerse como *teorema del momento cinético*..

La ecuación 3.29 podríamos haberla escrito también

$$\mathbf{H}_{O_1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{M}_O\,dt = \mathbf{H}_{O_2} \tag{3.29a}$$

que simplemente establece que el momento cinético inicial del punto material más el impulso angular que recibe es igual a su momento cinético final. Las unidades que miden el impulso angular y el momento cinético son evidentemente las mismas, es decir, m·N·s ó kg·m^2/s en el Sistema Internacional.

Como en el caso del impulso y la cantidad de movimiento, la ecuación que relaciona el impulso angular con el momento cinético es una ecuación vectorial, en la que durante el intervalo de integración pueden tener lugar variaciones tanto de módulo como de dirección. En estas condiciones, será necesario expersar $\Sigma\mathbf{M}_O$ y $\mathbf{H}_O$ según sus componentes y luego combinar las componentes integradas. Así, la componente x de la ecuación 3.29 será

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_{O_x}\,dt &= (H_{O_x})_2 - (H_{O_x})_1 \\ &= m[(v_z y - v_y z)_2 - (v_z y - v_y z)_1]\end{aligned}$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a los valores de las cantidades correspondientes a los instantes t_1 y t_2. Para las componentes y y z de la integral del momento cinético se tienen expresiones análogas.

Las relaciones anteriores relativas al impulso angular y al momento cinético se han desarrollado con toda generalidad para tres dimensiones. Por otra parte, la mayoría de los casos particulares de los que vamos a ocuparnos pueden estudiarse como problemas de movimiento plano, en los que se toman momentos respecto a un solo eje normal al plano del movimiento. En tales casos, el momento cinético podrá variar de módulo y de sentido, pero su dirección permanecerá inalterada. Así, para un punto material de masa m que describe una trayectoria curva contenida en el plano x-y (fig. 3.13), los momentos

http://gratislibrospdf.com/

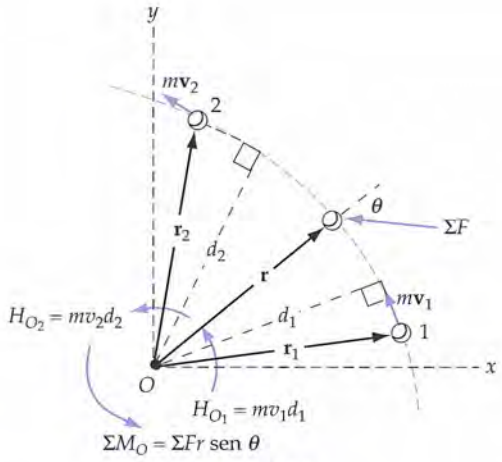


Figura 3.13

cinéticos respecto a O en los puntos 1 y 2 poseen los módulos $H_{O_1} = |\mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1| = mv_1d_1$ y $H_{O_2} = |\mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2| = mv_2d_2$, respectivamente. En la figura, H_{O_1} y H_{O_2} se representan en sentido antihorario según lo indica el del momento de la cantidad de movimiento. La ecuación 3.29 aplicada al movimiento entre los puntos 1 y 2 durante el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 se convierte en la ecuación escalar

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O \, dt = H_{O_2} - H_{O_1} \qquad \text{o sea} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_r \operatorname{sen} \theta \, dt = mv_2d_2 - mv_1d_1$$

que debe contribuir a aclarar la relación entre las formas vectorial y escalar de la relación entre el impulso angular y el momento cinético.

Las ecuaciones 3.21 y 3.27 no aportan ninguna información básica nueva, pues no son más que otras maneras de expresar la segunda ley de Newton. Sin embargo, en capítulos posteriores veremos que las ecuaciones del movimiento expresadas en función de la velocidad de variación de la cantidad de movimiento y del momento cinético son aplicables al movimiento de cuerpos rígidos y no rígidos y constituyen un método muy general y eficaz para resolver multitud de problemas. Para describir el movimiento de un punto material único o el movimiento plano de un cuerpo rígido no suele ser precisa la total generalidad de la ecuación 3.27, pero sí encuentra una importantísima aplicación en el estudio del movimiento espacial de los cuerpos rígidos, tema del que se ofrece una introducción en el capítulo 7.

Conservación del momento cinético. Si el momento resultante respecto a un punto fijo O de todas las fuerzas actuantes sobre un punto material es nulo durante un intervalo de tiempo, vemos que la ecuación 3.27 impone que su momento cinético $\mathbf{H}_O$ respecto a ese punto permanezca constante. Se dice, en tal caso, que el momento cinético del punto material *se conserva*. Puede ocurrir que el momento cinético se conserve respecto a un eje, pero no respecto a otro. Un examen atento del diagrama para sólido libre de la partícula revelará si es nulo el momento respecto a un punto fijo de la fuerza resultante que se ejerce sobre la partícula, en cuyo caso el momento cinético respecto a ese punto no varía (se conserva).

Consideremos ahora el movimiento de dos puntos materiales a y b que interactúan durante un intervalo de tiempo. Si, durante ese intervalo, las únicas

http://gratislibrospdf.com/

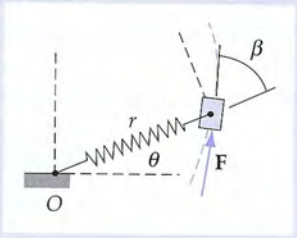
fuerzas no equilibradas que se ejercen sobre esas partículas son las fuerzas **F** y **– F** de acción recíproca, resulta que los momentos de esas dos fuerzas iguales y opuestas respecto a cualquier punto fijo O que no esté en sus rectas soporte son iguales y opuestos. Si aplicamos la ecuación 3.29 a la partícula *a* y luego a la partícula *b*, obtenemos $\Delta\mathbf{H}_a + \Delta\mathbf{H}_b = \mathbf{0}$ (donde los momentos cinéticos se toman respecto al punto *O*). Así pues, durante el intervalo, el momento cinético total del sistema permanece constante y podemos escribir

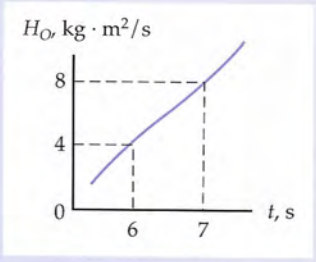
$$\Delta\mathbf{H}_O = \mathbf{0} \qquad \text{o sea} \qquad \mathbf{H}_{O_1} = \mathbf{H}_{O_2} \tag{3.30}$$

Esta ecuación 3.30 expresa el *principio de conservación del momento cinético.*

PROBLEMA TIPO 3.22

El pequeño bloque de 2 kg se desliza por una superficie horizontal lisa bajo las acciones de la fuerza del resorte y una fuerza F. El momento cinético del bloque respecto a O varía con el tiempo tal como representa la gráfica. Para t = 6,5 s, se sabe que r = 15 cm y β = 60°. Hallar F en ese instante.





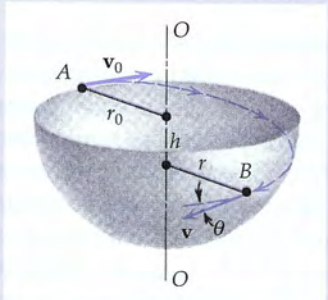
Solución. El único momento de las fuerzas respecto a *O* es el debido a *F* ya que la fuerza del resorte pasa por *O*. Así pues, $\Sigma M_O = Fr \operatorname{sen} \beta$. Según la gráfica, la variación de H_O por unidad de tiempo para $t = 6{,}5$ s es muy aproximadamente $(8 - 4)/(7 - 6)$, o sea $\dot{H}_O = 4$ kg · m/s² = 4 N·m. La ecuación de la cantidad de movimiento nos da

① $$[\Sigma M_O = \dot{H}_O] \qquad F(0{,}150) \operatorname{sen} 60^\circ = 4 \qquad F = 30{,}8 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

① En este caso no precisamos notación vectorial ya que tratamos de un movimiento plano en el que no varía la dirección del vector $\mathbf{H}_O$.

PROBLEMA TIPO 3.23

Una partícula se lanza con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ *tangente al borde horizontal de un cuenco liso hemisférico y en un punto A situado a una distancia* r_0 *del eje de simetría vertical, tal como se muestra en la figura. La partícula al pasar por el punto B, a una distancia h por debajo A y a una distancia r del eje de simetría vertical, lleva una velocidad* **v**. *Hallar el ángulo* θ *que forman su velocidad con la tangente horizontal a la superficie del cuenco en dicho punto.*



http://gratislibrospdf.com/

Solución. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso y la reacción normal ejercida por la superficie lisa del cuenco. Ninguna de estas fuerzas produce momento respecto al eje *O*-*O*, por lo que se conservará el momento cinético respecto a ese eje. Así

$$[(H_O)_1 = (H_O)_2] \qquad mv_0r_0 = mvr\cos\theta \quad ①$$

① El ángulo θ se mide en el plano tangente a la superficie hemisférica en el punto *B*.

También se conserva la energía, por lo que

$$[T_1 + V_{g_1} = T_2 + V_{g_2}] \qquad \tfrac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Eliminando v y sustituyendo r^2 por $r_0^2 - h^2$ resulta

$$v_0r_0 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\sqrt{r_0^2 - h^2}\cos\theta$$

$$\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2gh}{v_0^2}}\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{r_0^2}}} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

3.221 Hallar el módulo H_O del momento cinético respecto al punto *O* de la esfera de 2 kg (*a*) empleando la definición vectorial de momento cinético y (*b*) mediante el procedimiento escalar equivalente. El centro de la esfera está en el plano *x*-*y*.

Resp. $H_O = 69{,}3$ kg·m²/s

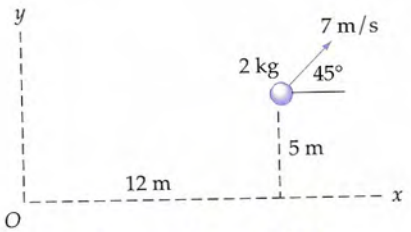


Figura problema 3.221

3.222 En un cierto instante, la cantidad de movimiento y el vector de posición de una partícula son, respectivamente, $\mathbf{G} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ kg·m/s y $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ m. Hallar el módulo H_O del momento cinético de la partícula respecto al origen de coordenadas.

3.223 En metros, el vector de posición de una partícula de 4 kg está dado por $\mathbf{r} = 3t^3\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$, donde t es el tiempo en segundos. Para $t = 3$ s, hallar el módulo del momento cinético de la partícula y el módulo del momento respecto al origen de todas las fuerzas que actúan sobre ella.

Resp. $H = 389$ N·m·s, $M = 260$ N·m

3.224 El montaje arranca del reposo y alcanza una velocidad angular de 150 rpm bajo la acción de una fuerza T de 20 N que

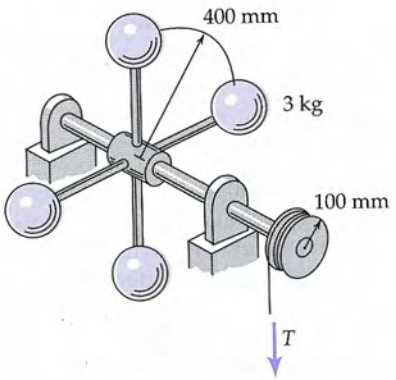


Figura problema 3.224

http://gratislibrospdf.com/

se aplica a la cuerda durante t segundos. Hallar t. Despreciar el rozamiento y todas las masas salvo la de las cuatro esferas de 3 kg, las cuales pueden tratarse como partículas.

3.225 Una partícula de masa m se mueve con rozamiento despreciable sobre una superficie horizontal y está unida en O a un resorte liviano. En la posición A la velocidad de la partícula es $v_A = 4$ m/s. Hallar la velocidad v_B de la partícula cuando pasa por la posición B.

Resp. $v_B = 5{,}43$ m/s

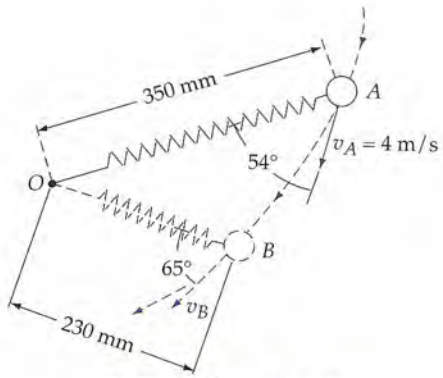


Figura problema 3.225

3.226 Las dos esferas, de masa m cada una, están montadas en las varillas livianas que rotan en un plano horizontal a la velocidad angular $\dot{\theta}$ en torno al eje vertical fijo. Si se hacen descender las varillas, mediante un mecanismo interno, hasta las posiciones representadas a trazos sin interferir con la libertad de rotación en torno al eje vertical, hallar la nueva velocidad angular $\dot{\theta}'$ correspondiente a la nueva posición de las esferas.

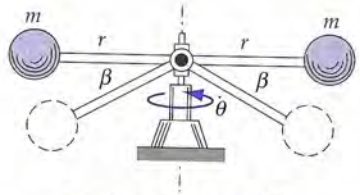


Figura problema 3.226

Problemas representativos

3.227 La pequeña esfera de masa m que se desplaza con la celeridad v choca y se queda unida al extremo del dispositivo inmóvil que puede girar libremente en torno a un eje vertical que pasa por O. Hallar la velocidad angular ω del conjunto después del impacto y calcular la variación ΔE que experimenta la energía del sistema.

Resp. $\omega = \dfrac{v}{2L}$, $\Delta E = -\dfrac{1}{4}mv^2$

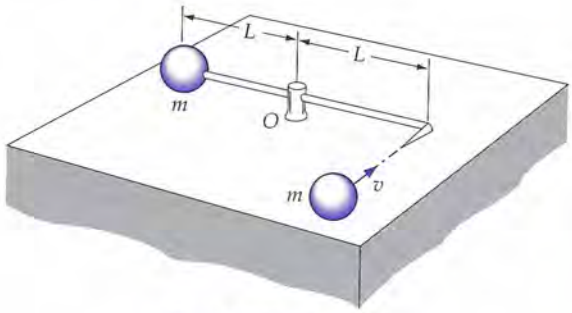


Figura problema 3.227

3.228 La única fuerza que actúa sobre un satélite terrestre que viaja por fuera de la atmósfera terrestre es la atracción gravitatoria radial. El momento de dicha fuerza es nulo respecto al centro de la Tierra tomado como punto fijo. Demostrar que $r^2\dot{\theta}$ permanece constante durante el movimiento del satélite.

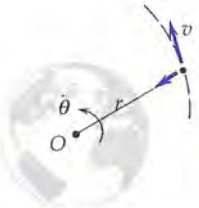


Figura problema 3.228

3.229 La fuerza central atractiva F que actúa sobre un satélite terrestre tiene un momento nulo respecto al centro O de la Tierra. Para la órbita elíptica cuyos ejes mayor y menor se indican en la figura, un satélite tendría en el perigeo, situado a 390 km de altura, una velocidad de 33 880 km/h. Hallar la velocidad del satélite en el punto B y en el apogeo A. El radio de la Tierra es 6371 km.

Resp. $v_B = 19\,540$ km/h, $v_A = 11\,290$ km/h

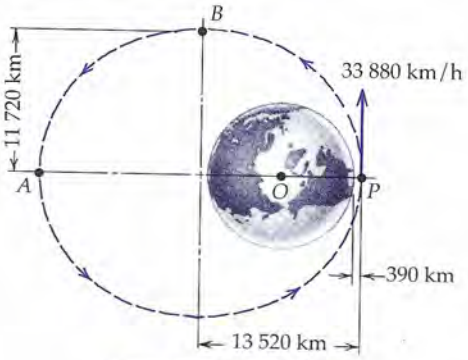


Figura problema 3.229

http://gratislibrospdf.com/

3.230 Expresar en función de θ la aceleración angular $\ddot{\theta}$ del péndulo simple utilizando la expresión relativa a la derivada temporal del momento cinético.

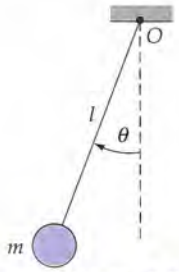


Figura problema 3.230

3.231 Un pequeña partícula de 0,1 kg recibe una velocidad de 2 m/s en el plano horizontal x-y y es guiada por la banda curva fija. El rozamiento es despreciable. Cuando la partícula cruza el eje y por A, su velocidad tiene la dirección x, y cuando cruza el eje x por B, su velocidad forma un ángulo de 60° con el eje x. En B, el radio de curvatura de la trayectoria es 500 mm. Hallar la derivada temporal del momento cinético H_O de la partícula respecto al z que pasa por O, tanto para el punto A como para el B.

Resp. En A, $\dot{H}_O = 0$

En B, $\dot{H}_O = -0{,}120$ kg·m^2/s^2

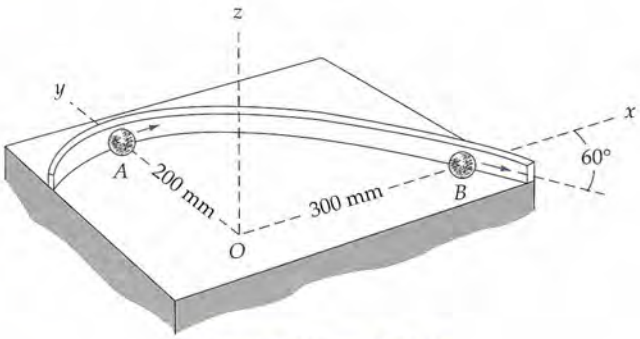


Figura problema 3.231

2.232 Las dos esferas de masas iguales m pueden deslizarse a lo largo de la barra horizontal giratoria. Si inicialmente están trabadas a una distancia r del eje de giro, estando el conjunto girando a una velocidad angular ω_0, hallar la nueva velocidad angular ω después de soltar las esferas y que éstas se hayan finalmente situado en los extremos de la barra a una distancia radial de $2r$. Hallar asimismo qué fracción n de la energía cinética inicial se pierde. Despreciar la pequeña masa de la barra y el eje.

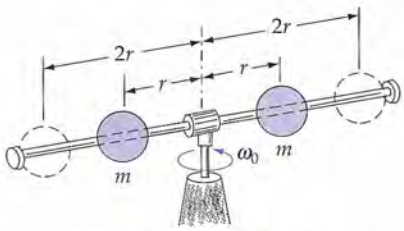


Figura problema 3.232

2.233 Calcular los módulos del momento cinético de la Luna respecto al centro de la Tierra y el del momento cinético de la Tierra respecto al centro de la Luna. Supóngase en cada caso que la órbita es circular y consultar la tabla D.2 en lo necesario.

Resp. $H_T = 2{,}66(10^{40})$ kg·m^2/s

$H_L = 2{,}89(10^{34})$ kg·m^2/s

3.234 La esfera de 6 kg y el bloque de 4 kg (representado en sección) están sujetos al brazo de masa despreciable que rota en el plano vertical en torno a un eje horizontal que pasa por O. El cilindro de 2 kg se deja caer desde el reposo en A y se encaja en el hueco del bloque cuando el brazo alcanza la posición horizontal. Un instante antes de la unión, el brazo lleva una velocidad angular $\omega_0 = 2$ rad/s. Hallar la velocidad angular del brazo inmediatamente después de que el cilindro se haya asentado en el bloque.

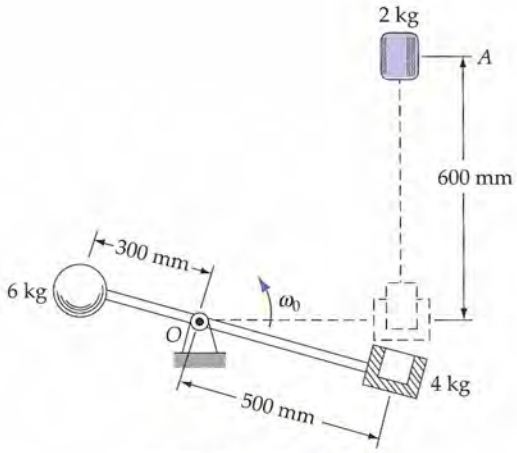


Figura problema 3.234

3.235 En el punto A de máxima proximidad al Sol, un cometa tiene una velocidad $v_A = 57\,600$ m/s. Hallar las componentes radial y transversal de su velocidad v_B en el punto B, donde la distancia radial al Sol es de $120(10^6)$ km.

Resp. $v_r = 27\,100$ m/s, $v_\theta = 38\,400$ m/s

http://gratislibrospdf.com/

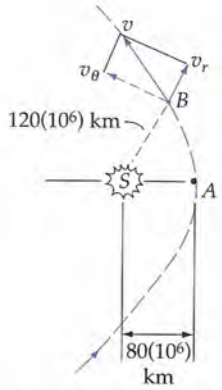


Figura problema 3.235

3.236 Una partícula se mueve por el interior liso de una cáscara cónica y recibe una velocidad $\mathbf{v}_0$ tangente al borde horizontal en el punto A. Cuando pasa por el punto B, a una distancia z por debajo de A, su velocidad $\mathbf{v}$ forma un ángulo θ con la horizontal tangente a la superficie en B. Hallar las expresiones de θ y la celeridad v.

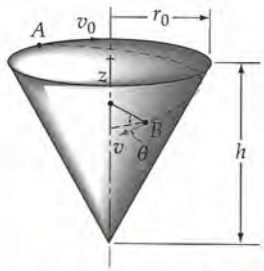


Figura problema 3.236

3.237 Una partícula se suelta sobre la pared interna lisa de un depósito cilíndrico en el punto A con una velocidad v_0 que forma un ángulo β con la tangente horizontal. Cuando la partícula llega al punto B a una distancia h por debajo de A, hallar la expresión del ángulo θ que forma su velocidad con la tangente horizontal en B.

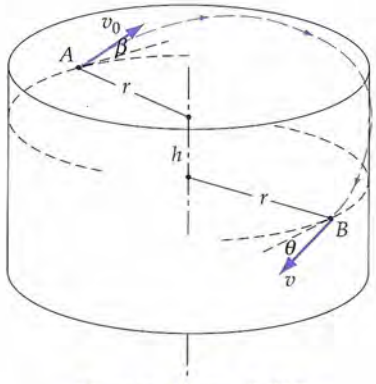


Figura problema 3.237

$$Resp.\ \theta = \arccos \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{{v_0}^2}}}$$

3.238 En el problema 3.237, con valores de v_0, β y r conocidos, hallar la altura máxima b por encima del punto A que alcanza la partícula y el módulo v de su velocidad en ese punto.

3.239 Determinar el momento cinético H_O respecto al punto de lanzamiento O del proyectil de masa m que se dispara con una celeridad v_0 bajo un ángulo θ, tal como se representa, (*a*) en el momento del disparo y (*b*) en el momento del impacto. Justificar cualitativamente los dos resultados. Despreciar la resistencia atmosférica.

$$Resp.\ (a)\ H_O = 0,\ (b) H_O = \frac{2m{v_0}^3 \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta}{g}$$

Figura problema 3.239

3.240 Un péndulo se compone de dos masas concentradas de 3,2 kg montadas, tal como se muestra, en una barra liviana pero rígida. Cuando una bala de 50 g, que va a $v = 300$ m/s en la dirección indicada, impacta en la masa inferior y se incrusta en ella, oscila con una velocidad angular $\omega = 6$ rad/s de sentido horario en torno a la posición vertical. Calcular la velocidad angular ω' que posee el péndulo inmediatamente tras el impacto y determinar su elongación angular máxima θ.

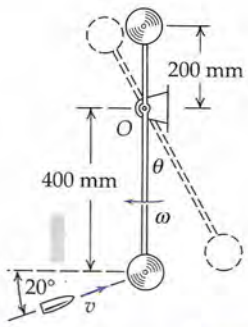


Figura problema 3.240

http://gratislibrospdf.com/

3.241 La pequeña partícula de masa m y la cuerda, a la que está ligada, giran con una velocidad angular ω sobre la superficie horizontal del disco liso, que se muestra en sección. Cuando la fuerza F disminuye ligeramente, r aumenta y ω cambia. Determinar la velocidad de cambio de ω respecto a r y demostrar que el trabajo hecho por F durante un desplazamiento dr es igual a la variación de la energía cinética de la partícula.

Resp. $\dfrac{d\omega}{dr} = -\dfrac{2\omega}{r}$

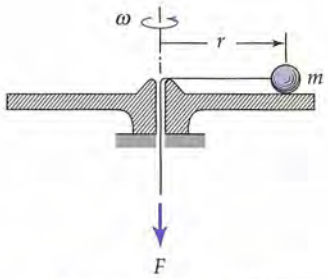


Figura problema 3.241

▶ **3.242** El conjunto de dos esferas de 5 kg está girando libremente en torno al eje vertical a 40 rpm con $\theta = 90°$. Si la fuerza F necesaria para mantener esa posición se aumenta y eleva el anillo base y θ se reduce a 60°, hallar la nueva velocidad angular ω. Hallar también el trabajo U que realiza F para variar la configuración del sistema. Se supondrán despreciables todas las masas salvo las de la esferas.

Resp. $\omega = 3{,}00$ rad/s, $U = 5{,}34$ J

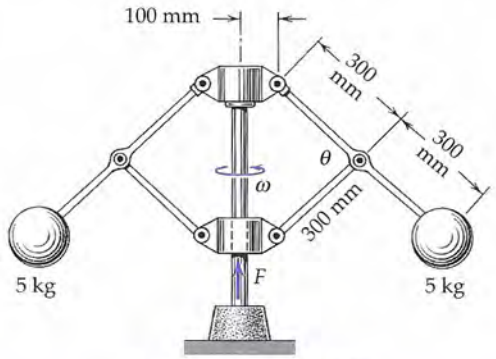


Figura problema 3.242

SECCIÓN D. APLICACIONES ESPECIALES

3.11 INTRODUCCIÓN

En las tres primeras partes de este capítulo se han desarrollado e ilustrado los principios fundamentales y los métodos propios de la cinética de los puntos materiales. Ello incluía la aplicación directa de la segunda ley de Newton y de los teoremas de las fuerzas vivas, de la cantidad de movimiento y del momento cinético. Se prestó una atención particular al tipo de problema para el que es más adecuado cada uno de los planteamientos.

En esta parte D se tratan brevemente algunos temas que merecen una atención particularizada. Estos temas hacen necesario profundizar más en la aplicación de los principios fundamentales de la Dinámica y, por ello, su estudio amplía la base de conocimientos de la Mecánica.

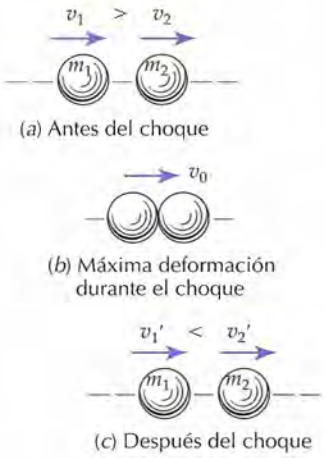
3.12 CHOQUE

Una importante aplicación de los principios del impulso y la cantidad de movimiento se encuentra en la descripción del comportamiento de los cuerpos que chocan. El *choque* se refiere a la colisión de dos cuerpos y se caracteriza por la generación de fuerzas de contacto relativamente intensas que actúan durante tiempos muy breves. Antes de abordar el tema, conviene que advirtamos que un choque es un fenómeno muy complejo que da lugar a la deformación de los materiales y a la recuperación de éstos con generación de calor y sonido.

http://gratislibrospdf.com/

Unas pequeñas variaciones en las condiciones de un choque pueden originar grandes cambios en el propio proceso y, por tanto, en la situación inmediatamente posterior a éste. Por ello, no hay que depositar excesiva confianza en los resultados de los cálculos.

(a) Choque central frontal. Como introducción al estudio del choque consideremos dos esferas de masa m_1 y m_2 que se mueven a lo largo de una misma recta (fig. 3.14*a*) a las velocidades v_1 y v_2. Si v_1 es mayor que v_2, tendrá lugar una colisión estando las fuerzas de contacto dirigidas según la recta que une los centros; esta situación recibe el nombre de *choque central frontal*. Iniciado el contacto, tiene lugar un corto período de deformación que dura hasta que la superficie de contacto entre ambas esferas deja de crecer, en cuyo instante (fig. 3.14*b*) las dos viajan a la misma velocidad. Durante el resto del tiempo de contacto tiene lugar un período de restauración, durante el cual la superficie de contacto se reduce a cero. En la parte *c* de la figura se representa la situación final, en que ya las esferas poseen las nuevas velocidades v_1' y v_2', siendo v_1' necesariamente menor que v_2'. Arbitrariamente se suponen positivas todas las velocidades dirigidas hacia la derecha, por lo que con esta notación escalar toda velocidad dirigida hacia la izquierda llevará signo negativo. Si el choque no es excesivamente violento y si las esferas son elásticas en sumo grado, éstas recuperarán su forma original tras el período de restauración; si el choque es más violento y las esferas son menos elásticas, puede resultar que éstas adquieran deformaciones permanentes.



(*a*) Antes del choque

(*b*) Máxima deformación durante el choque

(*c*) Después del choque

Figura 3.14

Tal como vimos en el apartado 3.9, dado que durante el choque las fuerzas de contacto tienen el mismo módulo y sentidos opuestos, la cantidad de movimiento del sistema permanece constante. Así pues, aplicando la ley de la conservación de la cantidad de movimiento podemos escribir

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{3.31}$$

Ello en la hipótesis de que todas las fuerzas que actúen sobre las esferas durante el choque, diferentes a las fuerzas de contacto internas, sean relativamente pequeñas y produzcan impulsos despreciables en comparación con el impulso asociado a cada una de las fuerzas internas desarrolladas durante el choque. Suponemos, además, que durante la breve duración del choque no tienen lugar cambios de posición apreciables.

Para unas condiciones iniciales y unas masas dadas, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento contiene dos incógnitas, v_1' y v_2'. Es evidentemente necesaria una relación adicional para poder determinar las velocidades finales. En esta relación debe reflejarse la capacidad de los cuerpos en contacto para recuperarse del choque y puede expresarse mediante el cociente e del impulso durante el tiempo de restauración y el impulso durante el tiempo de deformación. Este cociente recibe el nombre de *coeficiente de restitución*. Si representamos por F_r y F_d, respectivamente, los módulos de las fuerzas de contacto durante los períodos de restauración y de deformación (fig. 3.15), la definición de e combinada con el teorema de la cantidad de movimiento nos dará para la masa puntual 1

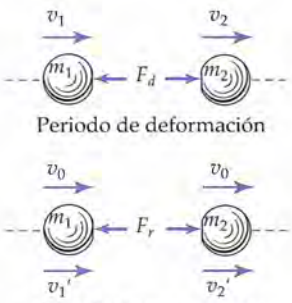


Figura 3.15

$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r \, dt}{\int_{t}^{t_0} F_d \, dt} = \frac{m_1[-v_1' - (-v_0)]}{m_1[-v_0 - (-v_1)]} = \frac{v_0 - v_1'}{v_1 - v_0}$$

http://gratislibrospdf.com/

Y análogamente, para la masa puntual 2 tendremos

$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r\, dt}{\int_{t}^{t_0} F_d\, dt} = \frac{m_2[-v_2' - (-v_0)]}{m_2[-v_0 - (-v_1)]} = \frac{v_2' - v_0}{v_0 - v_2}$$

En estas ecuaciones se ha puesto cuidado en expresar la variación de la cantidad de movimiento (y por tanto, Δv) en el mismo sentido que el impulso (y por tanto la fuerza). El tiempo durante el cual tiene lugar la deformación es t_0 y el tiempo de contacto total es t. Eliminando v_0 entre las dos ecuaciones y despejando e resulta

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{|\text{velocidad relativa de separación}|}{|\text{velocidad relativa de acercamiento}|} \qquad (3.32)$$

Si además de las condiciones iniciales se conoce e para el choque en cuestión, las ecuaciones 3.31 y 3.32 nos darán sendas ecuaciones de las velocidades finales desconocidas.

Los fenómenos de choque van casi siempre acompañados de pérdida de energía, que puede calcularse restando a la energía cinética del sistema inmediatamente antes del choque la energía cinética del sistema inmediatamente después del choque. Esta pérdida de energía tiene lugar mediante la generación de calor durante la deformación inelástica localizada del material, mediante la generación y disipación de ondas elásticas en el interior de los cuerpos y mediante la generación de energía acústica.

Según esta teoría clásica del choque, un valor $e = 1$ significa que la capacidad de los dos cuerpos para restaurarse es igual a su tendencia a deformarse. Esta condición es la de *choque elástico*, sin pérdida de energía. En cambio, un valor $e = 0$ caracteriza al *choque inelástico* o *plástico* en el cual los cuerpos quedan unidos después del choque y la pérdida de energía es máxima. Todos los casos de choque se encuentran entre estos dos casos extremos. También debe indicarse que se asocia un coeficiente de restitución a cada *par* de cuerpos en contacto.

El coeficiente de restitución se considera a menudo constante para geometrías dadas y para una combinación dada de materiales en contacto. En realidad, depende de la velocidad de choque y tiende a la unidad cuando la velocidad de choque tiende a cero tal como se representa esquemáticamente en la figura 3.16. Por lo general, los valores de e consignados en manuales no son fidedignos.

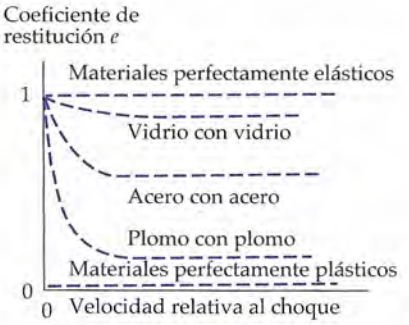


Figura 3.16

(b) Choque central oblicuo. Ampliemos ahora las relaciones obtenidas al estudiar el choque central frontal al caso en que las velocidades iniciales y finales no sean paralelas (fig. 3.17). En esta situación, las esferas de masas m_1 y m_2, dotadas de las velocidades iniciales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ contenidas en el mismo plano, se acercan una a la otra siguiendo trayectorias de colisión tal como se representa en la parte *a* de la figura. Las direcciones de los vectores velocidad se miden arbitrariamente a partir de la dirección tangente común a las superficies en contacto (fig. 3.17*b*). Así pues, las componentes de la velocidad inicial según los ejes t y n son $(v_1)_n = -v_1 \operatorname{sen} \theta_1$, $(v_1)_t = v_1 \cos \theta_1$, $(v_2)_n = v_1 \operatorname{sen} \theta_1$ y $(v_2)_t = v_2 \cos \theta_2$. En la parte *c* de la figura se representa la situación resultante tras el rebote. Las

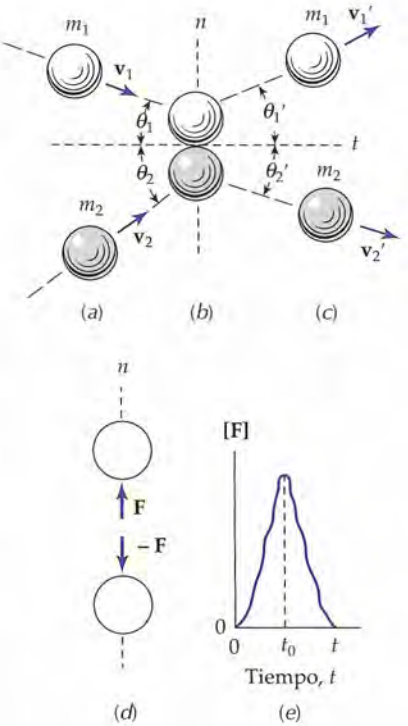


Figura 3.17

http://gratislibrospdf.com/

fuerzas de contacto, representadas por **F** y – **F** en la parte *d* de la figura, varían desde cero hasta su valor máximo durante el período de deformación, para anularse nuevamente durante el período de restauración, tal como se indica en la parte *e* de la figura, donde t es el intervalo de duración del choque.

Para unos valores iniciales dados de m_1, m_2, $(v_1)_n$, $(v_1)_t$, $(v_2)_n$ y $(v_2)_t$ se tendrán cuatro incógnitas, es decir, $(v_1')_n$, $(v_1')_t$, $(v_2')_n$ y $(v_2')_t$. Entonces las cuatro ecuaciones que necesitamos son:

(1) La cantidad de movimiento se conserva en la dirección n, lo que nos da

$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(v_1')_n + m_2(v_2')_n$$

(2) y (3) Se conserva la cantidad de movimiento de cada masa en la dirección x, pues ninguna de ellas recibe impulso alguno según esa dirección. Así pues,

$$m_1(v_1)_t = m_1(v_1')_t$$
$$m_2(v_2)_t = m_2(v_2')_t$$

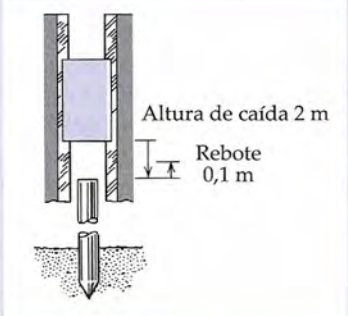
(4) El coeficiente de restitución, al igual que en el caso del choque central frontal, es el cociente de los módulos del impulso restaurador y del impulso de deformación. La ecuación 3.32 será pues aplicable a las componentes de las velocidades en la dirección n y con la notación utilizada en la figura 3.17 tendremos

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

Una vez halladas las cuatro componentes de las velocidades, finales, los ángulos θ_1' y θ_2' de la figura 3.17 se determinan fácilmente.

PROBLEMA TIPO 3.24

El mazo de un martinete de hincar pilotes tiene una masa de 800 kg y se suelta, a partir del reposo, desde 2 m por encima de la cabeza del pilote de 2400 kg. Si se observa que el mazo rebota hasta una altura de 0,1 m tras su impacto sobre el pilote, calcular (a) la velocidad v_p' del pilote inmediatamente tras el impacto, (b) el coeficiente de restitución aplicable y (c) la pérdida porcentual de energía debida al impacto



http://gratislibrospdf.com/

Solución. La conservación de la energía durante una caída libre nos da $v = \sqrt{2gh}$ para las velocidades inicial y final del mazo. O sea

$$v_m = \sqrt{2(9{,}81)(2)} = 6{,}26 \text{ m/s} \qquad v_m' = \sqrt{2(9{,}81)(0{,}1)} = 1{,}40 \text{ m/s}$$

(a) La conservación de la cantidad de movimiento del sistema formado por mazo y pilote nos da

$$800(6{,}26) + 0 = 800(-1{,}40) + 2400 v_p' \qquad v_p' = 2{,}55 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

(b) El coeficiente de restitución resulta ser

$$e = \frac{|\text{vel. rel. de separación}|}{|\text{vel. rel. de acercamiento}|} \qquad e = \frac{2{,}55 + 1{,}40}{6{,}26 + 0} = 0{,}63 \qquad \textit{Resp.}$$

(c) La energía cinética del sistema inmediatamente antes del impacto es la misma que posee el mazo en reposo con relación al pilote y vale

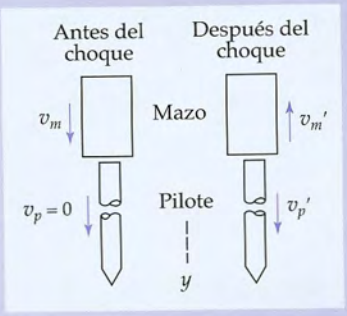
$$T = V_g = mgh = 800(8{,}91)(2) = 15\,700 \text{ J}$$

Inmediatamente después del impacto la energía cinética T' es

$$T' = \tfrac{1}{2}(800)(1{,}40)^2 + \tfrac{1}{2}(2400)(2{,}55)^2 = 8590 \text{ J}$$

Por tanto, la pérdida porcentual de energía será

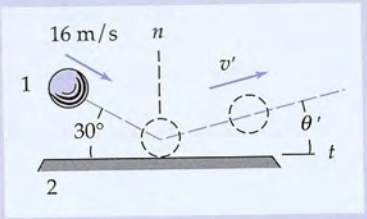
$$\frac{15\,700 - 8590}{15\,700}(100) = 45{,}3\% \qquad \textit{Resp.}$$



① Los impulsos debidos a los pesos del mazo y el pilote son muy pequeños comparados con los impulsos de las fuerza de choque y por ello se desprecian durante éste.

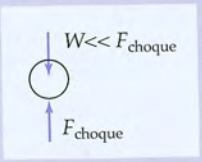
PROBLEMA TIPO 3.25

Sobre la placa metálica de gran masa se lanza una bola de acero a la velocidad de 16 m/s bajo el ángulo de 30° indicado. Siendo 0,5 el coeficiente de restitución efectivo entre la bola y la placa, calcular la velocidad v' y el ángulo θ' de rebote.



Solución. La bola será el cuerpo 1 y la placa será el cuerpo 2. La masa de la placa puede suponerse infinita y, por tanto, su velocidad después del impacto será nula. El coeficiente de restitución debe aplicarse a las componentes de las velocidades normales a la placa, que tienen la dirección de las fuerzas de contacto, y entonces

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} \qquad 0{,}5 = \frac{0 - (v_1')_n}{-16 \operatorname{sen} 30° - 0} \qquad (v_1')_n = 4 \text{ m/s}$$



① Obsérvese aquí que al ser la masa infinita no hay posibilidad de aplicar al sistema el principio de conservación de la cantidad de movimiento en la dirección v_i. En el diagrama para sólido libre se observa que hemos despreciado el impulso producido por el peso W, ya que éste es muy pequeño comparado con la fuerza de contacto.

http://gratislibrospdf.com/

La cantidad de movimiento de la bola permanece inalterada en la dirección t, pues suponiendo superficies lisas no actúan fuerzas sobre la bola en esa dirección. Así pues,

$$m(v_1)_t = m(v_1')_t \qquad (v_1')_t = (v_1)_t = 16 \cos 30^\circ = 13{,}86 \text{ m/s}$$

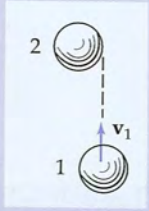
La velocidad de rebote v' y el ángulo θ' correspondiente serán

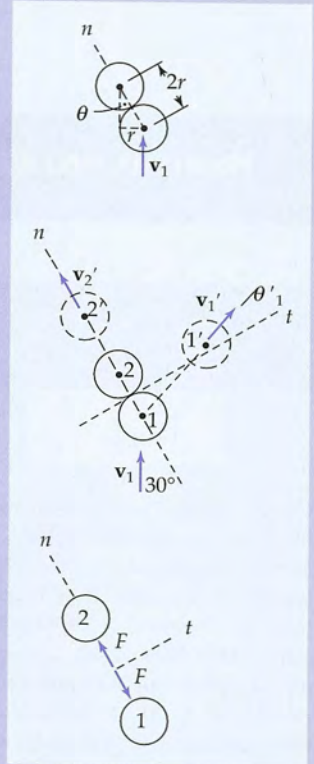
$$v' = \sqrt{(v_1')_n^2 + (v_1')_t^2} = \sqrt{4^2 + (13{,}86)^2} = 14{,}42 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\theta' = \text{arctg}\left(\frac{(v_1')_n}{(v_1')_t}\right) = \text{arctg}\left(\frac{4}{13{,}86}\right) = 16{,}1^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 3.26

La partícula esférica 1 lleva una velocidad $v_1 = 6$ m/s en la dirección indicada y choca con la partícula esférica 2, de igual masa y diámetro, que se halla inicialmente en reposo. Si en estas condiciones el coeficiente de restitución e es 0,6, determinar el movimiento de cada masa después del choque. Calcular también el porcentaje de energía perdida a causa del choque.





Solución. Durante el contacto la geometría indica que la normal n a las superficies en contacto forma un ángulo $\theta = 30^\circ$ con la dirección de $\mathbf{v}_1$, tal como se indica en la figura. Así, las componentes iniciales de las velocidades serán $(v_1)_n = v_1 \cos 30^\circ = 6 \cos 30^\circ = 5{,}196$ m/s, $(v_1)_t = v_1 \text{ sen } 30^\circ = 6 \text{ sen } 30^\circ = 3$ m/s y $(v_2)_n = (v_2)_t = 0$. (1)

La conservación de la cantidad de movimiento del sistema de dos partículas en la dirección n da

$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(v_1')_n + m_2(v_2')_n$$

o sea, como $m_1 = m_2$,

$$5{,}196 + 0 = (v_1')_n + (v_2')_n \qquad (a)$$

La fórmula del coeficiente de restitución es

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} \qquad 0{,}6 = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{5{,}196 - 0} \qquad (b)$$

http://gratislibrospdf.com/

② Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (*a*) y (*b*) resulta

$$(v_1')_n = 1{,}039 \text{ m/s} \qquad (v_2')_n = 4{,}16 \text{ m/s}$$

Con la hipótesis de que las superficies son lisas, no hay fuerzas en la dirección t y, entonces, en esa dirección se conservan las cantidades de movimiento de las partículas. O sea, para las partículas 1 y 2 se tiene

③
$$m_1(v_1)_t = m_1(v_1')_t \qquad (v_1')_t = (v_1)_t = 3 \text{ m/s}$$
$$m_2(v_2)_t = m_2(v_2')_t \qquad (v_2')_t = (v_2)_t = 0$$

Las celeridades finales de las partículas son

$$v_1' = \sqrt{(v_1')_n^2 + (v_1')_t^2} = \sqrt{(1{,}039)^2 + 3^2} = 3{,}17 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$v_2' = \sqrt{(v_2')_n^2 + (v_2')_t^2} = \sqrt{(4{,}16)^2 + 0^2} = 4{,}16 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

El ángulo θ' que $\mathbf{v}_1'$ forma con la dirección t es

$$\theta' = \text{arctg}\left(\frac{(v_1')_n}{(v_2')_n}\right) = \text{arctg}\left(\frac{1{,}039}{3}\right) = 19{,}1^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

Con $m_1 = m_2$ las energías cinéticas inmediatamente antes e inmediatamente después del choque son

$$T = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \tfrac{1}{2}m(6)^2 + 0 = 18m$$
$$T' = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 = \tfrac{1}{2}m(3{,}17)^2 + \tfrac{1}{2}m(4{,}16)^2 = 13{,}68m$$

El porcentaje de energía perdida será, pues,

$$\frac{|\Delta E|}{E}(100) = \frac{T - T'}{T}(100) = \frac{18m - 13{,}68m}{18m}(100) = 24\% \qquad \textit{Resp.}$$

① Es esencial establecer unas coordenadas n y t respectivamente normal y tangente a las superficies en contacto. Los cálculos relativos al ángulo de 30º son cruciales en lo que sigue.

② Adviértase que aunque en el problema clásico del choque central oblicuo haya cuatro ecuaciones en cuatro incógnitas, sólo están acopladas una pareja.

③ Obsérvese que la partícula 2 carece de componente t en sus velocidades inicial y final. Por tanto, su velocidad final $\mathbf{v}_2'$ está confinada en la dirección n.

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMAS

Problemas introductorios

3.243 Calcular las velocidades finales v_1' y v_2' después del choque de los dos cilindros que se deslizan a lo largo de la barra lisa horizontal. El coeficiente de restitución es $e = 0{,}6$.

Resp. $v_1' = 4{,}52$ m/s (hacia la izquierda),
$v_2' = 2{,}68$ m/s (hacia la derecha)

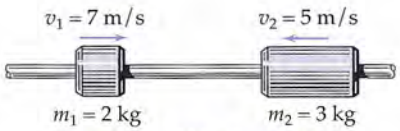


Figura problema 3.243

3.224 Las pelotas de tenis suelen rechazarse si no consiguen rebotar hasta el nivel de la cintura cuando se las deja caer desde el nivel de los hombros. Si una de ellas pasa exactamente la prueba tal como se indica en la figura, hallar el coeficiente de restitución e y el porcentaje n de la energía original perdida en el choque.

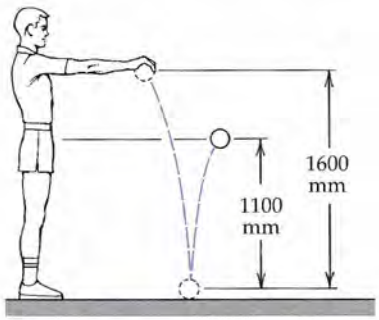


Figura problema 3.244

3.245 Si la pelota de tenis del problema 3.244 tiene un coeficiente de restitución $e = 0{,}8$ al chocar con el suelo de la cancha, hallar la velocidad v_0 con la que debe lanzarse hacia abajo desde la altura de 1600 mm correspondiente al nivel de los hombros para que regrese hasta la misma altura tras rebotar una vez en la superficie de la cancha.

Resp. $v_0 = 4{,}20$ m/s

3.246 Se repiten aquí los dos automóviles del problema 3.192. El B está inicialmente parado y recibe el golpe del A que lleva una celeridad v. Si la masa del automóvil B es pm, siendo m la masa del A y p una constante positiva, y si el coeficiente de restitución es $e = 0{,}1$ expresar las celeridades v_A' y v_B' de los dos automóviles después del choque en función de p y v. Evaluar las expresiones para $p = 0{,}5$.

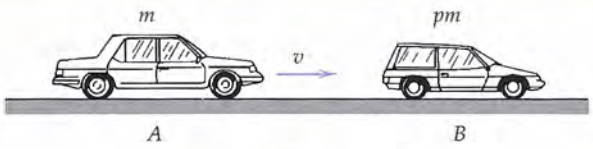


Figura problema 3.246

3.247 La esfera de masa m_1 se mueve con una velocidad inicial v_1 dirigida como se indica y golpea a la esfera de masa m_2. Para un coeficiente de restitución e, hallar para qué cociente m_1/m_2 resulta que m_1 se queda inmóvil tras el choque.

Resp. $\dfrac{m_1}{m_2} = e$

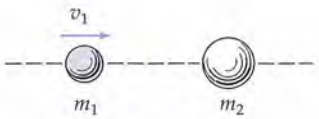


Figura problema 3.247

3.248 El vagón A de masa m_A rueda hacia la derecha al chocar con el vagón B de masa m_B en reposo inicialmente. Si ambos vagones se acoplan tras el impacto, demostrar que la fracción de energía perdida vale $m_B/(m_A + m_B)$.

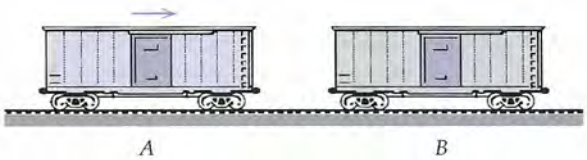


Figura problema 3.248

Problemas representativos

3.249 Tres cilindros de acero iguales pueden deslizarse libremente por el árbol horizontal fijo. Los cilindros 2 y 3 están en reposo y a ellos se aproxima el cilindro 1 con una celeridad u. Expresar la velocidad final v del cilindro 3 en función de u y del coeficiente de restitución e.

Resp. $v = \dfrac{u}{4}(1 + e)^2$

http://gratislibrospdf.com/

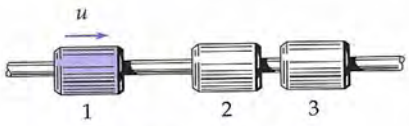


Figura problema 3.249

3.250 El cilindro 1 de masa m que se mueve a la velocidad v_1 golpea contra el cilindro 2 de masa $2m$ inicialmente en reposo. La fuerza de contacto F varía con el tiempo tal como se representa, siendo t_d la duración del período de deformación y t_r la duración del período de restauración. Hallar la velocidad v_2' del cilindro 2 inmediatamente después del choque en función de la velocidad inicial v_1 del cilindro para (*a*) $t_r = t_d$, (*b*) $t_r = 0{,}5\ t_d$ y (*c*) $t_r = 0$.

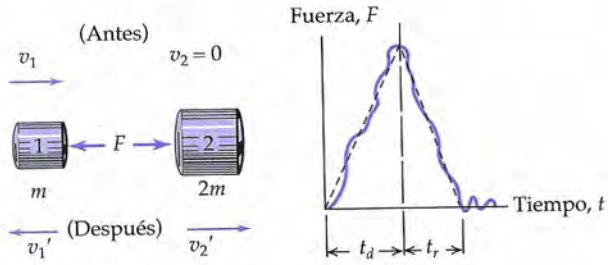


Figura problema 3.250

3.251 Hallar el coeficiente de restitución e para una bola de acero que caiga desde el reposo desde una altura h sobre una placa de acero de gran masa sabiendo que en el segundo rebote sube hasta una altura h_2.

Resp. $e = \left(\dfrac{h_2}{h}\right)^{1/4}$

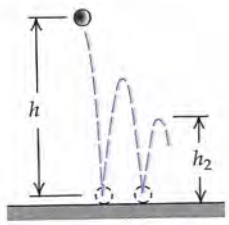


Figura problema 3.251

3.252 Al seleccionar el mazo de un martinete se desea que en cada golpe el mazo ceda toda su energía cinética. Es decir, la velocidad del mazo inmediatamente después del choque debe ser nula. Los pilotes que se trabajan son de 300 kg cada uno y la experiencia indica que el coeficiente de restitución será 0,3 aproximadamente. ¿Cuál debería ser la masa del mazo? Calcular la velocidad v del pilote inmediatamente después del choque si cae el mazo sobre el pilote desde una altura de 4 metros. Calcular también la pérdida de energía ΔE en cada golpe.

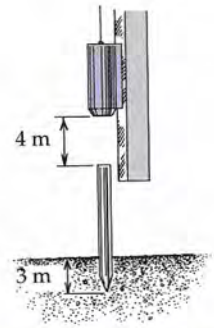


Figura problema 3.252

3.253 ¿A qué altura h hay que servir horizontalmente la pelota de ping-pong para que su centro salve la red como se indica? Hallar también h_2. El coeficiente de restitución en los impactos entre la pelota y la mesa es $e = 0{,}9$ y el radio de la pelota es $r = 18{,}75$ mm.

Resp. $h = 273$ mm, $h_2 = 185{,}8$ mm

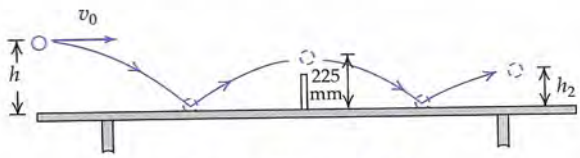


Figura problema 3.253

3.254 La bola de acero choca con la pesada placa de acero con una celeridad $v_0 = 24$ m/s y un ángulo de 60° con la horizontal. Si el coeficiente de restitución es $e = 0{,}8$, calcular la celeridad v y la dirección θ con que la bola sale rebotada de la placa.

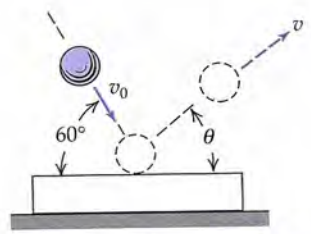


Figura problema 3.254

http://gratislibrospdf.com/

3.255 El problema anterior se modifica de modo que la placa con la que choca la bola tiene ahora una masa igual a la de ésta y está apoyada como se muestra. Calcular las velocidades finales de ambas masas inmediatamente después del choque si la placa está inmóvil y las demás condiciones son las mismas que en el problema anterior.

Resp. Pelota, $v_1' = 12{,}20$ m/s, $\theta = -9{,}83°$
Placa, $v_2' = 18{,}71$ m/s (hacia abajo)

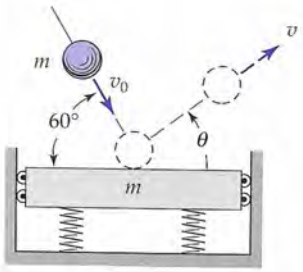


Figura problema 3.255

3.256 Hay que introducir la bola de billar B en la tronera lateral D jugándola con rebote por la banda en C. Especificar la posición x del impacto en la banda para un coeficiente de restitución (*a*) $e = 1$ y (*b*) $e = 0{,}8$.

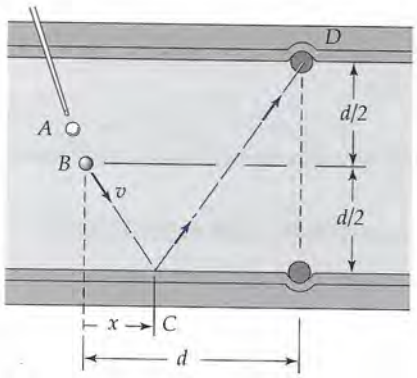


Figura problema 3.256

3.257 En la figura se representan n esferas de igual masa m que cuelgan alineadas de otros tantos cables y de forma que casi se tocan una a otra. Si se suelta la esfera 1 desde la posición de trazos y golpea la esfera 2 a la velocidad v_1, escribir la expresión de la velocidad v_n de la *enésima* esfera inmediatamente después de ser golpeada por la contigua a ella. El coeficiente de restitución común es e.

Resp. $v_n = \left(\dfrac{1+e}{2}\right)^{n-1} v_1$

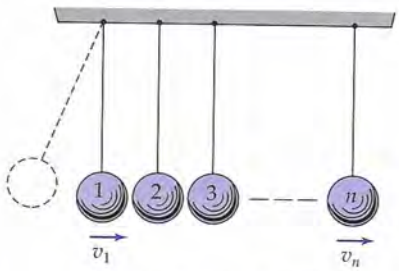


Figura problema 3.257

3.258 La bola se suelta en la posición A y cae sobre el plano inclinado desde una altura de 0,75 m. Si en el choque el coeficiente de restitución es $e = 0{,}85$, hallar el alcance R medido plano abajo.

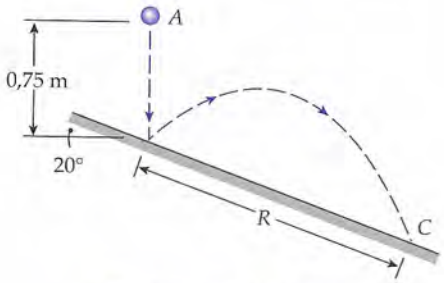


Figura problema 3.258

3.259 En una partida de billar la bola blanca A debe golpear a la bola ocho en la posición que se indica al objeto de lanzarla contra la tronera a una velocidad v_2'. La bola blanca tiene una velocidad v_1 antes del choque y una velocidad v_1' después del choque. El coeficiente de restitución es 0,9. Las dos bolas tienen

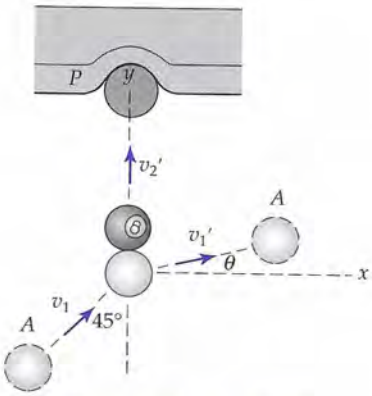


Figura problema 3.259

http://gratislibrospdf.com/

iguales masa y diámetro. Calcular el ángulo de rebote θ y la fracción n de energía cinética que se pierde en el choque.

Resp. $\theta = 2{,}86°$, $n = 0{,}0475$

3.260 La dos bolas de acero iguales se mueven con las velocidades iniciales v_A y v_B y chocan como se muestra. Siendo $e = 0{,}7$ el coeficiente de restitución, hallar la velocidad de cada bola inmediatamente tras el impacto y el porcentaje n de energía cinética perdida.

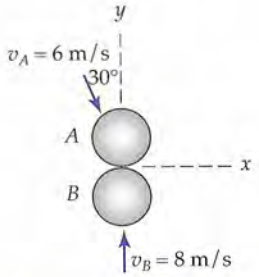


Figura problema 3.260

3.261 La esfera A tiene una masa de 23 kg y un radio de 75 mm, mientras la B tiene una masa de 4 kg y un radio de 50 mm. Si inicialmente describen las trayectorias paralelas representadas con las velocidades indicadas, hallar sus velocidades inmediatamente tras el impacto. Especificar los ángulos θ_A y θ_B que forman los vectores velocidad de rebote con el eje x. El coeficiente de restitución es 0,4 y se desprecia el rozamiento.

Resp. $v_A' = 2{,}46$ m/s, $\theta_A = 40{,}3°$

$v_B' = 9{,}16$ m/s, $\theta_B = -88{,}7°$

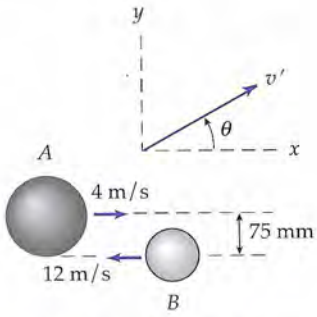


Figura problema 3.261

3.262 La esfera A choca con la esfera B tal como se representa. Si es $e = 0{,}5$ el coeficiente de restitución, hallar las componentes x e y de la velocidad de cada esfera inmediatamente tras el impacto. El movimiento está confinado en el plano x-y.

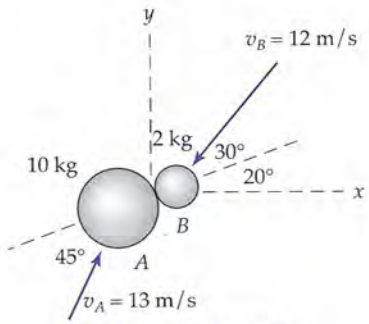


Figura problema 3.262

3.263 Determinar el coeficiente de restitución e que hace que la bola rebote tal como se muestra escalera abajo. La huella y la contrahuella tienen las mismas medidas, d y h respectivamente, en todos los escalones y la bola rebota hasta la misma altura h' por encima de cada escalón. ¿Qué velocidad v_x hace falta para que la bola impacte en el centro de cada huella?

$$\textit{Resp. } e = \sqrt{\frac{h'}{h'+h}},\ v_x = \frac{\sqrt{\frac{g}{2}}d}{\sqrt{h'} + \sqrt{h'+h}}$$

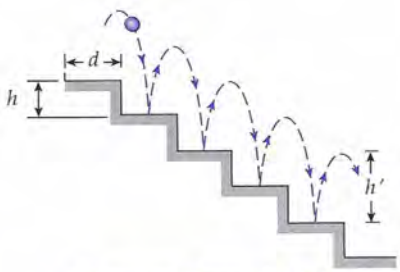


Figura problema 3.263

3.264 En un minigolf un tiro desde la posición A hacia el hoyo D debe realizarse con rebote en la banda de 45°. Empleando la teoría de este apartado, determinar la distancia x para la cual se conseguirá el hoyo. El coeficiente de restitución asociado al choque con la banda es $e = 0{,}8$.

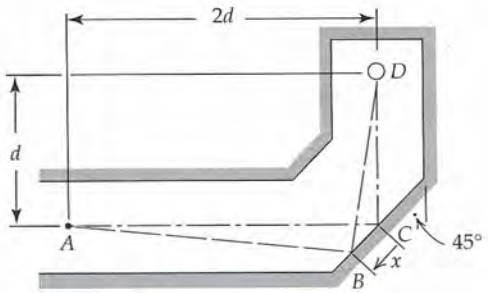


Figura problema 3.264

http://gratislibrospdf.com/

3.265 Durante el precalentamiento anterior a un partido, dos pelotas de baloncesto chocan, tal como se muestra, encima del aro. Inmediatamente antes, la pelota 1 lleva una velocidad $\mathbf{v}_1$ que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si, también inmediatamente antes del choque, la pelota 2 lleva una velocidad $\mathbf{v}_2$ de módulo igual al de $\mathbf{v}_1$, hallar los dos posibles valores del ángulo θ, medidos respecto a la horizontal, que pueden hacer que la pelota 1 entre directamente por el centro del aro. El coeficiente de restitución es $e = 0{,}8$.

Resp. $\theta = 82{,}3°$ ó $-22{,}3°$

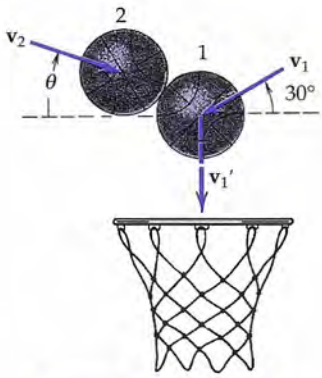


Figura problema 3.265

3.266 En una partida de billar, la bola ocho ha de ser golpeada por la blanca A para que la impulse a entrar por la tronera de la esquina derecha B. Especificar la distancia x desde la tronera de la esquina izquierda C al punto donde la bola blanca golpea en la banda después de chocar con la bola ocho. Las bolas, de masa iguales, tienen 50 mm de diámetro y el coeficiente de restitución es $e = 0{,}9$.

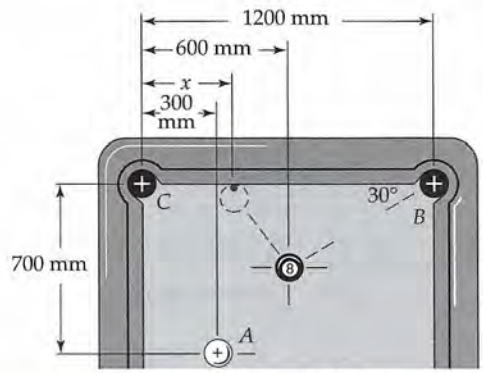


Figura problema 3.266

3.267 Un niño lanza una pelota desde el punto A con una celeridad de 15 m/s. La pelota golpea el muro en el punto B y luego regresa exactamente al punto A. Hallar cuál ha de ser el ángulo α si el coeficiente de restitución en el choque con la pared es $e = 0{,}5$.

Resp. $\alpha = 11{,}55°$ ó $78{,}4°$

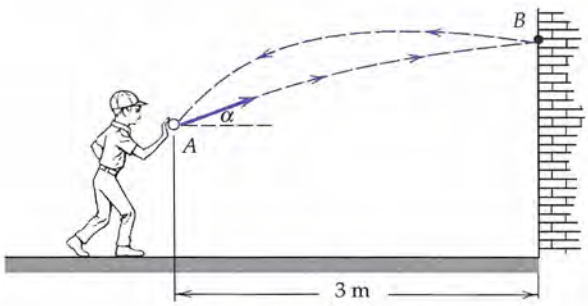


Figura problema 3.267

3.268 La esfera de 2 kg se proyecta horizontalmente con una velocidad de 10 m/s contra el carro de 10 kg apoyado en el resorte de 1600 N/m de rigidez. Inicialmente el carro está en reposo y el resorte sin comprimir. Si el coeficiente de restitución es 0,6, calcular la velocidad de rebote v', el ángulo de rebote θ' y el máximo desplazamiento δ del carro tras el impacto.

Resp. $v' = 6{,}04$ m/s, $\theta = 85{,}9°$, $\theta = 165{,}0$ mm

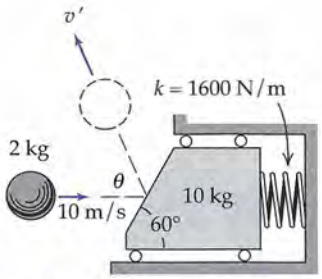


Figura problema 3.268

3.13 MOVIMIENTO BAJO FUERZAS CENTRALES

Cuando un punto material se mueve bajo la acción de una fuerza dirigida hacia un centro de atracción fijo, el movimiento se dice que está originado por una *fuerza central*. El ejemplo más común de dicho tipo de movimiento se encuentra en los planetas y satélites. La leyes que rigen ese movimiento fueron deducidas

http://gratislibrospdf.com/

por Kepler (1571-1630) observando el movimiento de los planetas. La dinámica del movimiento bajo la acción de fuerzas centrales es esencial para el cálculo y proyecto de cohetes de vuelo a gran altura, satélites artificiales y vehículos espaciales de toda clase.

Consideremos un punto material de masa m (fig. 3.18) que se mueva bajo la acción de la atracción central gravitatoria

$$F = G\frac{mm_0}{r^2}$$

donde m_0 es la masa del cuerpo atractivo supuesto fijo, G es la constante de la gravitación universal y r es la distancia que separa las masas. El punto de masa m podría representar a la Tierra o un satélite artificial en su movimiento orbital alrededor de la Tierra por encima de la atmósfera. El sistema de coordenadas más práctico es el de coordenadas polares en el plano del movimiento ya que **F** está siempre dirigida según el sentido negativo de la dirección radial y no habrá fuerzas en la dirección transversal.

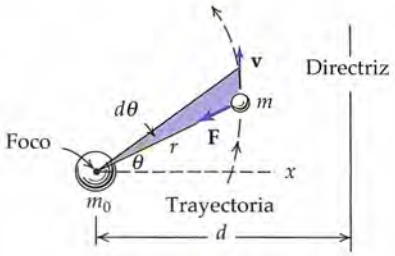


Figura 3.18

Podemos aplicar directamente las ecuaciones 3.8 para las direcciones radial y transversal obteniendo

$$\begin{aligned} -G\frac{mm_0}{r^2} &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 0 &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{aligned} \qquad (3.33)$$

Se ve que la segunda de estas ecuaciones multiplicadas por r/m es igual a $d(r^2\dot{\theta})/dt = 0$, que integrada da

$$r^2\dot{\theta} = h, \qquad \text{una constante} \qquad (3.34)$$

Se pone de manifiesto el significado físico de la ecuación 3.34 observando que el momento cinético $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ de m respecto a m_0 tiene por módulo $mr^2\dot{\theta}$. Así pues, la ecuación 3.34 sólo dice que el momento cinético de m respecto a m_0 permanece constante, o sea, se conserva. Esto se deduce fácilmente de la ecuación 3.27 donde se observa que el momento cinético $\mathbf{H}_O$ permanece constante (se conserva) si no se ejerce sobre el punto ningún momento respecto a un punto fijo O.

Nótese que durante el tiempo dt el radio vector barre una área (sombreada en la figura 3.18) que vale $dA = (\frac{1}{2}r)(r\,d\theta)$. Por tanto, la velocidad con que el radio vector barre esa área es $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ que es constante según la ecuación 3.34. Esta conclusión constituye la *segunda ley* de Kepler del movimiento planetario que dice que en tiempos iguales se barren áreas iguales.

La forma de la trayectoria que sigue m puede obtenerse resolviendo la primera de las ecuaciones 3.33 eliminando el tiempo t en combinación con la ecuación 3.34. Para ello es útil el cambio de variable $r = 1/u$. Así $\dot{r} = -(1/u^2)\dot{u}$, que en virtud de la ecuación 3.34 queda en la forma $\dot{r} = -h(\dot{u}/\dot{\theta})$ o sea $\dot{r} = h(du/d\theta)$. La segunda derivada respecto al tiempo es $\ddot{r} = -h(d^2u/d\theta^2)\dot{\theta}$ que combinada con 3.34 da $\ddot{r} = -h^2u^2(d^2u/d\theta^2)$, que aplicada en la primera de las ecuaciones 3.33 da

$$-Gm_0u^2 = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}h^2u^4$$

http://gratislibrospdf.com/

o sea

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm_0}{h^2} \tag{3.35}$$

que es una ecuación diferencial lineal inhomogénea. La integración de esta conocida ecuación de segundo orden puede efectuarse por sustitución directa y es

$$u = \frac{1}{r} = C\cos(\theta + \delta) + \frac{Gm_0}{h^2}$$

donde C y δ son las dos constantes de integración. El ángulo de fase puede eliminarse eligiendo un eje x tal que r sea mínimo cuando $\theta = 0$. O sea,

$$\frac{1}{r} = C\cos\theta + \frac{Gm_0}{h^2} \tag{3.36}$$

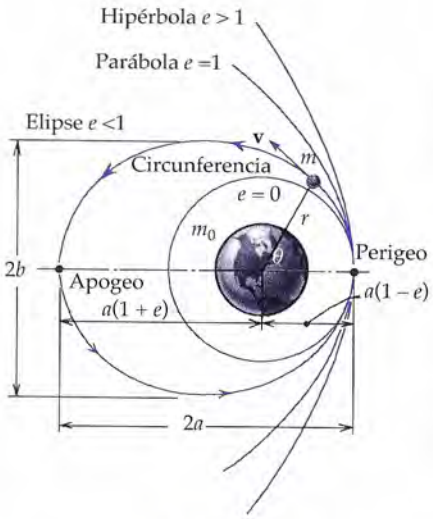


Figura 3.19

La interpretación de 3.36 requiere el conocimiento de las ecuaciones de las secciones cónicas. Recordemos que una sección cónica está formada por el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cociente e entre su distancia a un punto (foco) y a una recta (directriz) es constante. Así pues, de la figura 3.18, $e = r/(d - r\cos\theta)$, que podemos volver a escribir de la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{d}\cos\theta + \frac{1}{ed} \tag{3.37}$$

que es de la misma forma que la ecuación 3.36. Se ve, por tanto, que el movimiento de m tiene lugar a lo largo de una sección cónica en la que $d = 1/C$ y $ed = h^2/(Gm_0)$, o sea

$$e = \frac{h^2C}{Gm_0} \tag{3.38}$$

Hay tres casos a considerar: $e < 1$ (elipse), $e = 1$ (parábola) y $e > 1$ (hipérbola). En la figura 3.19 se representan las trayectorias correspondientes.

Caso I: elipse (e < 1). De la ecuación 3.37 resulta que r es mínimo cuando $\theta = 0$ y es máximo cuando $\theta = \pi$. Así pues,

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{ed}{1+e} + \frac{ed}{1-e} \qquad \text{o sea} \qquad a = \frac{ed}{1-e^2}$$

Expresando la distancia d en función de a, la ecuación 3.37 y los valores máximo y mínimo de r pueden escribirse en la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{a(1-e^2)} \qquad r_{\min} = a(1-e) \qquad r_{\max} = a(1+e) \tag{3.39}$$

Además, la relación $b = a\sqrt{1-e^2}$, que resulta de la geometría de la elipse, da la expresión del semieje menor. Se ve que cuando $e = 0$ la elipse se convierte en una circunferencia de radio $r = a$. La ecuación 3.39 constituye la expresión ma-

http://gratislibrospdf.com/

temática de la antigua *primera ley* de Kepler, según la cual los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.

El período τ de la órbita elíptica es igual al área total A de la elipse dividida por la velocidad areolar constante $\dot{A}$ con que se barre el área. Así pues,

$$\tau = A/\dot{A} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}} \qquad \text{o sea} \qquad \tau = \frac{2\pi ab}{h}$$

en virtud de la ecuación 3.34. Aplicando la 3.38, la identidad $d = 1/C$, las relaciones geométricas $a = ed/(1 - e^2)$ y $b = a\sqrt{1 - e^2}$ para la elipse y la equivalencia $Gm_0 = gR^2$ se tiene, tras simplificar,

$$\tau = 2\pi\frac{a^{3/2}}{R\sqrt{g}} \tag{3.40}$$

Obsérvese que en esta ecuación R es el radio medio del cuerpo atractivo central y que g es el valor absoluto de la aceleración gravitatoria en la superficie del mismo.

La ecuación 3.40 expresa la *tercera ley* de Kepler del movimiento planetario que dice que los cuadrados de los períodos de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.

Caso II: parábola (e = 1). Las ecuaciones 3.37 y 3.38 se convierten en

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{d}(1 + \cos\theta) \qquad \text{y} \qquad h^2C = Gm_0$$

El radio vector y la dimensión a se hacen infinitos al tender θ a π.

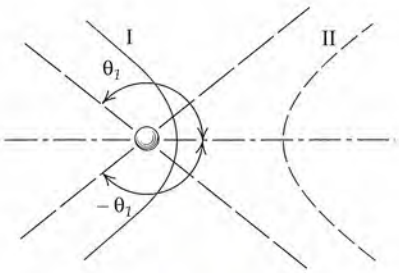


Figura .3.20

Caso III: hipérbola (e > 1). De la ecuación 3.37 se ve que la distancia radial r se hace infinita para los dos valores del ángulo polar θ_1 y $-\theta_1$ definidos por $\cos\theta_1 = -1/e$. Tan sólo la rama I correspondiente a $-\theta_1 < \theta < \theta_1$ (fig. 3.20) representa un movimiento físicamente posible. La rama II corresponde a ángulos del sector restante (con r negativa). Pueden emplearse r positivas para esta rama si se sustituye θ por $\theta - \pi$ y $-r$ por r. Así, la ecuación 3.37 queda de la forma

$$\frac{1}{-r} = \frac{1}{d}\cos(\theta - \pi) + \frac{1}{ed} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{1}{r} = -\frac{1}{ed} + \frac{\cos\theta}{d}$$

Pero esta expresión está en contradicción con la forma de la ecuación 3.36, donde Gm_0/h^2 es necesariamente positivo. Por tanto, la rama II no existe (salvo en el caso de fuerzas repulsivas).

Consideremos ahora las energías del punto de masa m. El sistema es conservativo y la energía constante E de m es la suma de su energía cinética T y de su energía potencial V. La energía cinética es $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2)$ y, según la ecuación 3.15 la energía potencial es $V = -mgR^2/r$. Recuérdese que g es la aceleración absoluta de la gravedad medida en la superficie del cuerpo atractivo, que R es el radio de éste y que $Gm_0 = gR^2$. Así pues,

$$E = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{mgR^2}{r}$$

http://gratislibrospdf.com/

El valor constante de E puede determinarse a partir de su valor para $\theta = 0$, donde $\dot{r} = 0$, $1/r = C + gR^2/h^2$ según la ecuación 3.36 y $r\dot{\theta} = h/r$ según la ecuación 3.34. Aplicándolos en la expresión de E y simplificando se tiene

$$\frac{2E}{m} = h^2C^2 - \frac{g^2R^4}{h^2}$$

Sustituyendo ahora C por su valor de la ecuación 3.38, que se puede escribir como $h^2C = egR^2$ se obtiene

$$e = +\sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{mg^2R^4}} \tag{3.41}$$

Hay que tomar el signo positivo del radical porque e es positiva por definición. Se ve que ahora que para la

órbita elíptica	$e < 1$,	E es negativa
órbita parabólica	$e = 1$,	E es nula
órbita hiperbólica	$e > 1$,	E es positiva

Estas conclusiones dependen, desde luego, de la elección arbitraria del cero de energía potencial ($V = 0$ cuando $r = \infty$).

La expresión de la velocidad v de m puede hallarse a partir de la ecuación de la energía, la cual es

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{mgR^2}{r} = E$$

La energía total E se obtiene de la ecuación 3.41 combinando la ecuación 3.38 y la $1/C = d = a(1 - e^2)/e$ para dar la órbita elíptica

$$E = -\frac{gR^2m}{2a} \tag{3.42}$$

Sustituyendo en la ecuación de la energía y despejando se tiene

$$v^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) \tag{3.43}$$

de la cual puede calcularse el módulo de la velocidad para una órbita particular en función de la distancia radial r. Combinando con la ecuación 3.39 las expresiones de r_{max} y r_{min} correspondientes al perigeo y al apogeo (ec. 3.39), las velocidades en esas dos posiciones de la órbita elíptica quedan, respectivamente, en la forma

$$v_P = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{max}}{r_{min}}}$$
$$v_A = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{max}}{r_{min}}} \tag{3.44}$$

http://gratislibrospdf.com/

En el apéndice D se incluyen datos numéricos referentes al sistema solar que resultan útiles al aplicar las relaciones anteriores a problemas de movimiento planetario.

Los cálculos anteriores se basan en tres hipótesis:

1. Los dos cuerpos poseen unas masas esféricamente simétricas, por lo que pueden tratarse como si sus masas estuvieran concentradas en sus centros respectivos, es decir, como si fueran puntos materiales o partículas.
2. No hay más fuerzas presentes que la gravitatoria que cada masa ejerce sobre la otra.
3. La masa m_0 está fija en el espacio.

La hipótesis (1) es excelente para cuerpos que se hallan distantes del cuerpo atractivo central, cual es el caso de la mayoría de los objetos celestes. Una clase muy importante de problemas para los que la hipótesis (1) resulta deficiente es la que se refiere a satélites artificiales que navegan en la proximidad inmediata de planetas achatados. En lo que respecta a la hipótesis (2) haremos la observación de que la resistencia aerodinámica no es una fuerza que habitualmente pueda ignorarse al estudiar las órbitas de satélites artificiales de baja altitud. En el caso de un satélite artificial en órbita terrestre, la hipótesis (3) introduce un error despreciable porque el cociente entre las masas del satélite y de la Tierra es muy pequeño. Por el contrario, para el sistema Tierra-Luna se introduce un error pequeño pero significativo si se recurre a la hipótesis (3): adviértase que la masa lunar es del orden de 1/81veces la terrestre.

El problema de los dos cuerpos. Vamos ahora a tener en cuenta el movimiento de ambas masas y admitiremos la presencia de otras fuerzas, además de las de atracción mutua, examinando el llamado problema de los "dos cuerpos perturbados". En la figura 3.21 se representa la masa principal m_0, la masa secundaria m, sus respectivos vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ relativos a una referencia inercial, las fuerzas gravitatorias $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ y una fuerza $\mathbf{P}$ no mutua que se ejerce sobre la masa m. Esta fuerza $\mathbf{P}$ puede deberse a la resistencia aerodinámica, a la presión solar, a la presencia de un tercer cuerpo, a actividades de pilotaje, a un campo gravitatorio no esférico o una combinación de éstas u otras causas. Aplicando la segunda ley de Newton a cada masa resulta

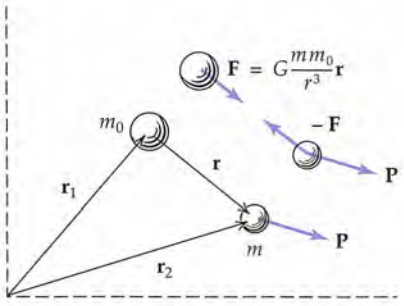


Figura 3.21

$$G\frac{mm_0}{r^3}\mathbf{r} = m_0\ddot{\mathbf{r}}_1 \qquad \text{y} \qquad -G\frac{mm_0}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{P} = m\ddot{\mathbf{r}}_2$$

Dividiendo la primera por m_0, la segunda por m y restando la segunda menos la primera resulta

$$-G\frac{(m_0+m)}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{P}}{m} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}$$

o sea

$$\ddot{\mathbf{r}} + G\frac{(m_0+m)}{r^3}\mathbf{r} = \frac{\mathbf{P}}{m} \tag{3.45}$$

http://gratislibrospdf.com/

Esta ecuación 3.45 es una ecuación diferencial de segundo orden que, una vez resuelta, proporciona el vector de posición relativa **r** en función del tiempo. Habitualmente hacen falta técnicas numéricas para integrar las ecuaciones diferenciales escalares equivalentes a la vectorial 3.45, particularmente si **P** no es nula. Si $m_0 >> m$ y $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, se tiene el problema de los dos cuerpos restringido, cuya ecuación de movimiento es

$$\ddot{\mathbf{r}} + G\frac{m_0}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{0} \tag{3.45a}$$

Expresando **r** y $\ddot{\mathbf{r}}$ en coordenadas polares, la ecuación 3.45*a* se hace

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + G\frac{m_0}{r^3}(r\mathbf{e}_r) = 0$$

Al igualar los coeficientes de los vectores unitarios iguales, retornamos a las ecuaciones 3.33.

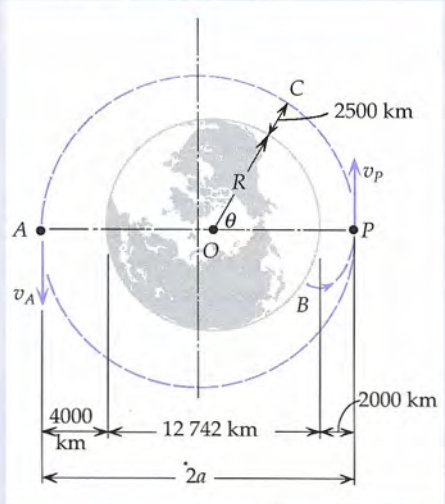
La comparación de las ecuaciones 3.45 (con $\mathbf{P} = \mathbf{0}$) y 3.45*a* nos permite suavizar la hipótesis de que la masa m_0 esté fija en el espacio. Si en las expresiones deducidas con la hipótesis de que m_0 está fija sustituimos ésta por $m_0 + m$ tenemos entonces expresiones que dan cuenta del movimiento m_0. Por ejemplo, la expresión corregida del período de la órbita elíptica de m en torno a m_0 será, según 3.40,

$$\tau = 2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{G(m_0 + m)}} \tag{3.45b}$$

donde se ha empleado la igualdad $R^2g = Gm_0$.

PROBLEMA TIPO 3.27

Desde su cohete portador se lanza un satélite artificial en el punto B del ecuador para ser colocado en una órbita elíptica cuya altura de perigeo es 2000 km. Siendo 4000 km la altura de apogeo, calcular (a) la velocidad de perigeo v_P necesaria y la velocidad de apogeo correspondiente v_A, (b) la velocidad en el punto C en el que la altura del satélite es 2500 km y (c) el período τ de una órbita completa.



http://gratislibrospdf.com/

Solución. (a) Las velocidades de perigeo y apogeo se obtienen de las ecuaciones 3.44, en las que

$$r_{max} = 6371 + 4000 = 10\,371 \text{ km}$$
$$r_{min} = 6371 + 2000 = 8371 \text{ km}$$
$$a = (r_{min} + r_{max})/2 = 9371 \text{ km}$$

(1) Se emplea el valor medio del radio 12 742/2 = 6371 km de la tabla D.2 del apéndice D. Asimismo, se emplea el valor absoluto de la aceleración de la gravedad $g = 9{,}824$ m/s^2 mencionado en el apartado 1.5.

Así pues,

$$v_p = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{max}}{r_{min}}} = 6371(10^3)\sqrt{\frac{9{,}825}{9371(10^3)}}\sqrt{\frac{10371}{8371}}$$
$$= 7261 \text{ m/s} \quad \text{o sea} \quad 26\,140 \text{ km/h} \qquad \textit{Resp.}$$

$$v_A = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{min}}{r_{max}}} = 6371(10^3)\sqrt{\frac{9{,}825}{9371(10^3)}}\sqrt{\frac{8371}{10\,371}}$$
$$= 5861 \text{ m/s} \quad \text{o sea} \quad 21\,099 \text{ km/h} \qquad \textit{Resp.}$$

(2) Hay que poner gran cuidado al manejar las unidades. Lo más seguro suele ser trabajar con las unidades fundamentales, metros en este caso, y hacer las conversiones al final.

(b) A la altura de 2500 km, la distancia al centro de la Tierra es $r = 6371 + 2500 = 8871$ km. Según la ecuación 3.43, la velocidad en el punto C es

$$v_C^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) = 2(9{,}825)[(6371)(10^3)]^2\left(\frac{1}{8871} - \frac{1}{18\,742}\right)\frac{1}{10^3}$$
$$= 47{,}353(10^6)(\text{m/s})^2$$
$$v_C = 6881 \text{ m/s} \quad \text{o sea} \quad 24\,773 \text{ km/h} \qquad \textit{Resp.}$$

(3) Debemos observar aquí que el intervalo de tiempo entre dos pasos sucesivos del satélite que registre sobre su cabeza un observador situado en el ecuador es mayor que el tiempo calculado en este caso, puesto que el observador se habrá desplazado en el espacio a causa de la rotación de la Tierra contemplada verticalmente desde el polo norte.

(c) La ecuación 3.40 nos da el período de la órbita, que resulta ser

$$\tau = 2\pi\frac{a^{3/2}}{R\sqrt{g}} = 2\pi\frac{[(9371)(10^3)]^{3/2}}{(6371)(10^3)\sqrt{9{,}825}} = 9026 \text{ s}$$
$$\text{o sea} \quad \tau = 2{,}507 \text{ h} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

(A menos que se indique otra cosa, las velocidades mencionadas en los problemas siguientes se miden respecto a un sistema de referencia no giratorio cuyo origen coincide con el centro del cuerpo atractivo. Además, si no se dice otra cosa, se despreciará la resistencia aerodinámica. Tómese $g = 9{,}825$ m/s^2 como aceleración absoluta de la gravedad en la superficie terrestre y $R = 6371$ km como radio de la Tierra.)

Problemas introductorios

3.269 ¿Qué velocidad v debe poseer la lanzadera espacial para colocar el telescopio espacial Hubble en una órbita circular a una altura de 590 km por encima de la superficie terrestre?

Resp. $v = 7569$ m/s

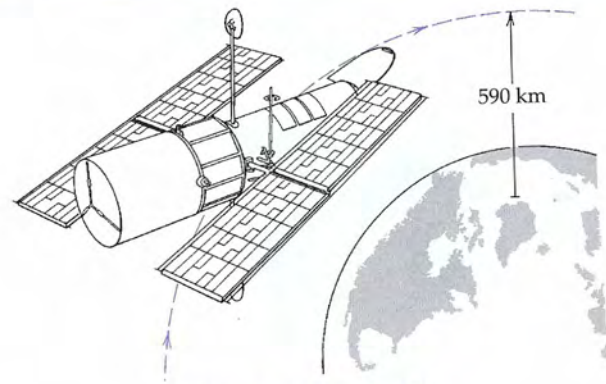


Figura problema 3.269

http://gratislibrospdf.com/

3.270 Calcular la velocidad de un ingenio espacial en órbita alrededor de la Luna a una altitud de 80 km.

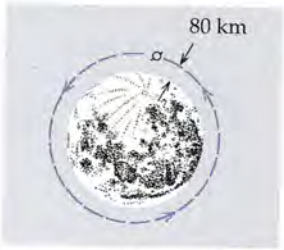


Figura problema 3.270

3.271 Determinar la celeridad relativa al Sol que debe poseer una nave espacial a una distancia de $150(10^6)$ del Sol (es decir, en las proximidades de la órbita terrestre) para que pueda escapar del sistema solar. Consultar la tabla D.2 de los ápendices en lo necesario.

Resp. $v = 151\,400$ km/h

3.272 Demostrar que la trayectoria de la Luna es cóncava hacia el Sol en la posición representada. Se supondrá que el Sol, la Tierra y la Luna están alineados.

Figura problema 3.272

3.273 Un satélite describe una órbita circular de radio $2R$, donde R es el radio de la Tierra. ¿Cuál es el mínimo incremento de velocidad Δv necesario para alcanzar el punto B, que se halla a una distancia $6R$ del centro de la Tierra? ¿En qué punto de la órbita circular original debe producirse ese incremento de velocidad?

Resp. $\Delta v = 1257$ m/s

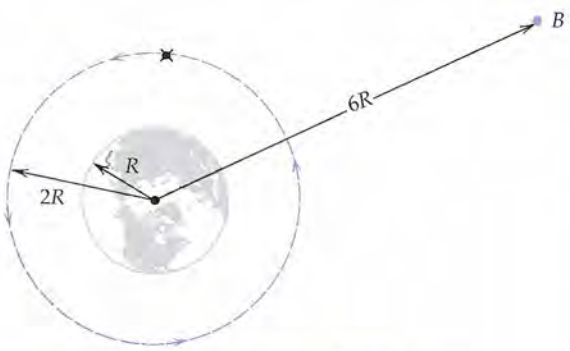


Figura problema 3.273

3.274 Hallar la celeridad v que necesita un satélite terrestre en el punto A para que su órbita sea (*a*) circular, (*b*) elíptica de excentricidad $e = 0{,}1$, (*c*) elíptica de excentricidad $e = 0{,}9$ y (*d*) parabólica. En los casos (*b*) y (*c*), A es el perigeo.

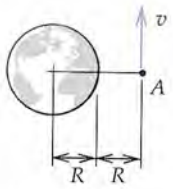


Figura problema 3.274

3.275 El vehículo orbital lanzado a Marte con ocasión del proyecto Viking fue calculado de forma que diese una vuelta completa al planeta exactamente en el mismo tiempo que tarda Marte en girar una vez en torno a su propio eje. Este tiempo es 24 h, 37 min y 23 s. Con ello se consiguió que el vehículo orbital pasara por encima del lugar de llegada al planeta de la cápsula de aterrizaje a la misma hora de cada día marciano a una altura mínima (periápside) del vehículo orbital. En el proyecto Viking I, la altura del periápside del vehículo orbital era 1508 km. Utilizando los datos contenidos en la tabla D.2 del apéndice D, calcular la altura máxima (apoápside) h_a del vehículo orbital en su trayectoria elíptica.

Resp. $h_a = 32\,600$ km

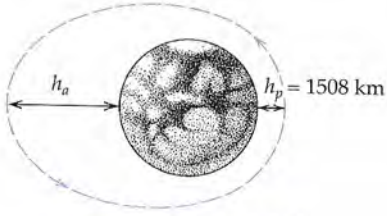


Figura problema 3.275

3.276 De los cuatro satélites mayores de Júpiter (descubiertos por Galileo en 1610), Ganímedes es el más grande y se sabe que tiene una masa de $1{,}490(10^{23})$ kg y un radio orbital de $1{,}070$ (10^6) km en su trayectoria casi circular en torno a Júpiter. La masa de éste es $1{,}900(10^{27})$ kg (318 veces la masa de la Tierra) y su radio ecuatorial es 142 800 km. Calcular la fuerza gravitatoria F que Júpiter ejerce sobre Ganímedes y hallar la aceleración a_n de éste respecto al centro de Júpiter. Emplear este resultado

http://gratislibrospdf.com/

para calcular el período τ y compararlo con el valor observado de 7,16 días sidéreos. (1 día sidéreo = 23,93 h.)

Resp. $h_a = 32\,600$ km

Problemas representativos

3.277 Si la altura del perigeo de un satélite terrestre es 240 km y la de apogeo 400 km, calcular la excentricidad e de la órbita y el período τ de una órbita completa en el espacio.

Resp. $e = 0{,}01196$, $\tau = 5446$ s

3.278 Un satélite terrestre describe una órbita polar de excentricidad 0,2 con la altura mínima a 320 km sobre el polo norte. Un observador A situado exactamente bajo el satélite cuando éste pasa por el ecuador en B observa una variación $\Delta\beta$ en la longitud del satélite cuando el mismo regresa a la posición B en su siguiente vuelta en torno a la Tierra. Calcular $\Delta\beta$.

Figura problema 3.278

3.279 Un satélite pasa sobre el polo norte con una altura para el perigeo de 500 km en una órbita elíptica de excentricidad $e = 0{,}7$. Calcular la velocidad absoluta v del satélite cuando atraviesa el ecuador.

Resp. $v = 25\,680$ km/h

3.280 Una nave espacial se halla en una órbita circular a una altura de 200 km. ¿Qué incremento de velocidad Δv debe comunicar al ingenio su motor cohete para que escape del campo gravitatorio terrestre?

3.281 En una de las órbitas descritas por la nave espacial Apolo alrededor de la Luna, su distancia a la superficie de ésta variaba de 100 a 300 km. Calcular la velocidad máxima de la nave dentro de esa órbita.

Resp. $v_P = 6024$ km/h

3.282 Determinar la diferencia de energía ΔE entre un vehículo orbital de 80 000 kg en su plataforma de lanzamiento en Cabo Cañaveral (latitud 25°) y el mismo vehículo en una órbita circular de altitud $h = 300$ km.

3.283 Un satélite "sin retardos" es el que lleva en su interior una cámara en la que se encuentra una masa tal como se muestra. Si la celeridad del satélite disminuye a causa de las resistencias, la de la masa no disminuye y por tanto se mueve con relación a la cámara como se indica en la figura. Este cambio de posición lo detectan unos sensores y el generador de empuje del satélite se enciende periódicamente al objeto de volver a centrar la masa. De este modo se contrarresta el retardo debido a las resistencias. Si el satélite describe una órbita circular terrestre a 200 km de altitud y el tiempo de encendido total del generador de empuje es de 300 segundos durante 10 órbitas, hallar la fuerza resistente D que actúa sobre el satélite de 100 kg. El generador de empuje produce una fuerza E de 2 N.

Resp. $D = 0{,}01132$ N

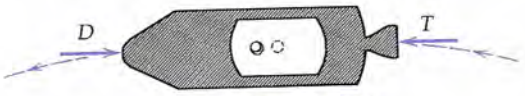


Figura problema 3.283

3.284 Hallar la velocidad v_B en la dirección indicada para que la trayectoria de la nave espacial sea tangente a la órbita circular de radio $2R$ en el punto C.

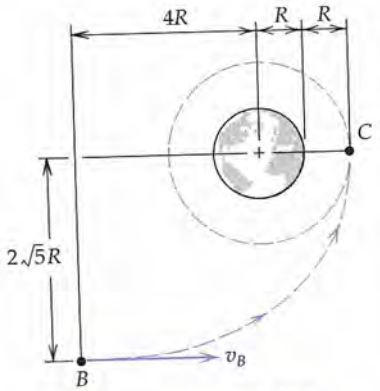


Figura problema 3.284

3.285 Dos satélites B y C describen la misma órbita circular de 800 km de altura. Tal como se indica, el satélite B va 2000 km

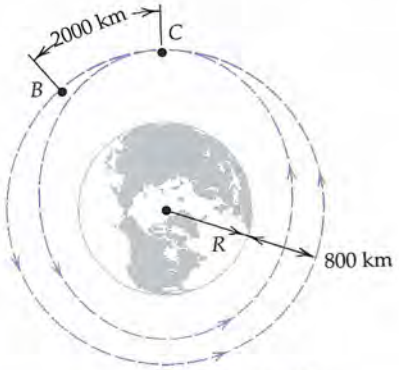


Figura problema 3.285

http://gratislibrospdf.com/

por delante del C. Mostrar que C puede alcanzar a B "pisando los frenos". Concretamente, ¿en qué cuantía Δv debe reducirse la velocidad orbital circular de C para que se encuentre con B tras un período en su nueva órbita elíptica? Comprobar que C no choca con la Tierra en su órbita elíptica.

Resp. $\Delta v = 115{,}5$ m/s

3.286 Un satélite se mueve en una órbita circular a una altura de 320 km sobre la superficie terrestre. Si un motor cohete del satélite produce un incremento de velocidad de 300 m/s en la dirección de su movimiento durante un tiempo muy corto, calcular la altura H del satélite para la nueva posición de su apogeo.

3.287 Un satélite artificial se coloca en su órbita a una altura H con un velocidad absoluta v_0 bajo un ángulo de vuelo β tal como se muestra. Hallar la expresión de la velocidad v del satélite en su órbita en función de su distancia radial r al centro de la Tierra.

Resp. $v^2 = {v_0}^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R+H}\right)$

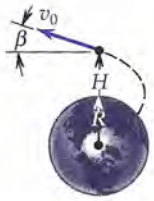


Figura problema 3.287

3.288 Demostrar que la velocidad de un satélite que viaje en órbita circular vale $R\sqrt{g/a}$ cuando llega al extremo C del semieje menor. Demostrar asimismo que la velocidad es la misma que en una órbita circular de radio a.

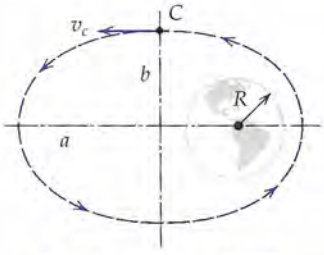


Figura problema 3.288

3.289 La lanzadera espacial de 80 Mg describe una órbita circular a una altura de 320 km. Los dos motores del sistema de maniobra orbital, cada uno de los cuales produce un empuje de 27 kN, se encienden en retroempuje durante 150 segundos. Hallar el ángulo β que forma la intersección de la trayectoria con la superficie terrestre. Supóngase que la posición B del vehículo corresponde al final del funcionamiento de los motores de maniobra y que no tiene lugar pérdida de altura durante ese funcionamiento.

Resp. $\beta = 151{,}3°$

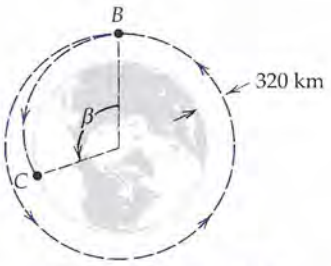


Figura problema 3.289

3.290 Un satélite se pone en órbita polar circular a una distancia H de la superficie terrestre. Cuando en A pasa por encima del polo norte, se activa su retropropulsor produciéndose un empuje negativo momentáneo que reduce la velocidad hasta un valor que asegura el aterrizaje en el ecuador. Deducir la expresión de la reducción de velocidad Δv_A necesaria en A. Obsérvese que A es el apogeo de la trayectoria elíptica.

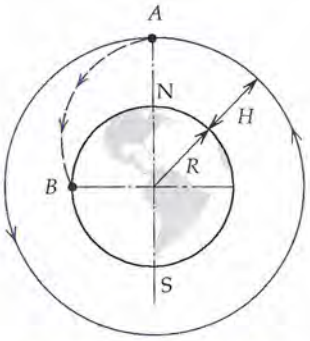


Figura problema 3.290

3.291 Una estación de seguimiento instalada en el ecuador observa la órbita ecuatorial que describe un satélite en dirección oeste-este. Si la altura en el perigeo es $H = 150$ km y su velocidad es v en la vertical de la estación y su altura en el apogeo es 1500 km, hallar la expresión de la velocidad angular p (relativa a la Tierra) con que debe hacerse girar el reflector de la antena cuando el satélite se encuentra justo encima. Calcular p. La velocidad angular de la Tierra es $\omega = 0{,}7292(10^{-4})$ rad/s.

Resp. $p = 0{,}0514$ rad/s

http://gratislibrospdf.com/

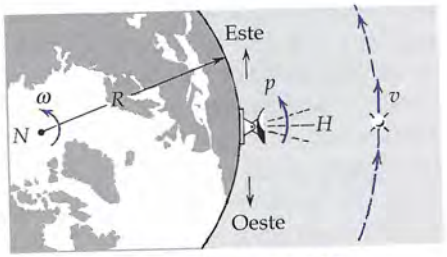


Figura problema 3.291

3.292 Desde B se dispara un proyectil con una celeridad de 2000 m/s formando un ángulo $\alpha = 30°$ con la horizontal tal como se indica. Hallar la altura máxima h_{max}.

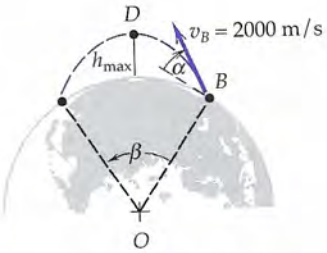


Figura problema 3.292

3.293 El sistema estelar binario está formado por las estrellas A y B, las cuales giran ambas en órbitas en torno al centro de masa del sistema. Comparar el período orbital τ_f calculado con la hipótesis de que la estrella A esté fija con el período τ_{nf} calculado sin esa hipótesis.

Resp. $\tau_f = 21\,760\,000$ s, $\tau_{nf} = 20\,740\,000$ s

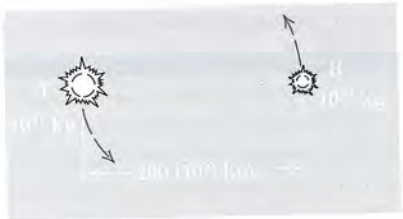


Figura problema 3.293

3.294 Calcular el módulo de la velocidad de lanzamiento necesaria en el punto B para que la trayectoria del proyectil interseque a la superficie terrestre bajo un ángulo β de 90°. La altitud del vértice de la trayectoria es 0,5 R.

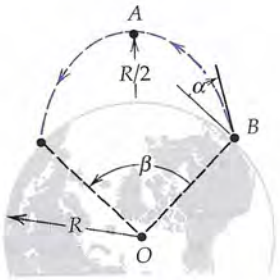


Figura problema 3.294

3.295 Calcular el ángulo de lanzamiento α necesario en el punto B de la trayectoria definida en el problema 3.294.

Resp. $\alpha = 38{,}8°$

3.296 La nave espacial S debe inyectarse en una órbita circular de altura 400 km. Por culpa de una avería en la instalación, la celeridad de inyección v es la correcta para la órbita circular, pero la velocidad inicial **v** forma un ángulo α con la dirección que se pretendía. ¿Cuál es el error máximo permisible α para que el vehículo no choque con la Tierra? Despreciar la resistencia atmosférica.

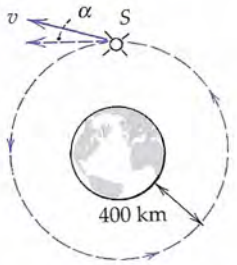


Figura problema 3.296

3.297 Una nave espacial de 800 kg de masa describe una órbita circular a 6000 km por encima de la Tierra y se desea que

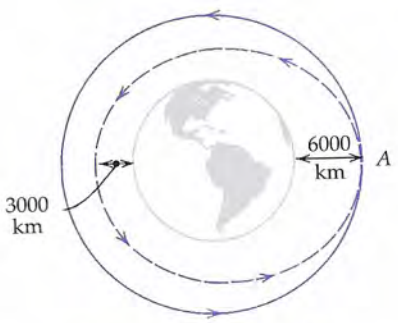


Figura problema 3.297

http://gratislibrospdf.com/

cambie a otra órbita elíptica cuya altura de perigeo sea 3000 km, tal como se muestra. La transferencia se lleva a cabo encendiendo en A el retromotor y produciendo un empuje inverso de 2000 N. Calcular el tiempo t que debe estar activado el motor.

Resp. $t = 162$ s

▶ **3.298** En cierto instante un ingenio espacial tiene en su órbita elíptica la posición y la velocidad que se indican. Hallar la longitud a del semieje mayor de la órbita y el ángulo agudo α que forma el semieje mayor con la recta L. ¿Acabará el satélite chocando con la Tierra?

Resp. $a = 7462$ km, $\alpha = 72{,}8°$; no

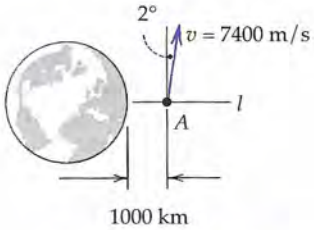


Figura problema 3.298

▶ **3.299** Un vehículo espacial que se mueve en una órbita circular de radio r_1 cambia a otra órbita circular de radio mayor r_2 mediante un tramo elíptico desde A hasta B. (Esta trayectoria se conoce como elipse de cambio de Hohmann.) El salto se efectúa mediante un incremento brusco de celeridad Δv_A en A y un segundo incremento Δv_B en B. Escríbanse las expresiones de Δv_A e Δv_B en función de los radios indicados y del valor g de la gravedad en la superficie terrestre. Si ambos Δv son positivos, ¿cómo puede suceder que la celeridad en la órbita 2 sea menor que en la 1? Calcular el valor numérico de cada Δv si $r_1 = (6371 + 500)$ km y $r_2 = (6371 + 35\,800)$ km. Obsérvese que se ha tomado r_2 como radio de órbita.

$$\text{Resp. } \Delta v_A = R\sqrt{\frac{g}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right)$$

$$= 2370 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_B = R\sqrt{\frac{g}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right)$$

$$= 1447 \text{ m/s}$$

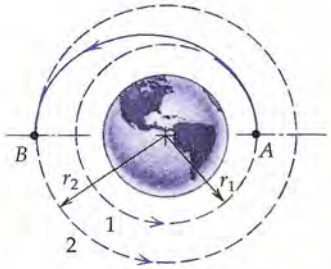


Figura problema 3.299

▶ **3.300** El satélite lleva en B una velocidad de 3200 m/s en la dirección indicada. Hallar el ángulo que sitúa el punto C del choque con la Tierra.

Resp. $\beta = 109{,}1°$

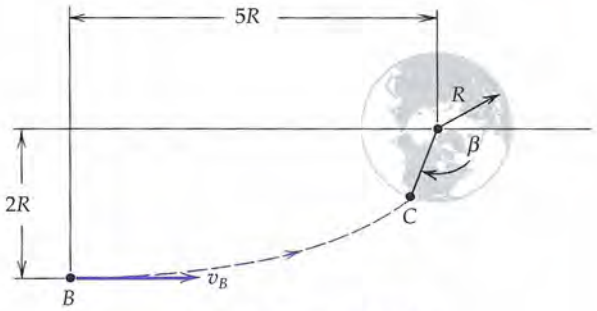


Figura problema 3.300

3.14 MOVIMIENTO RELATIVO

En lo que llevamos de esta exposición de la cinética del punto material hemos aplicado la segunda ley de Newton y los teoremas de las fuerzas vivas y de la cantidad de movimiento a problemas en los que el movimiento se mide respecto a un sistema de referencia que se supone fijo. Lo más aproximado a un sistema de referencia "fijo" es el sistema de referencia primario o sistema de referencia astronómico, que está constituido por un conjunto de ejes ligados a las estrellas fijas. Se considera, entonces, que todos los demás sistemas de refe-

http://gratislibrospdf.com/

rencia se mueven en el espacio, incluidos todos los sistemas de referencia ligados a la Tierra.

Las aceleraciones de los puntos ligados a la Tierra medidas en el sistema primario son, empero, muy pequeñas y normalmente se desprecian en la gran mayoría de las mediciones efectuadas sobre la superficie terrestre. Por ejemplo, la aceleración del centro de la Tierra, en su órbita casi circular alrededor del Sol supuesto fijo, es 0,00593 m/s^2 y la aceleración de un punto del ecuador al nivel del mar respecto al centro de la Tierra supuesto fijo es 0,00399 m/s^2. Es evidente que estas aceleraciones resultan pequeñas comparadas con g y con la mayoría de las aceleraciones que intervienen en las aplicaciones de índole técnica; así pues, sólo cometemos un pequeño error al hacer la hipótesis de que los sistemas de referencia ligados a la Tierra equivalen a un sistema de referencia fijo.

(a) Ecuación del movimiento relativo. Consideremos una partícula de masa m (fig. 3.22) cuyo movimiento se observa desde un sistema de ejes x-y-z dotado de un movimiento de traslación respecto a un sistema de referencia fijo X-Y-Z, de forma que las direcciones x, y y z permanecen siempre paralelas a las direcciones X, Y y Z. El estudio del movimiento con relación a un sistema de referencia que gire lo reservamos para los apartados 5.7 y 7.7 posteriores. Sea $\mathbf{a}_B$ la aceleración del origen B de x-y-z. La aceleración de A observada desde o respecto a x-y-z es $\mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{a}_{A/B} = \ddot{\mathbf{r}}_{A/B}$ y, en virtud de la relación para la aceleración relativa expuesta en el apartado 2.8, la aceleración absoluta de A es

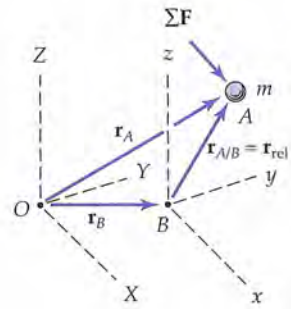


Figura 3.22

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

Entonces, la segunda ley de Newton $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_A$ se escribirá

$$\Sigma\mathbf{F} = m(\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{\text{rel}}) \qquad (3.46)$$

La suma de fuerzas $\Sigma\mathbf{F}$ queda de manifiesto, como siempre, mediante un diagrama para sólido libre completo, el cual será el mismo para un observador en x-y-z que para un observador en X-Y-Z, puesto que en tal diagrama sólo se representan las fuerzas reales que actúan sobre el punto material. Concluimos de inmediato que la segunda ley de Newton no se cumple en un sistema acelerado ya que $\Sigma\mathbf{F} \neq m\mathbf{a}_{\text{rel}}$.

Principio de D'Alambert. Cuando se observa un punto material desde un sistema de ejes fijo X-Y-Z (fig. 3.23*a*), se mide su aceleración absoluta $\mathbf{a}$ y se aplica la conocida relación $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Cuando el mismo punto se observa desde un sistema móvil x-y-z solidario del punto en su origen (fig. 3.23*b*), éste necesariamente parece encontrarse en reposo en el sistema x-y-z. Si el observador pretende que el punto está en equilibrio en x-y-z, deduce la conclusión de que se ejerce una fuerza $-m\mathbf{a}$ que equilibra a $\Sigma\mathbf{F}$. Este punto de vista, que permite tratar los problemas de Dinámica con los métodos de la Estática, fue enunciado en 1743 por D'Alambert en su *Traité de Dynamique*. Este método equivale, simplemente, a escribir la ecuación del movimiento de manera $\Sigma\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$, que tiene la forma de una suma nula de fuerzas si se considera $-m\mathbf{a}$ como fuerza. A esta fuerza ficticia se le da el nombre de *fuerza de inercia* y al estado artificial de equilibrio así creado se la el nombre de *equilibrio dinámico*. La transformación aparente de un problema de Dinámica en otro de Estática se conoce con el nombre de *principio de D'Alambert*.

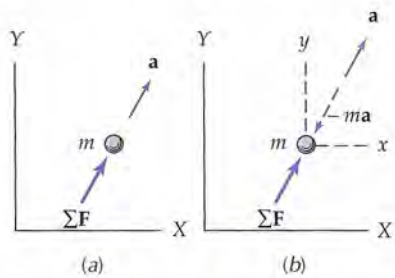


Figura 3.23

http://gratislibrospdf.com/

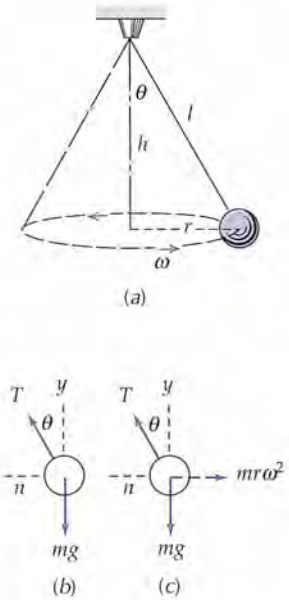


Figura 3.24

Hay diferencia de opiniones acerca de la interpretación del principio de D'Alambert, pero en este libro la forma en que suele ser conocido se trata principalmente como cuestión de interés histórico. Se enunció en un tiempo en el cual el conocimiento y la experiencia que se tenían en el campo de la Dinámica eran muy limitados y constituyó un intento de exponer la Dinámica mediante los principios de la Estática que, por entonces, se conocían de modo mucho más completo. Este recurso de describir una situación real empleando una situación artificial ya no es necesario actualmente, pues hoy día se dispone de conocimientos y experiencias acerca de los fenómenos dinámicos que respaldan decisivamente los procedimientos directos de pensar en términos de Dinámica y no de Estática. Resulta algo difícilmente justificable la persistencia en la aceptación de la Estática como medio para comprender la Dinámica, particularmente en vista de los esfuerzos continuos que se hacen para conocer y describir los fenómenos físicos de manera que no resulten desfigurados.

Citaremos únicamente un ejemplo sencillo de aplicación del principio de D'Alambert. El péndulo cónico de masa m (fig. 3.24*a*) se mueve describiendo una circunferencia horizontal de radio r con velocidad angular ω. Aplicando directamente la ecuación de movimiento $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_n$ en la dirección n de la aceleración, el diagrama para sólido libre, que se representa en la parte *b* de la figura, muestra que T sen $\theta = mr\omega^2$. Combinando esta ecuación con la correspondiente al requisito de equilibrio en la dirección y, T cos $\theta - mg = 0$, pueden hallarse la incógnitas T y θ. Pero si los ejes de referencia se tomaran unidos a la partícula, ésta aparecería en equilibrio relativo a esos ejes. En consecuencia, habría que añadir la fuerza de inercia $-m\mathbf{a}$, lo que equivale a imaginar la aplicación de $mr\omega^2$ en sentido opuesto al de la aceleración, según se indica en la parte *c* de la figura. Con este pseudodiagrama para sólido libre, la suma nula de fuerzas según la dirección n da T sen $\theta - mr\omega^2 = 0$ que, desde luego, da el mismo resultado que antes. Podemos concluir que con esta formulación no se obtiene ventaja alguna. Los autores desaconsejan su empleo porque no supone ninguna simplificación y, en cambio, agrega una fuerza inexistente al diagrama. En el caso de una partícula que recorra una trayectoria circular, esta hipotética fuerza de inercia se denomina *fuerza centrífuga* ya que está dirigida en el sentido de alejamiento del centro y su sentido es opuesto al de la aceleración. Se insta al alumno a que se dé cuenta de que no existe tal fuerza centrífuga aplicada a la partícula. La única fuerza horizontal que podría denominarse adecuadamente centrífuga sería la componente horizontal de la tracción T que la partícula ejerce *sobre* el hilo.

(b) Movimiento relativo a sistemas en traslación uniforme. Al estudiar el movimiento de un punto material relativo a sistemas de referencia en movimiento, es importante considerar el caso particular en que se observa el movimiento desde un sistema de referencia en traslación que se mueva a velocidad constante. Si los ejes x-y-z de la figura 3.22 se mueven a velocidad constante, será $\mathbf{a}_B = 0$ y la aceleración del punto material será $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{\text{rel}}$. Por consiguiente, la ecuación 3.46 puede escribirse

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{\text{rel}} \tag{3.47}$$

que nos dice que la segunda ley de Newton se cumple para mediciones efectuadas en un sistema que se mueva a velocidad constante. Tal sistema se conoce como sistema de referencia newtoniano, o inercial. Los observadores

http://gratislibrospdf.com/

solidarios del sistema móvil y los solidarios del sistema fijo concordarán en sus designaciones de la fuerza resultante que actúa sobre la partícula al dibujar sus diagramas para sólido libre, pues éstos serán exactamente iguales siempre que eviten el uso de las llamadas "fuerzas de inercia".

Vamos a examinar ahora el tema paralelo de la validez de los teoremas de las fuerzas vivas y de la cantidad de movimiento respecto a un sistema no giratorio en traslación uniforme. Regresemos a la figura 3.22 en la que los ejes x-y-z se mueven a velocidad constante $\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B$ respecto a los ejes fijos X-Y-Z. La trayectoria de la partícula en x-y-z está regida por r_{rel} y se representa esquemáticamente en la figura 3.25. El trabajo que $\Sigma\mathbf{F}$ efectúa en x-y-z es $dU_{rel} = \Sigma\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}_{rel}$. Pero $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_A = m\mathbf{a}_{rel}$ ya que $\mathbf{a}_B = \mathbf{0}$. Además, $\mathbf{a}_{rel}\cdot d\mathbf{r}_{rel} = \mathbf{v}_{rel}\, d\mathbf{v}_{rel}$ por la misma razón que en el apartado 2.25 sobre movimiento curvilíneo era $a_t\, ds = v\, dv$. Así pues, tenemos

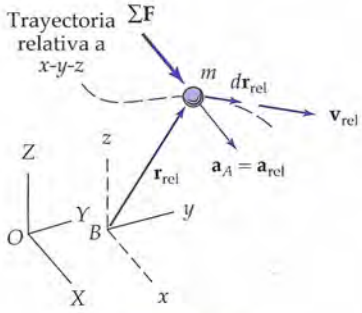


Figura 3.25

$$dU_{rel} = m\mathbf{a}_{rel}\cdot d\mathbf{r}_{rel} = mv_{rel}dv_{rel} = d(\tfrac{1}{2}mv_{rel}^2)$$

La energía cinética relativa en x-y-z la definimos como $T_{rel} = \frac{1}{2}\, mv_{rel}^2$ de forma que se tiene

$$dU_{rel} = dT_{rel} \qquad \text{o sea} \qquad U_{rel} = \Delta T_{rel} \tag{3.48}$$

lo que muestra que el teorema de las fuerzas vivas es válido para mediciones efectuadas en sistemas en traslación uniforme.

En x-y-z el impulso sobre la partícula durante el tiempo dt es $\Sigma F\, dt = m\mathbf{a}_A\, dt = m\mathbf{a}_{rel}\, dt$. Pero $m\mathbf{a}_{rel}\, dt = m\, d\mathbf{v}_{rel} = d(m\mathbf{v}_{rel})$ y así

$$\Sigma\mathbf{F}\, dt = d(m\mathbf{v}_{rel})$$

En x-y-z la cantidad de movimiento del punto material la definimos $\mathbf{G}_{rel} = m\mathbf{v}_{rel}$ y ello nos da $\Sigma\mathbf{F}\, dt = d\mathbf{G}_{rel}$. Al dividir por dt e integrar resulta

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}_{rel} \qquad \text{y} \qquad \int \Sigma\mathbf{F}\, dt = \Delta\mathbf{G}_{rel} \tag{3.49}$$

Así pues, el teorema de la cantidad de movimiento relativa a un sistema de referencia fijo se cumple también para mediciones efectuadas en un sistema en traslación uniforme.

Finalmente, definimos el momento cinético del punto material respecto a un punto en x-y-z, como puede ser el origen B, como el momento de la cantidad de movimiento relativa. Entonces, $\mathbf{H}_{B_{rel}} = \mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{G}_{rel}$. La derivada temporal de esta expresión es $\dot{\mathbf{H}}_{B_{rel}} = \dot{\mathbf{r}}_{rel} \times \mathbf{G}_{rel} + \mathbf{r}_{rel} \times \dot{\mathbf{G}}_{rel}$ cuyo primer sumando es $\mathbf{v}_{rel} \times m\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{0}$ y el segundo es $\mathbf{r}_{rel} \times \Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{M}_B$, o sea, la suma de los momentos respecto a B de todas las fuerzas que actúan sobre m. Así pues, tenemos

$$\Sigma\mathbf{M}_B = \dot{\mathbf{H}}_{Brel} \tag{3.50}$$

lo que muestra que el teorema del momento cinético es válido en los sistemas en traslación uniforme.

Aun cuando sean válidos los teoremas de las fuerzas vivas y de la cantidad de movimiento en un sistema en traslación uniforme, las expresiones del tra-

http://gratislibrospdf.com/

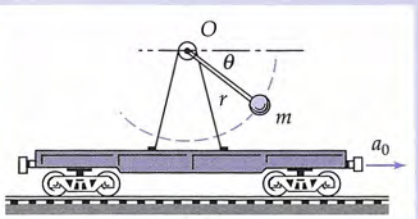
bajo, la energía cinética y la cantidad de movimiento son diferentes de las correspondientes al sistema fijo. Así

$$(dU = \Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_A) \neq (dU_{rel} = \Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_{rel})$$
$$(T = \tfrac{1}{2}mv_A^2) \neq (T_{rel} = \tfrac{1}{2}mv_{rel}^2)$$
$$(\mathbf{G} = m\mathbf{v}_A) \neq (\mathbf{G}_{rel} = m\mathbf{v}_{rel})$$

Las ecuaciones 3.47 a 3.50 constituyen una demostración formal de las ecuaciones de Newton en todos los sistemas no giratorios en traslación uniforme. Esta conclusión podría haberse sospechado del hecho de que $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ depende de la aceleración, pero no de la velocidad. Además, podemos concluir que no es posible llevar a cabo experimento alguno en un sistema en traslación uniforme (sistema de referencia inercial) que sea capaz de revelar la velocidad absoluta de tal sistema, pues todos los experimentos mecánicos darán los mismos resultados en todos los sistemas de referencia inerciales.

PROBLEMA TIPO 3.28

Un péndulo simple de masa m y longitud r está montado sobre la batea de ferrocarril que posee la aceleración horizontal constante a_0 indicada. Si el péndulo se suelta desde el reposo con relación a la batea en la posición $\theta = 0$, hallar el valor de la tensión T de la varilla de masa despreciable en función de θ. Hallar también T para $\theta = \pi/2$ y $\theta = \pi$.



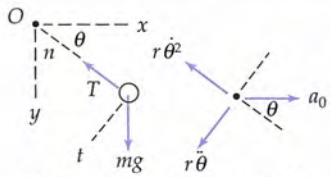


Diagrama para sólido libre — Componentes de la aceleración

Solución. El sistema *x-y* móvil lo vinculamos al vagón en traslación situando por comodidad el origen en *O*. Relativamente a este sistema de coordenadas, las direcciones *n* y *t* son las naturalmente ubicadas, ya que el movimiento es circular respecto a *x-y*. La aceleración de *m* es la dada por la relación de aceleraciones

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{rel}$$

donde $\mathbf{a}_{rel}$ es la aceleración que mediría un observador que se trasladase con el vagón. Este observador mediría una componente *n* de valor $r\dot{\theta}^2$ y una componente *t* de valor $r\ddot{\theta}$. Las tres componentes de la aceleración absoluta de *m* se representan en el esquema.

Primeramente aplicamos la segunda ley de Newton según la dirección *t* y obtenemos

$$[\Sigma F_t = ma_t] \qquad mg \cos\theta = m(r\ddot{\theta} - a_0 \operatorname{sen}\theta) \quad (1)$$

$$r\ddot{\theta} = g\cos\theta + a_0 \operatorname{sen}\theta$$

(1) Empezamos con la dirección *t* porque en la ecuación de la dirección *n*, que contiene la incógnita *T*, interviene $\dot{\theta}^2$, que a su vez se obtiene de una integración de $\ddot{\theta}$.

http://gratislibrospdf.com/

Al integrar para obtener $\dot{\theta}$ en función de θ resulta

$$[\dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \ddot{\theta}\, d\theta] \qquad \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} \frac{1}{r}(g\cos\theta + a_0 \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{r}[g \operatorname{sen}\theta + a_0(1 - \cos\theta)]$$

Apliquemos ahora la segunda ley de Newton según la dirección n, teniendo en cuenta que la componente n de la aceleración absoluta es $r\dot{\theta}^2 - a_0 \cos\theta$.

(2) $[\Sigma F_n = ma_n]$ $\quad T - mg \operatorname{sen}\theta = m(r\dot{\theta}^2 - a_0 \cos\theta)$

$$= m[2g \operatorname{sen}\theta + 2a_0(1 - \cos\theta) - a_0 \cos\theta]$$

$$T = m[3g \operatorname{sen}\theta + a_0(2 - 3\cos\theta)] \qquad \textit{Resp.}$$

(2) Comprobar sin lugar a dudas que $\dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \ddot{\theta}\, d\theta$ puede obtenerse de $v\, dv = a_t\, ds$ dividido por r^2.

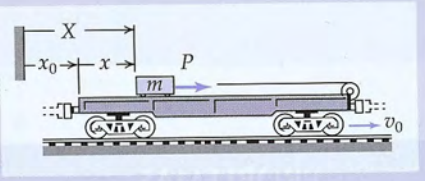
Para $\theta = \pi/2$ y $\theta = \pi$ tenemos

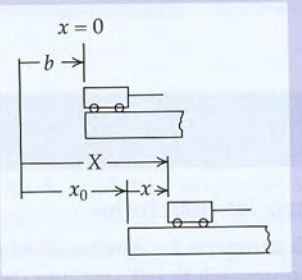
$$T_{\pi/2} = m[3g(1) + a_0(2 - 0)] = m(3g + 2a_0) \qquad \textit{Resp.}$$

$$T_{\pi} = m[3g(0) + a_0(2 - 3[-1])] = 5ma_0 \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 3.29

La batea de ferrocarril se mueve a celeridad constante v_0 y transporta un torno que produce una tracción constante P en el cable unido a la pequeña vagoneta. Esta tiene una masa m y rueda libremente sobre la superficie horizontal, partiendo del reposo relativo al vagón en el instante en que $x = 0$ y $X = x_0 = b$. Aplicar el teorema de las fuerzas vivas a la vagoneta, primero para un observador que se mueva con el sistema de referencia de la batea y, después, para un observador situado en tierra. Poner de manifiesto la compatibilidad de ambas expresiones.





Solución. Para un observador situado en la batea el trabajo de P es

(1) $$U_{\text{rel}} = \int_0^x P\, dx = Px \qquad \text{siendo } P \text{ constante}$$

La variación de energía cinética relativa a la batea es

$$\Delta T_{\text{rel}} = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 0)$$

y el teorema de las fuerzas vivas nos dará para el observador móvil

$$[U_{\text{rel}} = \Delta T_{\text{rel}}] \qquad Px = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2$$

(1) La única coordenada que puede medir el observador móvil es x.

http://gratislibrospdf.com/

Para el observador en tierra el trabajo de P es

$$U = \int_b^X P\, dX = P(X - b)$$

y la variación de energía cinética observada desde tierra es

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}m(\dot{X}^2 - v_0{}^2)$$

(2) Para el observador en tierra la velocidad inicial de la vagoneta es v_0, por lo que su energía cinética es $\frac{1}{2}mv_0{}^2$.

por lo que el teorema de las fuerzas vivas, para el observador inmóvil, resulta

$$[U = \Delta T] \qquad P(X - b) = \tfrac{1}{2}m(\dot{X}^2 - v_0{}^2)$$

Para ver la compatibilidad de esta expresión con la correspondiente al observador móvil pueden hacerse las sustituciones siguientes:

$$X = x_0 + x, \qquad \dot{X} = v_0 + \dot{x}, \qquad \ddot{X} = \ddot{x}$$

Entonces

$$P(X - b) = Px + P(x_0 - b) = Px + m\ddot{x}(x_0 - b)$$
$$= Px + m\ddot{x}v_0 t = Px + mv_0\dot{x}$$

(3) El símbolo t representa el tiempo de movimiento desde $x = 0$ hasta $x = x$. El desplazamiento de la vagoneta $x_0 - b$ es la velocidad de ésta multiplicada por el tiempo t, o sea $x_0 - b = v_0 t$. Además, como la aceleración constante multiplicada por el tiempo es igual a la variación de velocidad, es $\ddot{x}\, t = \dot{x}$.

y

$$\dot{X}^2 - v_0{}^2 = (v_0{}^2 + \dot{x}^2 + 2v_0\dot{x} - v_0{}^2) = \dot{x}^2 + 2v_0\dot{x}$$

con lo cual el teorema de las fuerzas vivas se expresará ahora

$$Px + mv_0\dot{x} = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + mv_0\dot{x}$$

que no es sino $Px = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ tal como concluyó el observador móvil. Vemos así que la diferencia entre ambas expresiones del teorema de las fuerzas vivas es

$$U - U_{\text{rel}} = T - T_{\text{rel}} = mv_0\dot{x}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

3.301 El carro con los ejes x-y solidarios se mueve hacia la derecha con una celeridad absoluta de 2 m/s. A la vez, el brazo sin peso de longitud $l = 0{,}5$ m rota en torno al punto B del carro con la velocidad angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s. Si la masa de la esfera es $m = 3$ kg, hallar las cantidades siguientes para la esfera cuando $\theta = 0$: $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}_{\text{rel}}$, T, T_{rel}, $\mathbf{H}_O$ y $\mathbf{H}_{B_{\text{rel}}}$, donde el subíndice "rel" indica medición respecto a los ejes x-y. El punto O es un punto inercialmente fijo que coincide con B en el instante considerado.

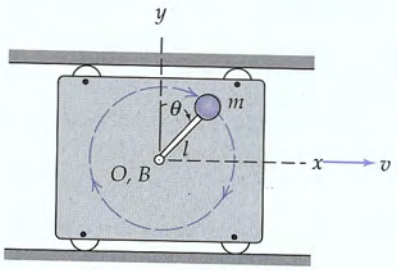


Figura problema 3.301

http://gratislibrospdf.com/

Resp. $\mathbf{G} = 9\mathbf{i}$ kg·m/s, $\mathbf{G}_{rel} = 3\mathbf{i}$ kg·m/s

$T = 13{,}5$ J, $T_{rel} = 1{,}5$ J

$$\mathbf{H}_O = -4{,}5\mathbf{k}\frac{\text{kg·m}^2}{s}, \quad \mathbf{H}_{B_{rel}} = -1{,}5\mathbf{k}\frac{\text{kg·m}^2}{s}$$

3.302 El portaviones se mueve con celeridad constante y lanza un avión a reacción de 3 Mg a lo largo de la cubierta de 75 m por medio de una catapulta accionada a vapor. Si el avión abandona la cubierta con una velocidad de 240 km/h relativa al portaviones y si el empuje del reactor es constante e igual a 22 kN durante el despegue, calcular la fuerza constante P ejercida por la catapulta sobre el avión durante los 75 m del recorrido del carro de lanzamiento.

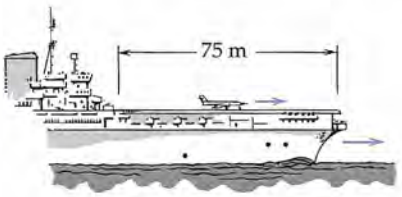


Figura problema 3.302

3.303 La furgoneta de 2000 kg es conducida desde la posición A hasta la B sobre la barcaza que es remolcada a una celeridad constante $v_0 = 16$ km/h. La furgoneta arranca estando parada respecto a la embarcación en el punto A, se acelera hasta $v = 24$ km/h respecto a la barcaza en 25 m y, al final, se detiene merced a una desaceleración del mismo valor. Hallar el módulo de la fuerza total F que se ejerce entre los neumáticos de la furgoneta y la barcaza durante la maniobra descrita.

Resp. $F = 1778$ N

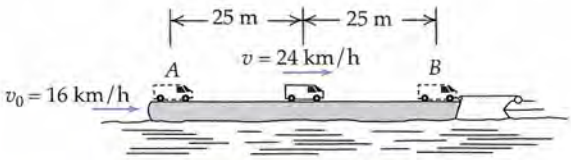


Figura problema 3.303

3.304 Un niño de masa m está de pie inicialmente en reposo respecto a la alfombra rodante, que está animada de una celeridad horizontal constante u. El niño se decide a avanzar más rápido y comienza a caminar desde el punto A con una celeridad creciente hasta llegar al punto B con una celeridad $\dot{x} = v$ respecto a la alfombra rodante. Mientras se acelera, genera una fuerza horizontal media F entre sus zapatos y la alfombra. Escribir el teorema de las fuerzas vivas para sus movimientos tanto absoluto como relativo y explicar el significado del término *muv*.

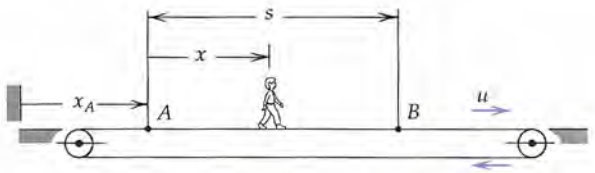


Figura problema 3.304

3.305 La escalera mecánica se mueve con la celeridad constante $u = 0{,}8$ m/s. Un muchacha de 50 kg se encuentra en ella inicialmente en reposo, pero en A comienza a acelerarse uniformemente. En el momento en que llega al punto B, situado a una distancia $s = 7$ m del punto A, su celeridad es $v = 2$ m/s respecto a la escalera. Hallar las componentes horizontal y vertical de la fuerza media F que la escalera ejerce sobre los pies de la muchacha.

Resp. $F_{hor} = 12{,}95$ N, $F_{ver} = 497$ N

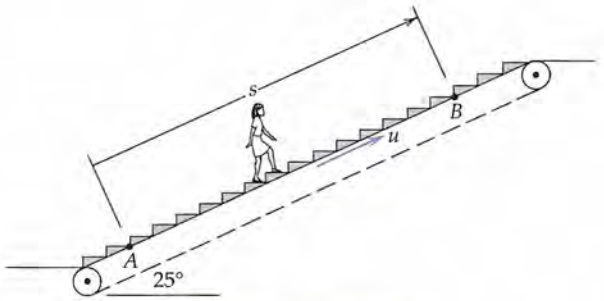


Figura problema 3.305

3.306 Dos naves espaciales A y B viajan por el espacio lejano a lo largo de la misma trayectoria recta. B se encuentra a 20 km directamente por delante de A, respecto a la que lleva una velocidad de 2 km/s. Si se desea estabilizar la separación en 1000 km, hallar que retroempuje F constante hay que aplicar a la nave B, cuya masa es de 200 kg. Calcular el tiempo t que debe durar la aplicación del retroempuje.

Problemas representativos

3.307 El cursor A, de masa 2 kg, se mueve con rozamiento despreciable por la ranura inclinada 30° de la placa deslizante vertical. ¿Qué aceleración vertical a_0 hay que comunicar a la placa para que la aceleración absoluta del cursor esté dirigida

http://gratislibrospdf.com/

verticalmente hacia abajo? ¿Cuál será el valor de la fuerza correspondiente R que sobre el cursor ejerza la ranura?

Resp. $a_0 = 16{,}99\ \text{m/s}^2$, $R = 0$

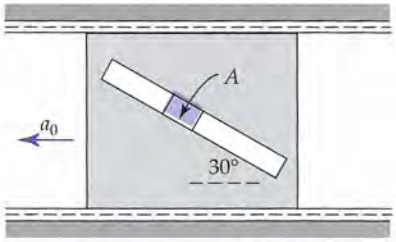


Figura problema 3.307

3.308 Si el portaviones del problema 3.302 se mueve con celeridad constante u y su catapulta lanza un avión de masa m con una velocidad v relativa al portaviones y en el sentido de u, la energía cinética del avión respecto a tierra es $\frac{1}{2}m(v+u)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 + muv$ al final del lanzamiento. Si el avión es lanzado por la misma catapulta con la misma fuerza aceleradora, estando el portaviones parado, su energía cinética es $\frac{1}{2}mv^2$. Explicar la diferencia entre ambas expresiones.

3.309 La catapulta de lanzamiento del portaaviones comunica al reactor de 7 Mg una aceleración constante y lo proyecta a una distancia de 100 m medida a lo largo de la cubierta de vuelo sesgada. El navío se mueve con una celeridad uniforme $v_c =$ 16 m/s. Si para el despegue se necesita que el avión lleve una celeridad absoluta de 90 m/s, hallar la fuerza total F que proporcionan la catapulta y los motores del avión.

Resp. $F = 194{,}0$ kN

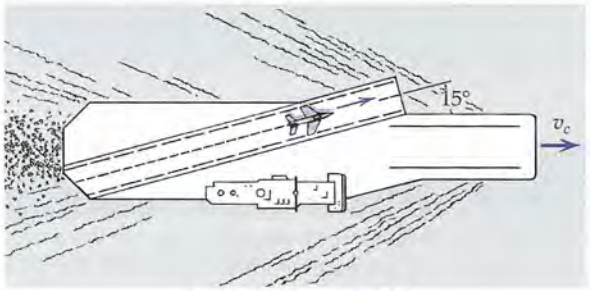


Figura problema 3.309

3.310 Si la batea de ferrocarril recibe una aceleración $a_0 = 0{,}2\ \text{m/s}^2$ a partir del reposo, calcular la correspondiente tracción T en el cable sujeto al embalaje A de 50 kg. Despreciar la masa de la polea B y el rozamiento en ella. El coeficiente de rozamiento entre el embalaje y la superficie horizontal de la batea es $\mu_c = 0{,}30$

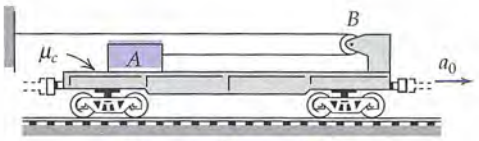


Figura problema 3.310

3.311 Un péndulo simple está instalado en un ascensor que se acelera hacia arriba tal como se indica. Si se separa un ángulo θ_0 de la vertical y se abandona desde el reposo respecto al ascensor, hallar la tracción T_0 que sufre la varilla liviana de suspensión cuando $\theta = 0$. Particularizar el resultado para $\theta_0 = \pi/2$.

Resp. $T_0 = m(g + a_0)(3 - 2\cos\theta_0)$

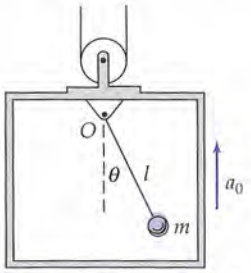


Figura problema 3.311

3.312 La cápsula de masa m parte del reposo relativo al tubo horizontal estando el resorte de rigidez k comprimido inicialmente una longitud δ. La batea está dotada de una velocidad constante v_0 hacia la derecha. Aplicar el teorema de las fuerzas vivas al movimiento de la cápsula tanto para un observador solidario del vehículo como para un observador fijo en tierra. Poner de manifiesto la compatibilidad de ambas expresiones. (*Sugerencia*: En el segundo caso, incluir el resorte en el sistema del observador.)

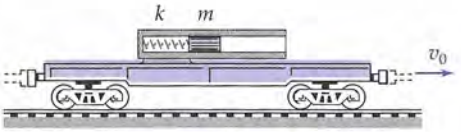


Figura problema 3.312

3.313 Los coeficientes de rozamiento entre la plataforma del camión y el embalaje son $\mu_e = 0{,}8$ y $\mu_c = 0{,}7$. El coeficiente de rozamiento cinético entre los neumáticos del camión y la calzada es 0,9. Si el camión se para desde una celeridad inicial de15 m/s frenando al máximo (con las ruedas patinando), determinar en qué lugar de la plataforma se detiene el embalaje o la velocidad

http://gratislibrospdf.com/

v_{rel} relativa al vehículo con que la misma golpea la espaldera de la plataforma.

Resp. $v_{rel} = 2{,}46$ m/s

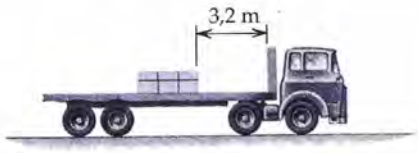


Figura problema 3.313

3.314 Para pequeñas amplitudes θ_1 el péndulo simple de soporte fijo O ejecuta un movimiento armónico simple de período $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$ alrededor de la vertical. Si el soporte O recibe un aceleración horizontal a_0, pequeña pero constante, demostrar que el péndulo oscila alrededor de un eje inclinado $\theta_0 = a_0/g$ con el mismo período que con el soporte fijo, con tal que la amplitud θ_1 siga siendo pequeña.

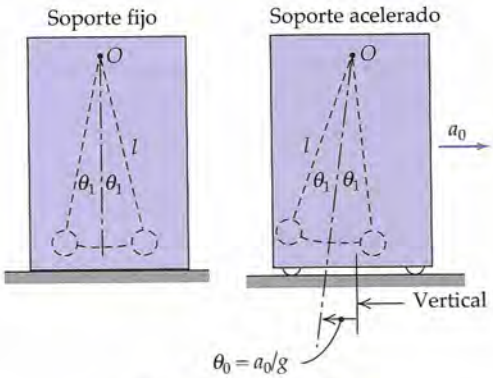


Figura problema 3.314

3.315 Desde el reposo relativo al ascensor se deja caer una bola desde un altura h_1 por encima del suelo. En ese instante, la celeridad del ascensor es v_0. Hallar la altura de rebote h_2 (*a*) si v_0 es constante y (*b*) si el ascensor recibe una aceleración ascendente $a = g/4$ desde el momento en que se suelta la bola. El coeficiente de restitución en el impacto es e.

Resp. (*a*) y (*b*) $h_2 = e^2 h_1$

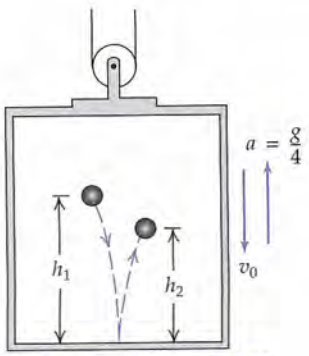


Figura problema 3.135

3.316 El bloquecito A se desliza con rozamiento despreciable pendiente abajo del bloque inclinado que se mueve hacia la derecha a la celeridad constante $v = v_0$. Con el teorema de las fuerzas vivas hallar el módulo v_A de la velocidad absoluta del bloquecito cuando éste pasa por C, si se suelta en B sin velocidad relativa al bloque. Aplicar el teorema desde el punto de vista tanto de un observador solidario del bloque como del suelo y conciliar ambos resultados.

Resp. $v_A = (v_0^2 + 2gl \operatorname{sen}\theta + 2v_0 \cos\theta\sqrt{2gl \operatorname{sen}\theta})^{1/2}$

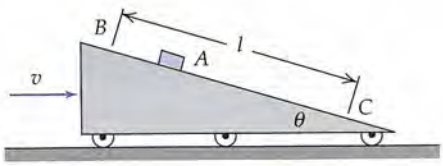


Figura problema 3.316

3.317 Repetir el problema 3.316 pero con el bloque llevando una aceleración constante a_0 hacia la derecha. La velocidad del bloque es v_0 cuando el bloquecito se suelta sin velocidad relativa respecto al primero.

Resp. $v_A^2 = v_0^2 + 2gl \operatorname{sen}\theta + 2 \operatorname{sen}\theta\,(g\cos\theta + a_0 \operatorname{sen}\theta)d$

donde $d = v_0\sqrt{\dfrac{2l}{g \operatorname{sen}\theta - a_0\cos\theta}} + \dfrac{a_0 l}{g \operatorname{sen}\theta - a_0\cos\theta}$

3.318 Cuando se suelta una masa puntual desde el reposo relativo a la superficie terrestre en un punto de latitud γ, la aceleración inicial aparente es la aceleración relativa debida a la gravedad g_{rel}. La aceleración absoluta g debida a la gravedad está dirigida hacia el centro de la Tierra. Deducir una expresión de g_{rel} en función de g, R, ω y γ, donde R es el radio de la Tierra supuesta esférica y ω es la velocidad angular constante de la Tierra en su giro alrededor del eje que pasa por los polos supuesto fijo. (Aunque los ejes x-y-z estén unidos a la Tierra y por ello giren, puede emplearse la ecuación 3.46 en tanto que la masa puntual carece de velocidad relativa a x-y-z.) (*Indica-*

http://gratislibrospdf.com/

ción: Obtener una expresión aproximada mediante los dos primeros términos del desarrollo binómico.)

$$\textit{Resp. } g_{\text{rel}} = g - R\omega^2 \cos^2\gamma\left(1 - \frac{R\omega^2}{2g}\right) + \ldots$$
$$= 9{,}825 - 0{,}03382 \cos^2\gamma \text{ m/s}^2$$

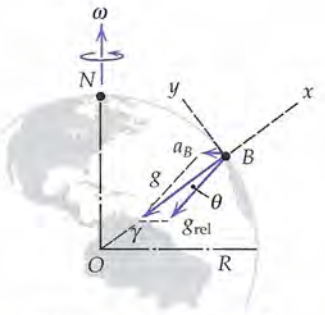


Figura problema 3.318

3.15 REPASO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este capítulo 3 hemos desarrollado los tres procedimientos fundamentales para resolver problemas de cinética de puntos materiales. Esta experiencia es básica en el estudio de la Dinámica y sirve de fundamento para el estudio subsiguiente de la dinámica de los cuerpos rígidos y de los deformables. Hemos comenzado aplicando la segunda ley de Newton $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ a la determinación de la relación instantánea entre las fuerzas y la aceleración que producen. Utilizando lo aprendido en el capítulo 2 para identificar la clase de movimiento y ayudándonos con el diagrama para sólido libre, que ya nos es familiar, para asegurarnos que se tienen en cuenta todas las fuerzas, hemos podido resolver una gran variedad de problemas empleando coordenadas x-y y r-θ para los problemas de movimiento plano y coordenadas x-y-z, r-θ-z y R-θ-ϕ para los problemas tridimensionales.

En segundo lugar, hemos integrado la ecuación fundamental de movimiento $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ respecto al desplazamiento y deducido el teorema de las fuerzas vivas, el cual nos permite relacionar las velocidades iniciales y finales con el trabajo realizado por las fuerzas exteriores al sistema definido. Este procedimiento fue ampliado para incluir la energía potencial, tanto elástica como gravitatoria. Empleando estos instrumentos descubrimos que el método energético es particularmente valioso en el caso de los sistemas conservativos, es decir, sistemas en los cuales las pérdidas de energía por rozamiento o por otras formas de disipación son despreciables.

Seguidamente, escribimos de nuevo la segunda ley de Newton bajo la forma de igualdad entre la fuerza y la variación de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo, y de igualdad entre el momento y la variación del momento cinético por unidad de tiempo. A continuación, integramos esas relaciones para obtener las expresiones del impulso y del impulso angular en función de la cantidad de movimiento y del momento cinético, respectivamente; estas expresiones fueron luego aplicadas a intervalos de movimiento en casos en que las fuerzas eran funciones del tiempo. Además, hemos examinado las acciones recíprocas entre puntos materiales para las condiciones en que se conservan la cantidad de movimiento y el momento cinético.

En la última parte de este capítulo 3 hemos aplicado los tres métodos fundamentales a temas definidos. Concretamente, hemos visto que el principio de

http://gratislibrospdf.com/

conservación de la cantidad de movimiento permite desarrollar cómodamente las relaciones que rigen los choques entre masas puntuales. Seguidamente, hemos comprobado que la aplicación directa de la segunda ley de Newton posibilita la determinación de las propiedades de la trayectoria descrita por una masa puntual sometida a la acción de una fuerza central. Finalmente, hemos visto que cualquiera de los tres procedimientos fundamentales es aplicable al movimiento de una masa puntual relativo a un sistema de referencia en traslación.

Es evidente que para resolver acertadamente problemas de cinética del punto material es condición indispensable conocer la cinemática del punto material. Análogamente, los desarrollos analíticos asociados a los sistemas de puntos materiales y a los sólidos rígidos, a los que se dedica el resto de esta *Dinámica*, dependen fuertemente de los principios fundamentales expuestos en este capítulo 3.

PROBLEMAS DE REPASO

3.319 Un contrapeso de equilibrado de 30 g se sujeta a una de las superficies verticales de la llanta de una rueda mediante un adhesivo. A continuación, la rueda se comprueba en la máquina equilibradora. Si el adhesivo puede soportar una fuerza constante máxima de 80 N, hallar la velocidad de rotación máxima N para la que el contrapeso no se desprende. Se supone que los cambios de velocidad son muy graduales.

Resp. $N = 1177$ rpm

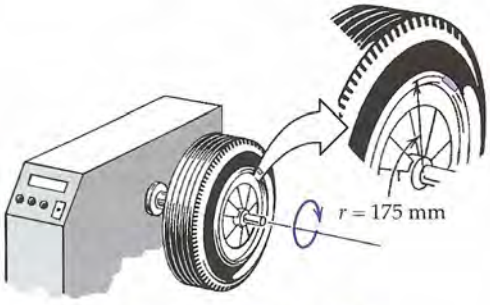


Figura problema 3.319

3.320 En el instante $t = 0$, el carrito de 2 kg se mueve libremente sobre la horizontal a la celeridad de 4 m/s. Una fuerza aplicada al carrito en sentido opuesto al movimiento produce dos "picos" de impulso, uno tras otro, tal como muestra la gráfica de lecturas del instrumento que midió las fuerzas. Utilizar las líneas de trazos como aproximación de las fuerzas y determinar la velocidad v del carrito para $t = 1{,}5$ s.

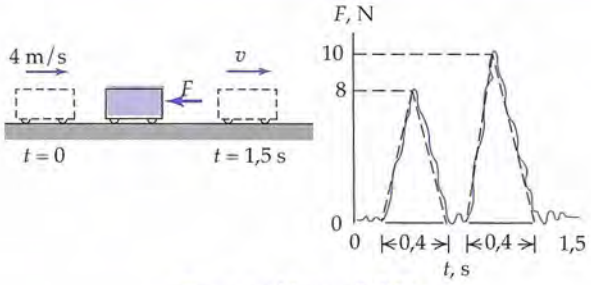


Figura problema 3.320

3.321 La caja se halla en reposo en el punto A cuando recibe un empujón cuesta abajo. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre la caja y la rampa es 0,30 entre A y B y 0,22 entre B y C, hallar su celeridad en los puntos B y C.

Resp. $v_B = 2{,}87$ m/s, $v_C = 1{,}533$ m/s

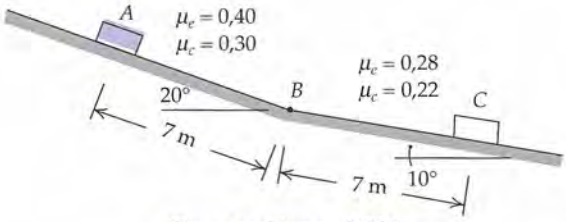


Figura problema 3.321

3.322 Seis esferas iguales están dispuestas como se muestra en la figura. Las dos esferas del extremo izquierdo se sueltan

http://gratislibrospdf.com/

desde las posiciones indicadas en trazos y golpean a la esfera 3 con la celeridad v_1. Suponiendo que el coeficiente de restitución común sea $e = 1$, explicar por qué del extremo derecho salen dos esferas con la celeridad v_1 y no una sola esfera con la celeridad $2v_1$.

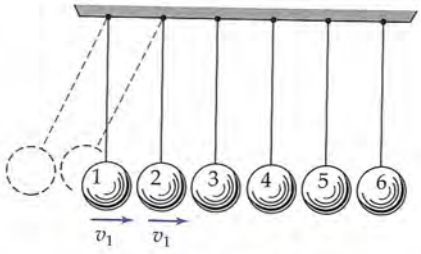


Figura problema 3.322

3.323 El resorte de constante k se comprime y se suelta de repente, haciendo que la partícula de masa m salga resbalando por la pista. Hallar la mínima compresión δ del resorte para la cual la partícula no pierde contacto con el tramo rizado de la pista. La superficie de la pista es lisa a excepción del tramo rugoso de longitud $s = R$, donde el coeficiente de rozamiento cinético vale μ_c.

$$Resp.\ \delta = \sqrt{\frac{mgR(5 + 2\mu_c)}{k}}$$

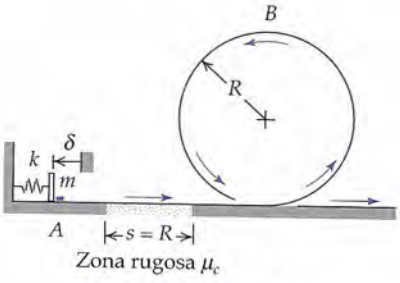


Figura problema 3.323

3.324 En la figura se representa un embrague centrífugo constituido, en parte, por una cruceta rotatoria A que impulsa cuatro émbolos B. Cuando la cruceta empieza a girar en torno a su centro a la celeridad ω, los émbolos se mueven hacia afuera y empujan contra la superficie interior de la rueda C haciéndola girar. La rueda y la cruceta son independientes, salvo el rozamiento de contacto. Si la masa de cada émbolo es 2 kg y su centro de masa está en G, y si el coeficiente de rozamiento cinético entre los émbolos y la rueda es 0,40, calcular el momento máximo M que puede transmitirse a la rueda C para una celeridad de la cruceta de 3000 rpm.

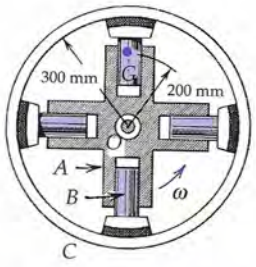


Figura problema 3.324

3.325 Para la órbita elíptica en torno a la Tierra de un ingenio espacial, hallar la celeridad v_A en el punto A que produzca una altura de perigeo de 200 km. ¿Cuál es la excentricidad e de la órbita?

$$Resp.\ v_1 = 7451\ \text{m/s},\ e = 0{,}0295$$

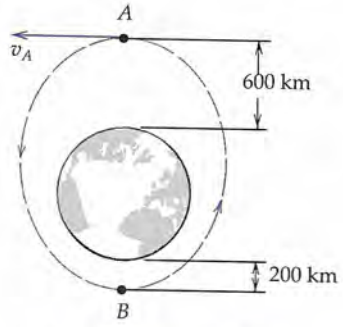


Figura problema 3.325

3.326 Las dos últimas apariciones del cometa Halley tuvieron lugar en 1910 y 1986. Su distancia de máxima aproximación al Sol es más o menos igual a la mitad de la distancia entre la Tierra y el Sol. Hallar la distancia máxima del cometa al Sol. Despreciar los efectos gravitatorios de los demás planetas.

3.327 El bloque A de 3 kg se abandona en reposo en la posición de 60° indicada y choca luego con el carrito B de 1 kg. Si

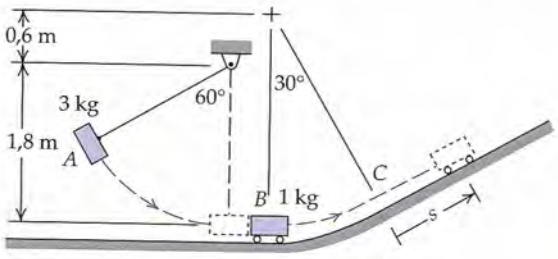


Figura problema 3.327

http://gratislibrospdf.com/

en el choque el coeficiente de restitución es $e = 0{,}7$, hallar hasta qué distancia s el carrito B rebasa el punto C. Despreciar el rozamiento.

Resp. $s = 2{,}28$ m

3.328 La bala de 60 g se dispara a los dos bloques que descansan sobre un superficie con la cual el coeficiente de rozamiento cinético es 0,5. La bala atraviesa el bloque de 8 kg y se queda alojada en el bloque de 6 kg. Los dos bloques se desplazan las distancias que se indican. Calcular la velocidad inicial v de la bala.

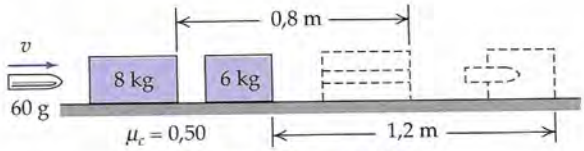


Figura problema 3.328

3.329 Una persona lanza a rodar una bola con celeridad u desde el punto A del suelo. Si $x = 3R$, hallar la celeridad u necesaria para que la bola retorne a A tras rodar por la superficie semicircular entre B y C y describir una trayectoria balística desde C. ¿Cuál debe ser el valor mínimo de x para que pueda lograrse el juego si el contacto debe mantenerse hasta el punto C? Despreciar el rozamiento.

Resp. $u = \frac{5}{2}\sqrt{gR}$, $x_{\min} = 2R$

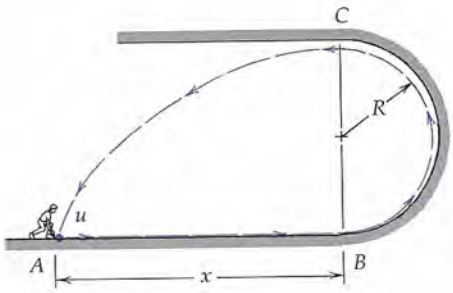


Figura problema 3.329

3.330 Un accidente de automóviles ocurre así: El conductor de un automóvil de tamaño normal (vehículo A, 1800 kg) viaja por una calzada horizontal seca, acercándose a un automóvil pequeño (vehículo B, 900 kg) parado. Exactamente 15 metros antes de la colisión, el conductor aplica los frenos y hace patinar las cuatro ruedas. Tras el choque, el vehículo A patina 15 metros más y el B, cuyo conductor tenía los frenos aplicados a fondo, patina 30 metros. En la figura se representan las posiciones finales de los vehículos. Siendo 0,9 el coeficiente de rozamiento, ¿estaba el conductor de A rebasando el límite de velocidad de 90 km/h antes de aplicar los frenos?

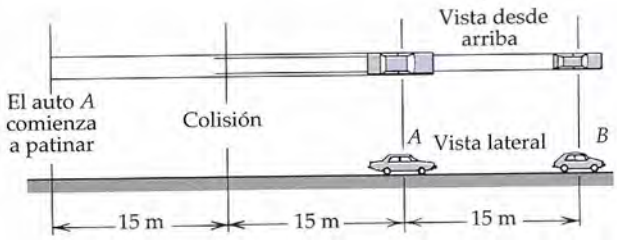


Figura problema 3.330

3.331 La esferita de masa m está unida mediante una cuerda a un pivote O y describe una circunferencia de radio r sobre el plano liso inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. Si en la posición más alta A la esferita tiene una celeridad u, hallar la tracción T que sufre la cuerda cuando la esferita pasa por las posiciones B a 90° y C abajo.

Resp. $T_B = m\left(\frac{u^2}{r} + 2g \operatorname{sen} \theta\right)$

$T_C = m\left(\frac{u^2}{r} + 5g \operatorname{sen} \theta\right)$

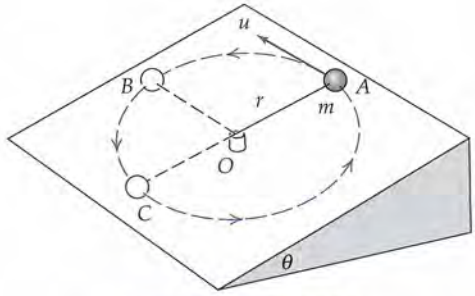


Figura problema 3.331

3.332 La pella de masilla de 2 kg cae desde 2 m sobre el bloque de 18 kg inicialmente en reposo sobre los dos resortes, de

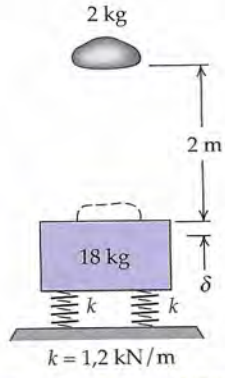


Figura problema 3.332

http://gratislibrospdf.com/

constante $k = 1{,}2$ kN/m cada uno. Calcular la compresión adicional δ de los resortes a causa del impacto de la masilla que se adhiere al bloque al contactarlo.

3.333 Sobre una autopista situada en el ecuador, en dirección este-oeste y a nivel del mar, viaja un automóvil de masa m a la celeridad v_r. Si la autopista sigue la curvatura terrestre, deducir una expresión para la diferencia ΔP entre la fuerza total que sobre las ruedas del vehículo ejerce la calzada cuando el mismo viaja en sentido este y cuando viaja en sentido oeste. Hallar el valor de ΔP para $m = 1500$ kg y $v_r = 200$ km/h. La velocidad angular ω de la Tierra es $0{,}7292(10^{-4})$ rad/s. Despreciar el movimiento del centro de la Tierra.

Resp. $\Delta P = -4m\omega v_r$, $\Delta P = -24{,}3$ N

3.334 El tubo hueco cuarto-circular de sección circular parte del reposo en el instante $t = 0$ y gira alrededor de O en un plano horizontal con una aceleración angular constante antihoraria $\ddot{\theta} = 2$ rad/s^2. ¿En qué instante t se deslizará respecto al tubo la partícula P de 0,5 kg? El coeficiente de rozamiento estático entre la partícula y el tubo es $\mu_e = 0{,}8$.

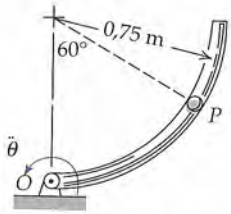


Figura problema 3.334

3.335 Un lanzador de béisbol lanza una pelota rápida con una velocidad horizontal de 145 km/h. El bateador consigue una carrera completa al batear por encima de la valla del campo. La pelota de 146 kg recorre una distancia horizontal de 110 m, con una velocidad inicial en la dirección a 45° que se indica. Hallar el valor de la fuerza media F_{med} que el bate ejerce sobre la pelota durante el contacto de 0,01 s entre ambos cuerpos. Despreciar la resistencia del aire durante el vuelo de la pelota.

Resp. $F_{med} = 987$ N

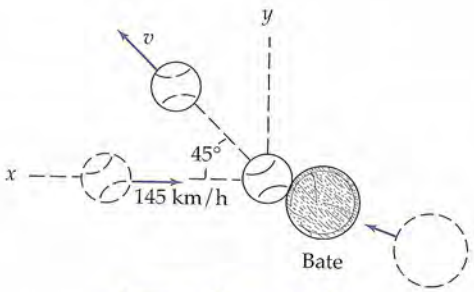


Figura problema 3.335

3.336 Con $\theta = 0°$ el sistema se abandona desde el reposo. La cuerda de la que cuelga el cilindro de 1,5 kg esta arrollada y sujeta en la polea liviana O de 50 mm de diámetro, de la cual son solidarios los brazos de masa despreciable con sus esferas de 2 kg. Los centros de éstas distan 250 y 375 mm del eje que pasa por O. Hallar la velocidad hacia abajo del cilindro cuando $\theta = 30°$.

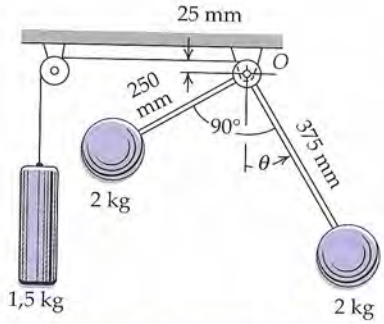


Figura problema 3.336

3.337 El cursor C lleva una celeridad de 3 m/s al pasar por el punto A de la guía, la cual se halla en un plano vertical. El coeficiente de rozamiento cinético entre el cursor y la guía es $\mu_c = 0{,}6$. Calcular la desaceleración tangencial a_t del cursor inmediatamente después de pasar por A si (*a*) el orificio del cursor y la sección de la guía son ambos circulares y (*b*) si orificio y sección de la guía son ambos cuadrados. En el caso (*b*), los lados del cuadrado están verticales y horizontales. Se supone que entre el cursor y la guía hay un leve huelgo.

Resp. (*a*) $a_t = -10{,}75$ m/s^2, (*b*) $a_t = -14{,}89$ m/s^2

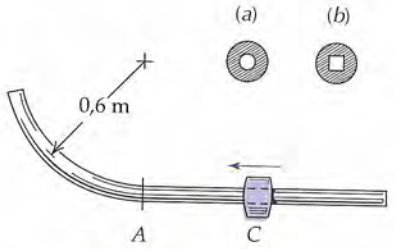


Figura problema 3.337

3.338 En muchos ambientes se ha extendido el deporte del "puenting". En el caso que se ilustra, un hombre de 80 kg salta desde el punto A del puente con la cuerda elástica sujeta a sus tobillos atados y cae 20 m antes de que los diecisiete metros elásticos de aquélla comiencen a estirarse. Los tres metros no elásticos del extremo superior de la cuerda no se estiran apreciablemente. Se observa que el hombre cae una distancia total

http://gratislibrospdf.com/

de 44 m antes de ser proyectado hacia arriba. Despreciar las pérdidas de energía y calcular (*a*) la constante recuperadora k por metro de longitud de la cuerda elástica, (*b*) la velocidad máxima v_{max} que alcanza el hombre en su caída y (*c*) su aceleración máxima a_{max}. El hombre puede tratarse como una partícula sujeta al extremo de la cuerda.

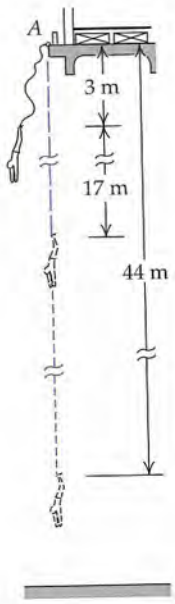


Figura problema 3.338

3.339 El satélite en órbita circular A y el satélite en órbita elíptica B colisionan y se incrustan en el punto C. Si las masas de ambos son iguales, hallar la altitud máxima h_{max} de la órbita resultante.

Resp. $h_{max} = 1438$ km

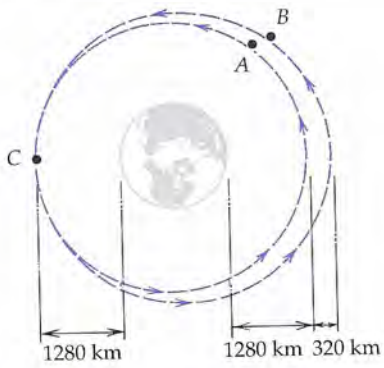


Figura problema 3.339

3.340 Se representa nuevamente el automóvil de prueba de choques del problema 2.30 y se ha determinado que la velocidad de impacto era de 38,9 km/h. Si la masa del vehículo es de 1100 kg y su parte delantera se aplasta $x = 0{,}8$ m, calcular la fuerza media F_{med} que el mismo ejerce contra el obstáculo durante el impacto. Dado que el obstáculo no se mueve, F_{med} no trabaja. Como primera aproximación al análisis, consideramos que el automóvil está compuesto de dos partes como las indicadas. La parte intacta, de masa 650 kg, se mueve 0,8 m durante el choque con una desaceleración media de $8g$. La parte acordeonada tiene una masa de 450 kg y su centro de masa lleva una desaceleración de $4g$. Hallar F_{med} analizando cada parte por separado y determinar la pérdida de energía ΔE durante el choque.

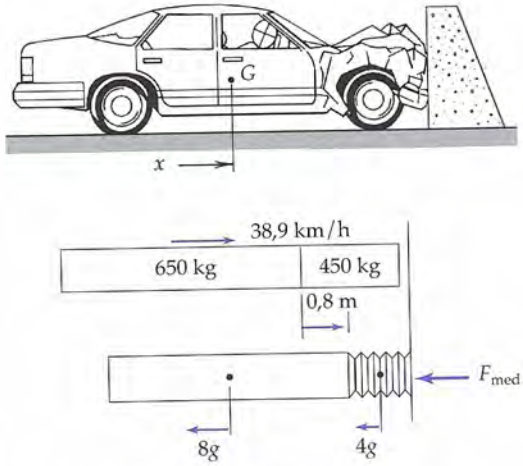


Figura problema 3.340

3.341 El objeto del juego de una máquina recreativa es proyectar la partícula de modo que entre por el agujero E. Cuando se comprime el resorte y se suelta repentinamente, la partícula es lanzada por la pista, que es lisa salvo el tramo rugoso BC, donde hay un coeficiente de rozamiento cinético μ_c. En el punto D la partícula se convierte en un proyectil. Hallar la compresión δ del resorte necesaria para que la partícula entre en el

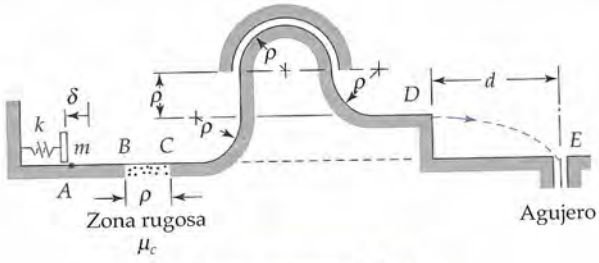


Figura problema 3.341

http://gratislibrospdf.com/

agujero E. Establecer las condiciones que deben cumplir las longitudes d y ρ.

$$Resp.\ \delta = \sqrt{\frac{mg}{k}\left[\frac{d^2}{2\rho} + 2\rho(1+\mu_c)\right]}$$

$$d \geq 2\sqrt{2\rho}$$

3.342 Un lanzamiento largo hace que la pelota dé en el punto A del muro (donde $e_1 = 0{,}5$) y después contra el suelo en el punto B (donde $e_2 = 0{,}3$). El jugador situado fuera del cuadro desea recoger la pelota cuando ésta se halla a 1,2 m sobre el suelo y a 0,6 m por delante suyo, tal como se muestra. Hallar a qué distancia x del muro debe situarse para recoger la pelota en esas condiciones. Adviértase que hay dos soluciones posibles.

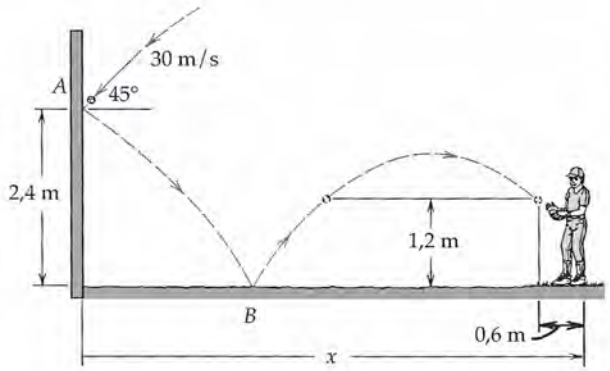


Figura problema 3.342

3.343 Una de las misiones de la lanzadera espacial es colocar satélites de comunicaciones a baja altura. En B se enciende un cohete de refuerzo y el satélite se coloca en una órbita elíptica de cambio, cuyo apogeo tiene la altitud necesaria para el geosincronismo. (Una órbita geosíncrona es una órbita circular situada en el plano del ecuador cuyo período coincide con el período de la rotación absoluta de la Tierra, de tal modo que un satélite en esas condiciones parece estacionario a todo observador solidario de la Tierra.) Seguidamente, en C, se enciende un segundo cohete de refuerzo y se consigue la órbita final. En una de las primeras misiones de la lanzadera, desde ésta se lanzó en B, donde $h_1 = 275$ km, un satélite de 700 kg. El cohete de refuerzo debía actuar durante $t = 90$ segundos, formando una órbita de cambio con $h_2 = 35\,900$ km. El cohete se averió durante su funcionamiento y las observaciones de radar determinaron que la altura de apogeo de la órbita de cambio fue sólo de 1125 km. Hallar el tiempo real t' durante el cual el motor cohete funcionó antes de averiarse. Se supone que la pérdida de masa durante el funcionamiento del cohete de refuerzo es despreciable.

$$Resp.\ t' = 8{,}47 \text{ s}$$

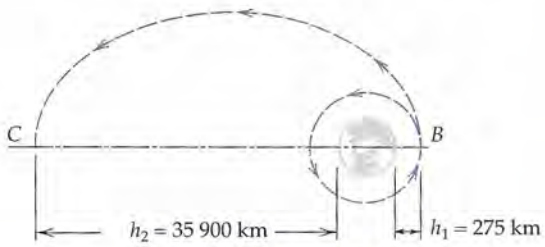


Figura problema 3.343

▶ **3.344** Las fuerzas retardadoras que actúan sobre un auto de carreras son la resistencia aerodinámica F_D y una fuerza no aerodinámica F_R. La primera es $F_D = C_D(\frac{1}{2}\rho v^2)S$, donde C_D es el coeficiente aerodinámico, ρ es la densidad del aire, v es la celeridad del auto y $S = 2{,}8$ m^2 es la superficie frontal proyectada del vehículo. La fuerza no aerodinámica F_R se mantiene constante a 900 N. Con la plancha metálica en buen estado, el automóvil tiene un coeficiente aerodinámico $C_D = 0{,}3$ y una velocidad máxima $v = 320$ km/h. Tras un choque leve, la plancha dañada de la parte delantera hace que el coeficiente aerodinámico pase a $C_D' = 0{,}4$. ¿Qué velocidad máxima v' corresponde a este nuevo valor del coeficiente aerodinámico?

$$Resp.\ v' = 293 \text{ km/h}$$

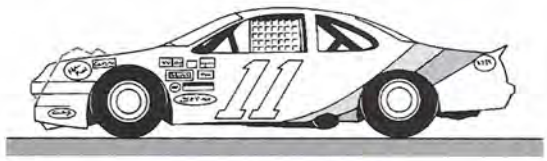


Figura problema 3.344

▶ **3.345** Se comunica una elevada velocidad inicial, en el plano horizontal, a la pequeña partícula de masa m que enrolla la

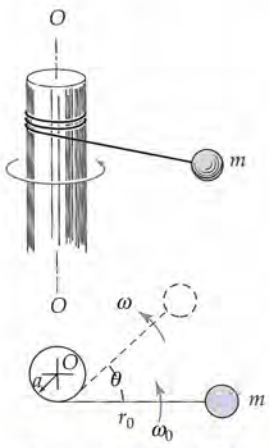


Figura problema 3.345

http://gratislibrospdf.com/

cuerda en el eje vertical fijo de radio a. Si la velocidad angular de la cuerda es ω_0 cuando la distancia de la partícula al punto de tangencia es r_0, hallar la velocidad angular ω de la cuerda y su tensión T cuando ha girado un ángulo ω. ¿Qué principio de conservación se aplica? ¿Por qué?

$$Resp.\ \omega = \frac{w_0}{1 - \frac{a}{r_0}\theta},\quad T = mr_0\omega_0\omega$$

3.346 Para un automóvil de 1000 kg se han efectuado extensos estudios en tunel de viento y en marcha por propia inercia, los cuales revelan que la resistencia aerodinámica F_D y la fuerza no aerodinámica de resistencia a la rodadura F_R varían con la celeridad según se muestra en las curvas. Hallar (*a*) la potencia P requerida para mantener velocidades constantes de 45 y 90 km/h y (*b*) el tiempo t y la distancia s que necesita el vehículo para que su celeridad, a motor desembragado, se reduzca a 5 km/h desde una inicial de 90 km/h. Se supondrá que la calzada es horizontal y recta y que no hay viento.

Resp. $P_{45} = 2{,}11$ kW, $P_{90} = 11{,}25$ kW
$t = 250$ s, $s = 1775$ m

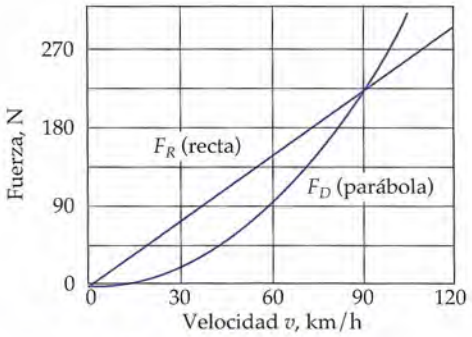


Figura problema 3.346

*PROBLEMAS ESPECIALES PARA ORDENADOR

***3.347** Retornamos al tambor giratorio del problema 3.81. El tambor de 650 mm rota en torno a un eje horizontal con una velocidad angular constante $\Omega = 7{,}5$ rad/s. El pequeño bloque A carece de movimiento relativo a la superficie del tambor cuando pasa por la posición inferior en que $\theta = 0$. Hallar el coeficiente de rozamiento estático μ_e que permitiría deslizarse al bloque en una posición angular θ; representar gráficamente el resultado en el intervalo $0 \le \theta \le 180°$. Hallar el coeficiente mínimo requerido μ_{min} para que el bloque permanezca fijo con relación al tambor durante una vuelta completa de éste. Para un coeficiente de rozamiento levemente menor que μ_{min} ¿a qué valor de θ se iniciaría el resbalamiento?

Resp. $\mu_{min} = 0{,}636$, $\theta = 122{,}5°$

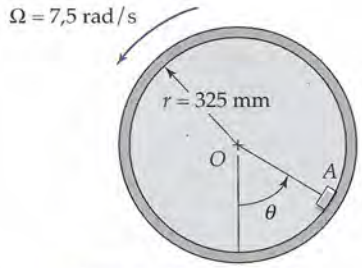


Figura problema 3.347

***3.348** La tenista se ejercita lanzando la pelota contra la pared A. La pelota rebota en B en el suelo de la cancha y se eleva hasta su máxima altura C. Para las condiciones indicadas en la figura, representar gráficamente la posición del punto C para el intervalo de valores del coeficiente de restitución $0{,}5 \le e \le 0{,}9$. (El valor de e es común a A y B.) ¿Para qué valor de e es $x = 0$ en el punto C, y cuál es el correspondiente valor de y?

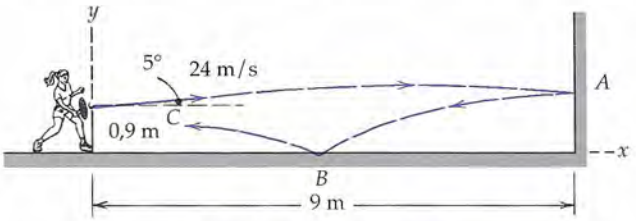


Figura problema 3.348

***3.349** El péndulo simple de longitud $l = 0{,}5$ m posee una velocidad angular $\dot{\theta}_0 = 0{,}2$ rad/s en el instante $t = 0$, en que $\theta = 0$.

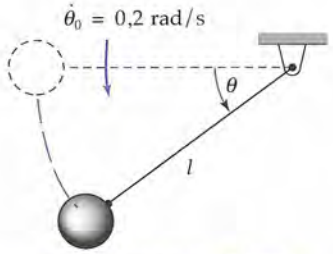


Figura problema 3.349

http://gratislibrospdf.com/

Deducir una expresión integral para el instante t que define el momento en que se alcanza la posición angular arbitraria θ. Representar gráficamente t en función de θ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

$$Resp.\ t = 0{,}5\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{9{,}81 \operatorname{sen} \theta + 0{,}01}},\ t = 0{,}409 \text{ s}$$

*3.350 En la figura se representa otra vez la atracción de feria del problema 3.68. Hallar y representar gráficamente el ángulo θ en función de la velocidad de rotación N para $0 \le N \le 10$ rpm. Despreciar las masas de los brazos a los que están sujetas las góndolas y tratar éstas como masas puntuales. Calcular el valor de θ para $N = 8$ rpm.

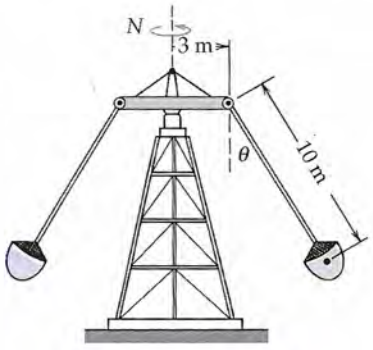


Figura problema 3.350

*3.351 Se representa aquí un sistema similar al del problema 3.67. La placa cuadrada se halla en reposo en la posición A en el instante $t = 0$ y después ejecuta un movimiento de traslación siguiendo una circunferencia vertical de acuerdo con $\theta = kt^2$, donde $k = 1$ rad/s^2, el desplazamiento θ está en radianes y el tiempo t está en segundos. Un pequeño instrumento P de 0,4 kg se fija temporalmente a la placa con un adhesivo. Representar la fuerza cortante F requerida en función del tiempo t para $0 \le t \le 5$ s. Si el adhesivo falla cuando la fuerza cortante F alcanza los 30 N, determinar el instante t y la posición angular θ en que tiene lugar el fallo.

$$Resp.\ t = 3{,}40 \text{ s},\ \theta = 663°$$

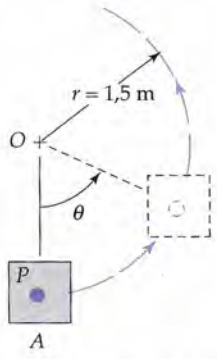


Figura problema 3.351

*3.352 El mecanismo representado se halla en un plano vertical y en reposo en la posición $\theta = 60°$, para la cual el resorte tiene su longitud natural y desde la que se suelta. Representar gráficamente en función de θ la celeridad de la esfera de 5 kg y hallar (*a*) la celeridad máxima de la esfera y el valor de θ correspondiente y (*b*) el ángulo máximo θ que gira la barra. Pueden despreciarse el rozamiento y la masa de las barras.

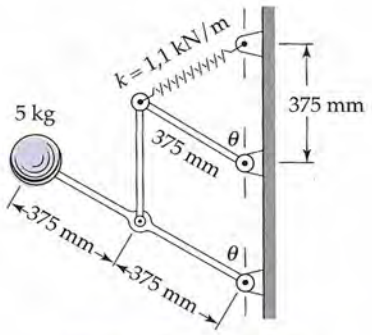


Figura problema 3.352

*3.353 La esfera A de 9 kg se sujeta formando el ángulo de 60°, tal como se representa, y después se suelta y golpea a la esfera B de 4,5 kg. En este choque el coeficiente de restitución es $e = 0{,}75$. La esfera B está unida al extremo de una varilla liviana giratoria en torno al punto O. Estando inicialmente sin alargar el resorte de constante $k = 1{,}5$ kN, hallar el ángulo máximo θ que gira la varilla tras el choque.

$$Resp.\ \theta = 21{,}4°$$

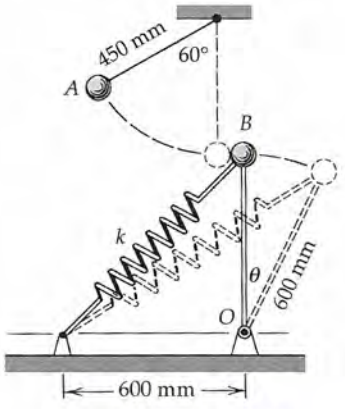


Figura problema 3.353

http://gratislibrospdf.com/

*3.354 Los ensayos en tunel de viento para determinar la resistencia de cierta esfera de 0,1 kg en una corriente de aire a baja velocidad dan como resultado la curva que se representa con trazo lleno. Si la esfera se suelta desde el reposo en aire encalmado, emplear esos datos para predecir su velocidad v tras una caída de 10 m desde el reposo. Multiplicar por dx la ecuación de movimiento y reescribirla como ecuación en diferencias finitas a intervalos de un metro. A continuación, despejar v aproximando la información de la gráfica mediante la expresión analítica $R = kv^2$, para la cual la concordancia en $v = 6{,}5$ m/s representa una media aceptablemente compatible con los datos experimentales dentro de la zona considerada. (Véase que de la curva resulta $k = 0{,}0133$ N·s^2/m^2.)

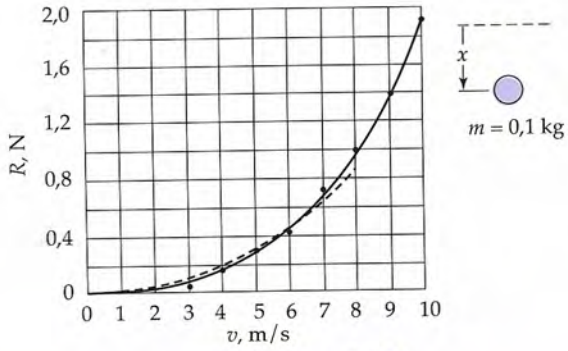


Figura problema 3.354

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

Capítulo 4: CINÉTICA DE LOS SISTEMAS DE PUNTOS MATERIALES

La dinámica de un conjunto de masas o de un sistema material cualquiera, es una generalización de la dinámica de una masa puntual y su desarrollo conduce a las ecuaciones de traslación y rotación que describen el movimiento de los cuerpos tanto rígidos como deformables. La lanzadera espacial con sus cohetes auxiliares de refuerzo desprendibles y su combustible consumible constituye un excelente ejemplo de sistema no rígido con pérdida másica.

http://gratislibrospdf.com/

4.1 INTRODUCCIÓN

En los dos capítulos precedentes se trató de los fundamentos de la dinámica del movimiento de un punto material. Aun cuando en el capítulo 3 la atención se centrara principalmente en la cinética de un solo punto, al estudiar los teoremas de las fuerzas vivas y de la cantidad de movimiento se hizo una breve referencia al movimiento de dos puntos materiales, considerando que juntos formaban un sistema. El paso siguiente en el desarrollo de la Dinámica va a ser extender esos principios del movimiento de un solo punto material a la descripción del movimiento de un sistema general de puntos materiales. Esta ampliación dota de unidad a los apartados restantes de este libro, lo cual nos permitirá tratar del movimiento de cuerpos rígidos y también del movimiento de sistemas no rígidos. Se recuerda que un cuerpo rígido es un sistema de puntos cuyas distancias mutuas permanecen esencialmente invariables. Los movimientos globales que se dan en máquinas, vehículos terrestres y aéreos, cohetes y naves especiales y otras muchas estructuras móviles, constituyen ejemplos de problemas de cuerpos rígidos. En cambio, un cuerpo no rígido puede ser un sólido del que interese estudiar la dependencia del tiempo de las variaciones de forma debidas a deformaciones, elásticas o no. O bien, podemos definir como cuerpo no rígido a una masa dada compuesta por partículas líquidas o gaseosas animadas de una velocidad de circulación dependiente del tiempo. Como ejemplos tendríamos el aire y el combustible que circulan por la turbina de un motor de avión, los gases quemados que salen por la tobera del motor de un cohete o el agua que atraviesa una bomba rotatoria.

Aunque la ampliación de las ecuaciones del movimiento de una partícula única a un sistema general de partículas se lleva a cabo sin dificultades excesivas, no es posible confiar en que pueda comprenderse toda la generalidad e importancia de esos principios ampliados sin una experiencia considerable en la resolución de problemas. Por ello, recomendamos vivamente que se repasen con frecuencia, durante lo que queda del estudio de la Dinámica, los resultados generales que se obtienen en los apartados siguientes. De ese modo, la unidad subyacente en estos principios más amplios de la Dinámica se perfilará mejor y se conseguirá una visión más amplia del tema.

4.2 GENERALIZACIÓN DE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON

Extenderemos ahora la segunda ley de Newton y los teoremas de las fuerzas vivas y de la cantidad de movimiento de un punto material para que cubran un sistema genérico de n puntos materiales limitados por una superficie cerrada en el espacio (fig. 4.1). Dicha superficie límite podría ser, por ejemplo, la superficie exterior de un cuerpo rígido dado, la superficie limitadora de una porción arbitraria del cuerpo, la superficie exterior de un cohete que contenga cuerpos tanto rígidos como deformables o un volumen particular de partículas de un fluido. En cada caso, el sistema considerado es la masa interior a la envoltura y dicha masa debe definirse o aislarse claramente.

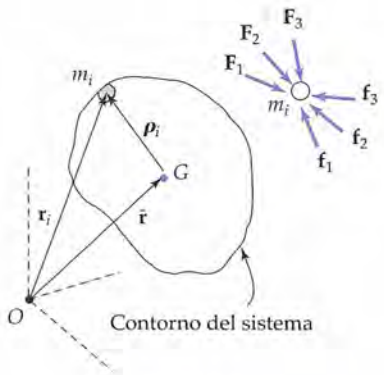


Figura 4.1

En la figura 4.1 se representa un punto material de masa m_i, aislado del sistema del que forma parte, con las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ..., que sobre él ejercen agentes *exteriores* al contorno del sistema, y las fuerzas $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, ..., que sobre él ejercen agentes *interiores* al contorno. Las fuerzas exteriores se deben al contacto con cuerpos externos al sistema o bien son fuerzas gravitatorias, eléctricas o magnéticas. Las fuerzas interiores son de reacción con otros puntos materiales

http://gratislibrospdf.com/

interiores al contorno del sistema. La posición de m_i la define su vector de posición $\mathbf{r}_i$ medido desde un sistema inercial de ejes de referencia fijos.[1] El centro de masa G del sistema de puntos materiales aislado lo determina su vector de posición $\bar{\mathbf{r}}$ que, según la definición de centro de masa tal como vimos en Estática, está dado por

$$m\bar{\mathbf{r}} = \Sigma m_i \mathbf{r}_i$$

donde la masa total del sistema es $m = \Sigma m_i$. El signo sumatorio Σ representa una suma $\Sigma_{i=1}^{n}$ que se extiende a la totalidad de los n puntos materiales. La segunda ley de Newton aplicada a m_i da

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \ldots = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

donde $\ddot{\mathbf{r}}_i$ es la aceleración de m_i. Para cada punto del sistema puede escribirse una ecuación análoga. Si estas ecuaciones, escritas para *todos* los puntos del sistema, se suman todas miembro a miembro, resulta

$$\Sigma \mathbf{F} + \Sigma \mathbf{f} = \Sigma m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

Resulta entonces que el término $\Sigma \mathbf{F}$ se convierte en la suma (vectorial) de *todas* la fuerzas que los agentes exteriores al sistema ejercen sobre todos los puntos materiales del sistema aislado, mientras que $\Sigma \mathbf{f}$ se convierte en la suma (vectorial) de todas las fuerzas que actúan sobre todos los puntos materiales debidas a las acciones internas y a las reacciones entre los puntos materiales. Esta última suma es idénticamente nula siempre, ya que las fuerzas interiores aparecen siempre dos a dos opuestas, pues son acción y reacción. Derivando dos veces respecto al tiempo la ecuación de definición de $\bar{\mathbf{r}}$, se tiene $m\ddot{\bar{\mathbf{r}}} = \Sigma F m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$, donde m carece de derivadas respecto al tiempo puesto que no hay masa que entre o salga del sistema.[2] Sustituyendo en la suma de las ecuaciones del movimiento se tiene

$$\Sigma \mathbf{F} = m\ddot{\bar{\mathbf{r}}} \qquad \text{o sea} \qquad \Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{4.1}$$

donde $\bar{\mathbf{a}}$ es la aceleración $\ddot{\bar{\mathbf{r}}}$ del centro de masa del sistema.

La ecuación 4.1 es la segunda ley de Newton generalizada para el movimiento de un sistema de puntos materiales y lleva el nombre de *ecuación del movimiento* de m. La ecuación dice que la resultante de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre un sistema cualquiera de puntos materiales es igual al producto de la masa total del sistema por la aceleración del centro de masa. Esta ley expresa el llamado *principio del movimiento del centro de masa*. Obsérvese que $\bar{\mathbf{a}}$ es la aceleración del punto geométrico que representa en cada instante la posición del centro de masa de los n puntos materiales dados. En el caso de un cuerpo deformable esta aceleración no tiene por qué representar la aceleración de ningún punto material particular. Obsérvese también que la ecuación 4.1 es válida en cada instante y constituye, por tanto, una relación instantánea. La ecuación 4.1 para el sistema material no puede inferirse directamente de la ecuación 3.3 para el punto material único, sino que debe demostrarse. La ecuación 4.1 puede expresarse en forma de componentes mediante las coordenadas

[1] En el apartado 3.14 vimos que todo sistema de ejes no giratorio ni acelerado constituye un sistema inercial en el que son válidos los principios de la Mecánica de Newton.

[2] Cuando m es función del tiempo, se presenta una situación más complicada, que se estudia en el apartado 4.7 bajo el encabezamiento de masa variable.

http://gratislibrospdf.com/

x-y-z o empleando el sistema de coordenadas que mejor convenga al problema en cuestión. Entonces,

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma F_z = m\bar{a}_z \tag{4.1a}$$

Aun cuando la ecuación 4.1, como ecuación vectorial que es, exige que la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ tenga la misma dirección que la resultante de las fuerzas exteriores $\Sigma\mathbf{F}$, no se deduce de aquí que $\Sigma\mathbf{F}$ pase necesariamente por G. En general, $\Sigma\mathbf{F}$ no pasará por G, tal como demostraremos después.

4.3 TRABAJO Y ENERGÍA

En el apartado 3.6 se desarrolló el teorema de las fuerzas vivas para un punto material y se indicó asimismo su aplicabilidad a un sistema de dos puntos materiales unidos. Fijémonos ahora en el sistema general de la figura 4.1 en donde la relación entre trabajo y energía para el punto material genérico de masa m_i es $(U_{1\text{-}2})_i = \Delta T_i$. En este caso $(U_{1\text{-}2})$ es el trabajo efectuado sobre m_i por todas las fuerzas $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots$ aplicadas desde agentes exteriores al sistema y por todas las fuerzas $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \ldots$interiores al sistema. La energía cinética de m_i es $T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$, donde v_i es el módulo de la velocidad $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$.

Para todo el sistema, la suma de las ecuaciones correspondientes al teorema de las fuerzas vivas aplicado a cada uno de sus puntos es $\Sigma(U_{1\text{-}2})_i = \Sigma\Delta T_i$, la cual puede representarse mediante la ecuación 3.11 del apartado 3.6; es decir,

$$U_{1\text{-}2} = \Delta T \qquad \text{o sea} \qquad T_1 + U_{1\text{-}2} = T_2 \tag{4.2}$$

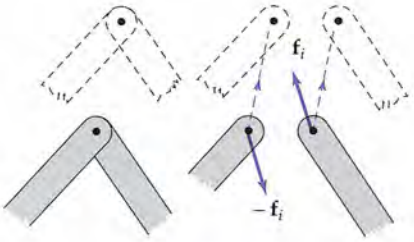


Figura 4.2

donde $U_{1\text{-}2} = \Sigma(U_{1\text{-}2})_i$ es el trabajo efectuado por todas las fuerzas sobre todos los puntos materiales y ΔT es la variación de energía cinética total $T = \Sigma T_i$.

En el caso de un cuerpo rígido o de un sistema de cuerpos rígidos unidos por conexiones ideales sin rozamiento no se efectúa trabajo resultante por parte de las fuerzas o momentos de interacción interiores en las conexiones, y vemos que el trabajo realizado por todas las parejas de fuerza interiores $\mathbf{f}_i$ y $-\mathbf{f}_i$ actuantes en cada conexión (fig. 4.2) del sistema es nulo por tener los puntos de aplicación iguales componentes del desplazamiento en la dirección de las fuerzas. En tal caso $U_{1\text{-}2}$ resulta ser el trabajo efectuado sobre el sistema por las fuerzas exteriores únicamente.

En el caso de un sistema mecánico deformable que tenga miembros elásticos capaces de almacenar energía, parte del trabajo efectuado por las fuerzas exteriores se invierte en alterar la energía potencial elástica interna V_e. Además, si del término del trabajo *se excluye* el trabajo de las fuerzas gravitatorias y este trabajo se incluye como variaciones de la energía potencial gravitatoria V_g, podremos igualar el trabajo total $U'_{1\text{-}2}$, realizado sobre el sistema durante un intervalo del movimiento, a la variación ΔE de la energía mecánica del sistema. Así pues, $U'_{1\text{-}2} = \Delta E$, o sea

$$U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \tag{4.3}$$

o bien

$$T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} + U'_{1\text{-}2} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2} \tag{4.3a}$$

que son las mismas que las ecuaciones 3.17 y 3.17*a*.

http://gratislibrospdf.com/

Examinemos ahora con mayor detalle la expresión $T = \Sigma\frac{1}{2}m_i v_i^2$ de la energía cinética de la masa del sistema. Según las ecuaciones del movimiento relativo examinadas en el apartado 2.8, la velocidad de uno cualquiera de los puntos del sistema puede escribirse

$$\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

siendo $\bar{\mathbf{v}}$ la velocidad del centro de masa G y $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ la velocidad de m_i respecto a un sistema de referencia que se mueva con el centro de masa G. Recordemos que $v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$ y escribamos como sigue la energía cinética del sistema

$$\begin{aligned} T &= \Sigma\tfrac{1}{2}m_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \Sigma\tfrac{1}{2}m_i(\bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) \\ &= \Sigma\tfrac{1}{2}m_i\bar{v}^2 + \Sigma\tfrac{1}{2}m_i|\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2 + \Sigma m_i\bar{\mathbf{v}} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\rho}_i$ se mide desde el centro de masa, es $\Sigma m_i\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ y el tercer término es $\bar{\mathbf{v}} \cdot \Sigma m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{d}{dt}\Sigma(m_i\boldsymbol{\rho}_i) = 0$. Además, $\Sigma\frac{1}{2}m_i\bar{v}^2 = \frac{1}{2}\bar{v}^2\Sigma m_i = \frac{1}{2}m\bar{v}^2$. Por tanto, la energía cinética total queda

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \Sigma\tfrac{1}{2}m_i|\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2 \qquad (4.4)$$

Esta ecuación expresa el hecho de que la energía cinética total de un sistema de masas es igual a la energía de traslación del centro de masa del sistema en conjunto más la energía debida al movimiento de todos los puntos respecto al centro de masa.

4.4 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

(a) Cantidad de movimiento. Tal como definimos en el apartado 3.8, la cantidad de movimiento de un punto material cualquiera del sistema descrito en la figura 4.1 es $\mathbf{G}_i = m_i\mathbf{v}_i$, siendo $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ la velocidad de m_i. La cantidad de movimiento del sistema se define como la suma vectorial de las cantidades de movimiento de todos los puntos materiales del mismo, o sea, $\mathbf{G} = \Sigma m_i\,\mathbf{v}_i$. Sustituyendo la expresión de la velocidad relativa $\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ y teniendo en cuenta que $\Sigma m_i\boldsymbol{\rho}_i = m\bar{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = \Sigma m_i(\bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) &= \Sigma m_i\bar{\mathbf{v}} + \frac{d}{dt}\Sigma m_i\boldsymbol{\rho}_i \\ &= \bar{\mathbf{v}}\Sigma m_i + \frac{d}{dt}(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

o sea

$$\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}} \qquad (4.5)$$

Así pues, la cantidad de movimiento de todo sistema material de masa constante es el producto de la masa por la velocidad de su centro de masa.

La derivada temporal de $\mathbf{G}$ es $m\dot{\bar{\mathbf{v}}} = m\bar{\mathbf{a}}$, que según la ecuación 4.1 es la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema. Luego

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}} \qquad (4.6)$$

http://gratislibrospdf.com/

que tiene la misma forma que la ecuación 3.21 para un punto material único. La ecuación 4.6 dice que la resultante de las fuerzas exteriores de todo sistema material es igual a la variación por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento del sistema y constituye otra forma de la ecuación 4.1 de la segunda ley de Newton generalizada. En la ecuación 4.6 la masa total se mantiene constante durante la derivación respecto al tiempo, por lo que dicha ecuación no será aplicable a sistemas cuya masa varíe con el tiempo.

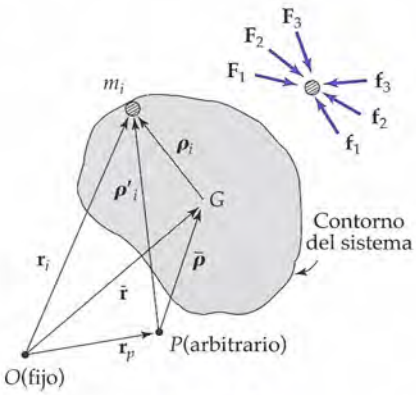


Figura 4.3

(b) Momento cinético. El momento cinético de un sistema de puntos materiales cualquiera vamos a tratarlo determinándolo respecto a un punto fijo O, respecto al centro de masa G del sistema de puntos materiales y respecto a un punto cualquiera, como el P de la figura 4.3, que puede estar animado de una aceleración $\mathbf{a}_P = \ddot{\mathbf{r}}_P$.

(Respecto a O). Por definición, el momento cinético respecto al punto O, fijo en el sistema de referencia newtoniano, del sistema de masas que nos ocupa es la suma vectorial de los momentos respecto a O de las cantidades de movimiento de todos los puntos materiales que integran el sistema y se expresa

$$\mathbf{H}_O = \Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$$

La derivada temporal de esta suma de productos vectoriales es $\dot{\mathbf{H}}_O = \Sigma(\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_i) + \Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{v}}_i)$. El primer sumatorio desaparece porque el producto vectorial de dos vectores iguales, $\dot{\mathbf{r}}_i$ y $\mathbf{v}_i$, es nulo. El segundo sumatorio es $\Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$, o sea, la suma vectorial de los momentos respecto a O de todas las fuerzas que actúan sobre todos los puntos del sistema. Esta suma de momentos $\Sigma\mathbf{M}_O$ representa únicamente los momentos de las fuerzas exteriores al sistema, puesto que las internas son iguales y opuestas dos a dos y, por tanto, la suma de sus momentos es nula. Así pues, la suma de los momentos queda

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{4.7}$$

cuya forma es igual a la de la ecuación 3.27 referente a un único punto material. Esta ecuación 4.7 establece que el momento resultante respecto a un punto fijo cualquiera de todas las fuerzas exteriores actuantes sobre un sistema de puntos materiales es igual a la derivada temporal del momento cinético del sistema respecto al mismo punto fijo. Al igual que en el caso de la cantidad de movimiento, la ecuación 4.7 no es válida si la masa total del sistema varía con el tiempo.

(Respecto a G). El momento cinético respecto al centro de masa G es la suma de los momentos respecto a G de las cantidades de movimiento de todos los puntos materiales del sistema y es

$$\mathbf{H}_G = \Sigma(\boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}})_i \tag{4.8}$$

Podemos escribir la velocidad absoluta $\dot{\mathbf{r}}_i$ como $(\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\rho}_i)$, con lo que $\mathbf{H}_G$ queda

$$\mathbf{H}_G = \Sigma[\boldsymbol{\rho}_i \times m_i(\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i)] = \Sigma(\boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\mathbf{r}}}) + \Sigma(\boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i)$$

http://gratislibrospdf.com/

En esta ecuación el primer término del segundo miembro puede volver a escribirse como $-\dot{\mathbf{r}} \times \Sigma m_i \boldsymbol{\rho}_i$, que es nulo porque $\Sigma m_i \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ según la definición de centro de masa. Por tanto, se tiene

$$\mathbf{H}_G = \Sigma(\boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) \tag{4.8a}$$

La expresión 4.8 recibe el nombre de momento cinético *absoluto* porque en ella se emplea la velocidad absoluta $\dot{\mathbf{r}}_i$. La expresión 4.8*a* recibe el nombre de momento cinético *relativo* porque en ella se emplea la velocidad relativa $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$. Tomando como referencia el centro de masa *G*, se ve que los momentos cinéticos absoluto y relativo son iguales. Veremos que esta igualdad no se mantiene cuando se toma como referencia un punto arbitrario *P*; para un punto de referencia fijo *O* no hay distinción.

Derivando 4.8 respecto al tiempo resulta

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \Sigma[\dot{\boldsymbol{\rho}}_i \times m_i(\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i)] + \Sigma(\boldsymbol{\rho}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i)$$

El primer sumatorio es $\Sigma(\dot{\boldsymbol{\rho}}_i \times m_i \dot{\bar{\mathbf{r}}}) + \Sigma(\dot{\boldsymbol{\rho}}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i)$. El primer térmico puede volver a escribirse en la forma $-\dot{\bar{\mathbf{r}}} \times \Sigma m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = -\dot{\bar{\mathbf{r}}} \times \dfrac{d}{dt} \Sigma m_i \boldsymbol{\rho}_i$ y resulta ser nulo por la definición de centro de masa. El segundo término es nulo porque es nulo el producto vectorial de dos vectores paralelos. Si $\mathbf{F}_i$ es la resultante de todas las fuerzas exteriores actuantes sobre m_i y $\mathbf{f}_i$ es la resultante de todas las fuerzas interiores actuantes sobre m_i, según la segunda ley de Newton el segundo sumatorio queda $\Sigma[\boldsymbol{\rho}_i \times (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i)] = \Sigma(\boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i) = \Sigma \mathbf{M}_G$, que es la suma de los momentos de todas las fuerzas exteriores respecto al punto *G*. Recordemos que la suma de los momentos $\Sigma \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{f}_i$ de las fuerzas interiores es nula. Queda entonces

$$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G} \tag{4.9}$$

donde podemos emplear el momento cinético absoluto o bien el relativo.

Las ecuaciones 4.7 y 4.9 se encuentran entre las relaciones más potentes y eficaces que rigen la Dinámica y son válidas para cualquier sistema de masas definido, rígido o deformable.

(Respecto a P). El momento cinético respecto a un punto arbitrario *P* (cuya aceleración podría ser $\ddot{\mathbf{r}}_P$) lo expresamos ahora con la notación de la figura 4.3; es decir,

$$\mathbf{H}_P = \Sigma(\boldsymbol{\rho}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \Sigma[(\bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}_i) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i]$$

Podemos escribir el primer término como $\bar{\boldsymbol{\rho}} \times \Sigma m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \bar{\boldsymbol{\rho}} \times \Sigma m_i \mathbf{v}_i = \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m \bar{\mathbf{v}}$. El segundo término es $\Sigma \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{H}_G$. Entonces, reordenando resulta

$$\boxed{\mathbf{H}_P = \mathbf{H}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m \bar{\mathbf{v}}} \tag{4.10}$$

Esta ecuación 4.10 establece que el momento cinético absoluto respecto a un punto cualquiera *P* es igual al momento cinético respecto a *G* más el momento

http://gratislibrospdf.com/

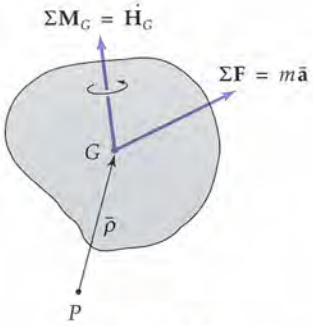


Figura 4.4

respecto a P de la cantidad de movimiento $m\bar{\mathbf{v}}$ del sistema supuesto concentrado en G.

Ahora vamos a utilizar el principio de los momentos que se desarrolló en Estática, según el cual un sistema de fuerzas puede representarse mediante una fuerza resultante aplicada a un punto cualquiera, como el G, y el correspondiente par de fuerzas asociado. En la figura 4.4 se representa, aplicada en G, la resultante $\Sigma \mathbf{F}$ de las fuerzas exteriores actuantes sobre el sistema acompañada del correspondiente par de fuerzas de momento $\Sigma \mathbf{M}_G$. Relacionando ahora el momento resultante respecto a P de las fuerzas exteriores con el momento resultante de las mismas respecto a G podemos escribir

$$\Sigma \mathbf{M}_P = \Sigma \mathbf{M}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times \Sigma \mathbf{F}$$

que, según las ecuaciones 4.9 y 4.6, se convierte en

$$\Sigma \mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{a}} \tag{4.11}$$

Esta relación 4.11 nos permite escribir la ecuación del momento respecto a cualquier punto P que convenga y es fácilmente imaginable con ayuda de la figura 4.4; por otra parte, constituye una base rigurosa para el estudio de la cinética de los cuerpos rígidos que se desarrolla en el capítulo 6.

Empleando el momento cinético respecto a P es posible desarrollar unas relaciones similares. De este modo, según la figura 4.3

$$(\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} = \Sigma(\boldsymbol{\rho}'_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}'_i)$$

donde $\dot{\boldsymbol{\rho}}'_i$ es la velocidad de m_i respecto a P. Con las sustituciones de $\dot{\boldsymbol{\rho}}'_i = \bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}_i$ y $\dot{\boldsymbol{\rho}}'_i = \dot{\bar{\boldsymbol{\rho}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$, podemos escribir

$$(\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} = \Sigma \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m_i \dot{\bar{\boldsymbol{\rho}}} + \Sigma \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \Sigma \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\boldsymbol{\rho}}} + \Sigma \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

El primer sumatorio es $\bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{v}}_{\text{rel}}$. El segundo sumatorio es $\bar{\boldsymbol{\rho}} \times \dfrac{d}{dt} \Sigma m_i \boldsymbol{\rho}_i$ y el tercero es $-\dot{\bar{\boldsymbol{\rho}}} \times \Sigma m_i \boldsymbol{\rho}_i$, y estos dos son ambos nulos según la definición de centro de masa. El cuarto sumatorio es $(\mathbf{H}_G)_{\text{rel}}$. Reordenando términos resulta

$$(\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} = (\mathbf{H}_G)_{\text{rel}} + \bar{\rho} \times m\bar{\mathbf{v}}_{\text{rel}} \tag{4.12}$$

donde $(\mathbf{H}_G)_{\text{rel}}$ es el mismo que $\mathbf{H}_G$ (véanse las ecuaciones 4.8 y 4.8*a*). Adviértase la similitud entre las ecuaciones 4.12 y 4.10.

La ecuación del momento respecto a P podemos ahora expresarla en función del momento cinético respecto a P. Derivando respecto al tiempo la definición $(\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} = \Sigma \boldsymbol{\rho}'_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}'_i$ y sustituyendo $\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_P + \ddot{\boldsymbol{\rho}}'_i$, resulta

$$(\dot{\mathbf{H}}_P)_{\text{rel}} = \Sigma \dot{\boldsymbol{\rho}}'_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}'_i + \Sigma \boldsymbol{\rho}'_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \Sigma \boldsymbol{\rho}'_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_P$$

http://gratislibrospdf.com/

El primer sumatorio es idénticamente nulo y el segundo es la suma $\Sigma \mathbf{M}_P$ de los momentos respecto a P de todas las fuerzas exteriores. El tercer sumatorio se hace $\Sigma \boldsymbol{\rho}'_i \times m_i \mathbf{a}_P = -\mathbf{a}_P \times \Sigma m_i \boldsymbol{\rho}'_i = -\mathbf{a}_P \times m\bar{\boldsymbol{\rho}} = \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\mathbf{a}_P$. Sustituyendo y reordenando términos resulta

$$\Sigma \mathbf{M}_P = (\dot{\mathbf{H}}_P)_{\text{rel}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\mathbf{a}_P \tag{4.13}$$

Esta ecuación 4.13 reviste una forma muy cómoda cuando se emplea como centro de momentos un punto P cuya aceleración se conozca. Además, adquiere la forma más sencilla

$$\Sigma \mathbf{M}_P = (\dot{\mathbf{H}}_P)_{\text{rel}}$$

cuando se cumple cualquiera de las condiciones siguientes:

1. $\mathbf{a}_P = \mathbf{0}$ (equivalente a la 4.7)
2. $\bar{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$ (equivalente a la 4.9)
3. $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ y $\mathbf{a}_P$ son paralelos (la recta soporte de $\mathbf{a}_P$ pasa por G)

4.5 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Se da con mucha frecuencia el caso de que la energía mecánica total de un sistema no varíe durante algún intervalo de su movimiento. Otras veces ocurre que el sistema no experimenta una variación neta en su cantidad de movimiento. Estas situaciones se tratan seguidamente por separado.

(a) Conservación de la energía. De un sistema material se dice que es *conservativo* si no pierde energía en virtud de fuerzas de rozamiento interno que realizan un trabajo negativo o en virtud de miembros no elásticos que disipan energía al recorrer ciclos. Si durante un intervalo del movimiento no hay fuerzas exteriores (gravitatorias u otras que deriven de un potencial) que realicen trabajo sobre un sistema conservativo, no se pierde nada de la energía del sistema. En tal caso es $\Delta E = 0$, es decir, $E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$. Por tanto, la ecuación 4.3 podemos escribirla

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0 \tag{4.14}$$

o sea

$$T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2} \tag{4.14a}$$

que expresa el *principio de conservación de la energía mecánica*. Este principio sólo vale en el caso ideal en que el rozamiento cinético interno es suficientemente pequeño como para ser despreciado.

(b) Conservación de la cantidad de movimiento. Si, para un cierto intervalo de tiempo, la resultante $\Sigma \mathbf{F}$ de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre un sistema material, conservativo o no, es nula, la ecuación 4.6 exige que $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{0}$, con lo cual durante dicho intervalo de tiempo

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 \tag{4.15}$$

http://gratislibrospdf.com/

lo que expresa el *principio de conservación de la cantidad de movimiento*. Así pues, en ausencia de un impulso exterior la cantidad de movimiento de un sistema permanece invariable.

Análogamente, si el momento resultante respecto a un punto fijo O o respecto al centro de masa G de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre un sistema material es nulo, las ecuaciones 4.7 y 4.9 exigen, respectivamente, que

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad \text{o bien que} \qquad (\mathbf{H}_G)_1 = (\mathbf{H}_G)_2 \tag{4.16}$$

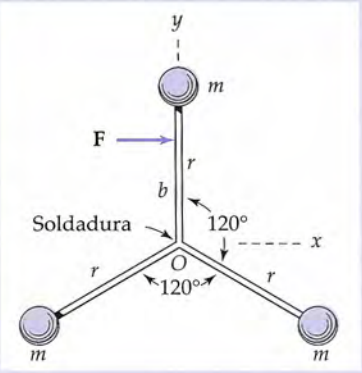
Esta relaciones expresan el *principio de conservación del momento cinético* para un sistema material cualquiera en ausencia de impulso angular. Así pues, si no hay impulso angular respecto a un punto fijo (o respecto al centro de masa), el momento cinético del sistema respecto al punto fijo (o respecto al centro de masa) permanece invariable. Una y otra ecuación pueden cumplirse independientemente la una de la otra.

En el apartado 3.14 demostramos que las leyes fundamentales de la Mecánica de Newton se cumplen para mediciones realizadas en un sistema de ejes en traslación uniforme. Así pues, las ecuaciones 4.1 a 4.16 son válidas con tal que todas las cantidades de movimiento se expresen con relación a los ejes en traslación uniforme.

Las ecuaciones de la 4.1 a la 4.16 figuran entre las más importantes de los principios fundamentales deducidos de la Mecánica. En este capítulo se han deducido esas leyes a partir del sistema más general de masa constante a fin de poner de manifiesto la generalidad de las leyes. Estas hallarán su utilización frecuente al aplicarlas a sistemas materiales específicos tales como cuerpos rígidos y deformables y ciertos sistemas fluidos que se estudian en los apartados que siguen. Se recomienda al lector que estudie detenidamente estas leyes y que las compare con las fórmulas más restringidas que aparecieron anteriormente en el capítulo 3.

PROBLEMA TIPO 4.1

Las tres esferas de masa m cada una están soldadas al armazón equiangular rígido de masa despreciable. El conjunto reposa sobre una superficie horizontal rígida. Si a uno de los brazos se aplica, repentinamente, una fuerza horizontal **F** *tal como se indica, hallar (a) la aceleración del punto O y (b) la aceleración* $\ddot{\theta}$ *del armazón.*



http://gratislibrospdf.com/

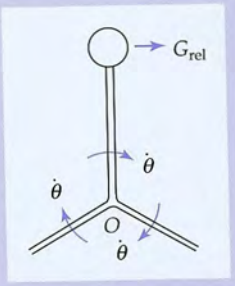
Solución. *(a)* El punto O es el centro de masa del sistema de las tres esferas, por lo que su aceleración estará dada por la ecuación 4.1.

$$[\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}] \qquad F\mathbf{i} = 3m\bar{\mathbf{a}} \qquad \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_O = \frac{F}{3m}\mathbf{i} \qquad \textit{Resp.}$$

(1) Obsérvese que el resultado depende sólo del módulo y de la dirección de F y no de b, que sitúa la recta soporte de F.

(b) La aceleración angular $\ddot{\theta}$ puede determinarse mediante el teorema del momento cinético (ec. 4.9). Obsérvese, para hallar $\mathbf{H}_G$, que la velocidad de cada esfera respecto al centro de masa O medida en los ejes no giratorios x-y es $r\dot{\theta}$, donde $\dot{\theta}$ es la velocidad angular común de los brazos. El momento cinético del sistema respecto a O es la suma de los momentos de las cantidades de movimiento, tal como muestra la ecuación 4.8, y entonces el mismo se expresa

$$H_O = H_G = 3(mr\dot{\theta})r = 3mr^2\dot{\theta}$$



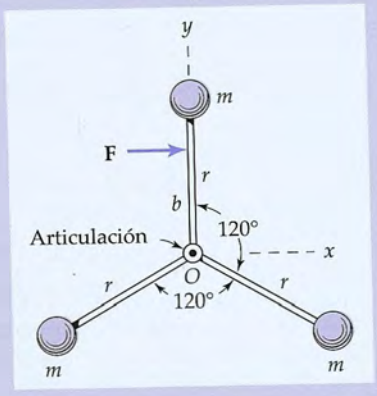
(2) Entonces, la ecuación 4.9 da

$$[\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G]$$

$$Fb = \frac{d}{dt}(3mr^2\dot{\theta}) = 3mr^2\ddot{\theta} \qquad \text{así que} \qquad \ddot{\theta} = \frac{Fb}{3mr^2} \qquad \textit{Resp.}$$

(2) Aunque $\dot{\theta}$ sea inicialmente nula, necesitamos la expresión de $H_O = H_G$ para obtener $\dot{H}_G$. Observemos además que $\ddot{\theta}$ es independiente del movimiento de O.

PROBLEMA TIPO 4.2



Consideremos las mismas condiciones que en el problema tipo 4.1, pero con los brazos articulados en O sin que constituyan un conjunto rígido. Explicar la diferencia entre los dos problemas.

Solución. La segunda ley de Newton generalizada se cumple para cualquier sistema material, por lo que la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ del centro de masa G es la misma que en el problema tipo 4.1, o sea

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{F}{3m}\mathbf{i} \qquad \textit{Resp.}$$

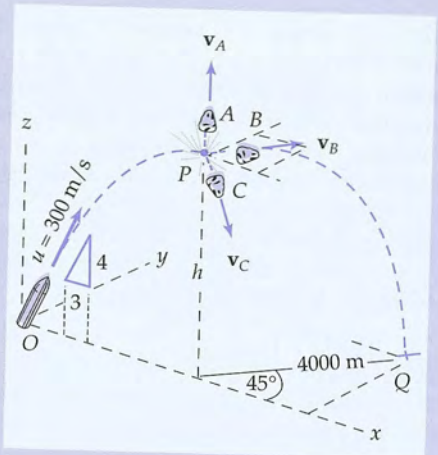
Aunque G coincida con O en el instante representado, el movimiento de la articulación O no coincide con el movimiento del centro de masa G, ya que éste no se mantiene en O puesto que los ángulos entre los brazos varían.

(1) Tanto ΣM_G como $\dot{H}_G$ tienen los mismos valores en ambos problemas en el instante considerado. Sin embargo, en este problema los movimientos angulares de los brazos son diferentes y pueden determinarse fácilmente.

(1) El presente sistema podría desmembrarse y escribirse las ecuaciones del movimiento de cada una de sus partes para eliminar las incógnitas una por una. También podría seguirse un procedimiento más sofisticado basado en las ecuaciones de Lagrange. (Véase *Dinámica*, del autor principal, 2ª edición, donde se expone ese método.)

http://gratislibrospdf.com/

Un proyectil de 20 kg de masa se dispara en el punto O con una velocidad u = 300 m/s contenida en el plano x-z y con la inclinación indicada. Cuando llega al vértice P de su trayectoria estalla en tres fragmentos A, B y C. Inmediatamente tras la explosión, se observa que el fragmento A sube una distancia vertical de 500 m por encima de P y que el fragmento B tiene una velocidad horizontal $\mathbf{v}_B$ para finalmente llegar al suelo en el punto Q. Recuperadas las masas de los fragmentos A, B y C se encuentra que sus masas son 5, 9 y 6 kg, respectivamente. Calcular la velocidad del fragmento C inmediatamente después de la explosión. Despreciar la resistencia atmosférica.



Solución. Por lo que sabemos acerca del movimiento de los proyectiles (problema tipo 2.6), el tiempo necesario para que el proyectil llegue a P y su ascensión vertical son

$$t = u_z/g = 300(4/5)/9{,}81 = 24{,}5 \text{ s}$$

$$h = \frac{u_z^2}{2g} = \frac{[(300)(4/5)]^2}{2(9{,}81)} = 2936 \text{ m}$$

El módulo de la velocidad de A es

$$v_A = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2(9{,}81)(500)} = 99{,}0 \text{ m/s}$$

Careciendo inicialmente de componentes z, el fragmento B necesita 24,5 s para volver al suelo. Entonces su velocidad horizontal, que permanece constante, es

$$v_B = s/t = 4000/24{,}5 = 163{,}5 \text{ m/s}$$

① La velocidad v del proyectil en el vértice de su trayectoria es, por supuesto, la componente horizontal de su velocidad inicial u, que es u (3/5).

Como la fuerza de la explosión es interior al proyectil y al sistema formado por sus tres fragmentos, la cantidad de movimiento del sistema permanece constante durante la explosión. Así pues,

$$[\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2] \quad m\mathbf{v} = m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B + m_C\mathbf{v}_C$$

$$20(300)(\tfrac{3}{5})\mathbf{i} = 5(99{,}0\mathbf{k}) + 9(163{,}5)(\mathbf{i}\cos 45^\circ + \mathbf{j}\,\text{sen}\,45^\circ) + 6\mathbf{v}_C$$

$$6\mathbf{v}_C = 2560\mathbf{i} - 1040\mathbf{j} - 495\mathbf{k}$$

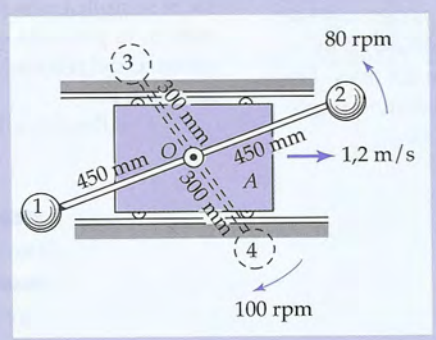
$$\mathbf{v}_C = 427\mathbf{i} - 173\mathbf{j} - 82{,}5\mathbf{k} \text{ m/s}$$

$$v_C = \sqrt{(427)^2 + (173)^2 + (82{,}5)^2} = 468 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

② Obsérvese que el centro de masa de los tres fragmentos durante su vuelo sigue la misma trayectoria que habría descrito el proyectil si no hubiera estallado.

http://gratislibrospdf.com/

La carretilla A de 16 kg se mueve horizontalmente a lo largo de la guía con una celeridad de 1,20 m/s transportando dos juegos de bolas y barras sin masa que giran en torno al eje O de la carretilla. Las bolas tienen una masa de 1,6 kg cada una. El conjunto más adelantado gira a 80 rpm en sentido antihorario y el más retrasado a 100 rpm en sentido horario. Para el sistema completo calcular (a) la energía cinética T, (b) el módulo G de la cantidad de movimiento y (c) el módulo H_O del momento cinético respecto al punto O.



Solución. *(a) Energía cinética.* La velocidad de las bolas respecto a O es

$$[|\dot{\boldsymbol{\rho}}_i| = v_{\text{rel}} = r\dot{\theta}] \qquad (v_{\text{rel}})_{1,2} = 0{,}450\,\frac{80(2\pi)}{60} = 3{,}77\ \text{m/s}$$

$$(v_{\text{rel}})_{3,4} = 0{,}300\,\frac{100(2\pi)}{60} = 3{,}14\ \text{m/s}$$

La ecuación 4.4 nos da la energía cinética del sistema. La parte correspondiente a la traslación es

(1) $$\tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 = \tfrac{1}{2}[16 + 4(1,6)](1,2)^2 = 16{,}13\ \text{J}$$

La parte correspondiente a la rotación depende de los cuadrados de las velocidades relativas y vale

(2) $$\Sigma\tfrac{1}{2}m_i|\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2 = 2[(\tfrac{1}{2})(1,6)(3,77)^2]_{(1,2)} + 2[(\tfrac{1}{2})(1,6)(3,14)^2]_{(3,4)}$$
$$= 22{,}74 + 15{,}79 = 38{,}53\ \text{J}$$

La energía cinética total

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \Sigma\tfrac{1}{2}m_i|\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2 = 16{,}13 + 38{,}53 = 54{,}66\ \text{J} \qquad \textit{Resp.}$$

(b) Cantidad de movimiento. Según la ecuación 4.5, la cantidad de movimiento del sistema es la masa total multiplicada por la velocidad v_O del centro de masa. O sea,

(3) $$[\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}] \qquad G = [16 + 4(1,6)](1,2) = 26{,}88\ \text{kg·m/s}$$

(c) Momento cinético respecto a O. El momento cinético respecto a O es debido a los momentos de las cantidades de movimiento de las bolas. Tomando como positivo el sentido antihorario, tendremos

$$H_O = \Sigma|\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i|$$

(4) $$H_O = [2(1,6)(0,450)(3,77)]_{(1,2)} - [2(1,6)(0,300)(3,14)]_{(3,4)}$$
$$= 5{,}43 - 3{,}02 = 2{,}41\ \text{kg·m}^2\text{/s} \qquad \textit{Resp.}$$

(1) **Obsérvese que *m* es la masa total, la de la carretilla más las cuatro bolas, y que $\bar{v}$ es la velocidad del centro de masa *O* que es la de la carretilla.**

(2) **Obsérvese que el sentido de giro, horario o antihorario, no importa en lo que respecta al cálculo de la energía cinética, la cual depende del cuadrado de la velocidad.**

(3) **Puede sentirse la tentación de pasar por alto la contribución de las bolas puesto que sus cantidades de movimiento respecto a *O* tienen sentidos opuestos en cada pareja y se anulan. No obstante, cada bola tiene una componente de velocidad $\bar{v}$ y, por tanto, una componente de cantidad de movimiento $m\bar{v}$.**

(4) **Contrariamente al caso de la energía cinética en que el sentido de giro es indiferente, el momento cinético es una magnitud vectorial y debe tenerse en cuenta el sentido de giro.**

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMAS

Problemas introductorios

4.1 Tres monos A, B y C de 10, 15 y 18 kg, respectivamente, trepan y bajan por la cuerda suspendida de D. En el instante representado, A desciende por la cuerda con una aceleración de 2 m/s^2 y C se esfuerza en subir con una aceleración de 1,5 m/s^2, mientras que B sube a la velocidad constante de 0,8 m/s. Tratando el conjunto de cuerda y monos como un sistema completo, calcular la tensión T de la cuerda en el punto D.

Resp. $T = 316$ N

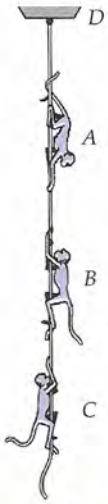


Figura problema 4.1

4.2 Las tres esferitas, conectadas por las cuerdas y el resorte, descansan en una superficie horizontal lisa. Si a una de las cuerdas se aplica una fuerza $F = 6{,}4$ N, determinar la aceleración $\bar{a}$ del centro de masa de las esferas en el instante considerado.

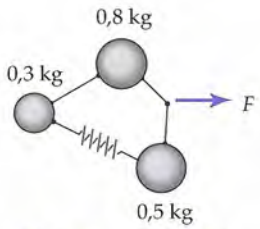


Figura problema 4.2

4.3 El sistema está compuesto de dos esferas lisas, de masa 2 kg cada una. Se hallan enlazadas por un resorte sin masa y mediante las dos barras de masa despreciable articuladas libremente en sus extremos y que cuelgan en un plano vertical. Las esferas están obligadas a moverse en la guía horizontal lisa. Si se aplica una fuerza horizontal $F = 50$ N a una de las barras en la posición que se indica, ¿cuál será la aceleración del centro C del resorte? ¿Por qué no depende el resultado de la dimensión b?

Resp. $a_c = 12{,}5$ m/s^2

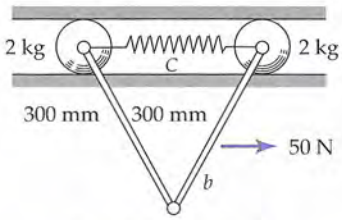


Figura problema 4.3

4.4 Las dos esferas, de masa m cada una, están unidas mediante una cuerda de longitud $2b$ (medida desde los centros de las esferas) y se encuentran inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal lisa en la posición indicada. Si al centro A de la cuerda se aplica una fuerza vertical F de módulo constante, hallar la velocidad v de cada esfera cuando éstas chocan al tender θ hacia 90°. ¿Para qué valor máximo de F las esferas no pierden el contacto con la superficie? (Estudiar el sistema sin desmembrarlo.)

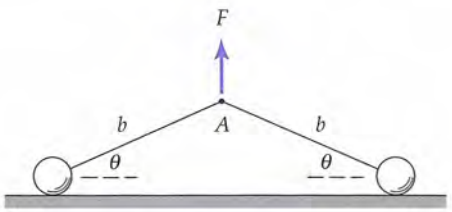


Figura problema 4.4

4.5 En el instante $t = 2{,}2$ s la cantidad de movimiento total de un sistema de cinco partículas está dado por $\mathbf{G}_{2,2} = 3{,}4\mathbf{i} - 2{,}6\mathbf{j} + 4{,}6\mathbf{k}$ kg·m/s. En el instante $t = 2{,}4$ s, la cantidad de movimiento ha cambiado a $\mathbf{G}_{2,4} = 3{,}7\mathbf{i} - 2{,}2\mathbf{j} + 4{,}9\mathbf{k}$ kg·m/s. Calcular el módulo F del valor medio temporal de la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema durante el intervalo.

Resp. $F = 2{,}92$ N

http://gratislibrospdf.com/

4.6 Las dos pequeñas esferas, de masa m cada una, están conectadas rígidamente mediante una varilla de masa despreciable. El centro C de ésta última posee una velocidad v en la dirección x y la varilla rota en sentido antihorario a la velocidad constante $\dot{\theta}$. Para un valor dado de θ escribir las expresiones (*a*) de la cantidad de movimiento de cada esfera y (*b*) de la cantidad de movimiento **G** del sistema de las dos esferas.

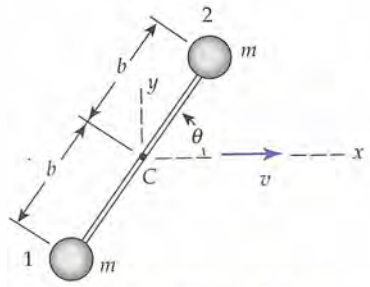


Figura problema 4.6

4.7 Una centrífuga se compone de cuatro recipientes cilíndricos, de masa m cada uno, situados a una distancia radial r del eje de rotación. Hallar el tiempo t necesario para que la máquina alcance una velocidad angular ω a partir del reposo y sometida a un par constante M aplicado al árbol. El diámetro de los cilindros es pequeño comparado con r y la masa del árbol y de los brazos es pequeña comparada con m.

$$Resp.\ t = \frac{4mr^2\omega}{M}$$

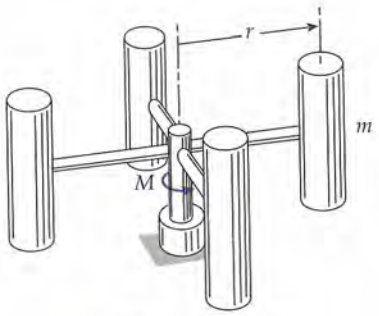


Figura problema 4.7

4.8 Para las condiciones del problema 4.6, escribir las expresiones (*a*) de la cantidad de movimiento absoluta de cada esfera respecto a C y (*b*) de los momentos cinéticos absoluto y relativo, $(\mathbf{H}_C)_{abs}$ y $(\mathbf{H}_C)_{rel}$, del sistema respecto a C.

Problemas representativos

4.9 Dos bolas de acero, de masa m cada una, están soldadas a una varilla liviana de longitud L e inicialmente reposan sobre una superficie horizontal lisa. Repentinamente se aplica a la varilla, tal como se indica, una fuerza horizontal de módulo F. Hallar (*a*) la aceleración instantánea $\bar{a}$ del centro de masa G y (*b*) la correspondiente variación $\ddot{\theta}$ por unidad de tiempo de la velocidad angular del conjunto alrededor del centro de masa G.

$$Resp.\ (a)\ \bar{a} = \frac{F}{2m},\ (b)\ \ddot{\theta} = \frac{2Fb}{mL^2}$$

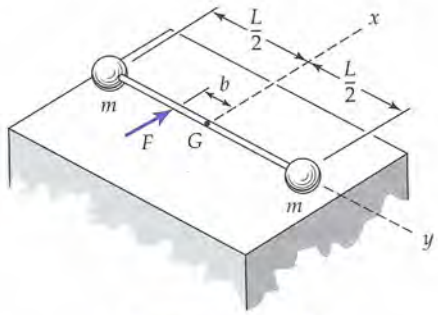


Figura problema 4.9

4.10 Las vagonetas de mina de 300 y 400 kg ruedan a lo largo de la vía horizontal en sentidos opuestos y a las celeridades respectivas de 0,6 y 0,3 m/s. Al chocar, se acoplan. Justo en el instante anterior al choque, un trozo de mineral de 100 kg abandona la canaleta de descarga a 1,20 m/s para caer en la vagoneta de 300 kg. Calcular la velocidad del sistema después de que el trozo de mineral se haya detenido en la vagoneta. ¿Habría sido la misma la velocidad final si las vagonetas se hubieran acoplado antes de que cayera el trozo de mineral?

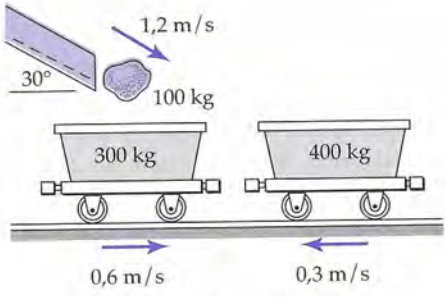


Figura problema 4.10

http://gratislibrospdf.com/

4.11 Los tres vagones de carga ruedan por la vía horizontal con las velocidades indicadas. Después de chocar, quedan enganchados y se mueven con una velocidad común v. Los vagones A, B y C con sus cargas tienen unas masas respectivas de 65, 50 y 75 Mg. Hallar v y el porcentaje de energía perdida en el proceso de enganche.

Resp. $v = 0{,}355$ km/h, $n = 95{,}0\%$

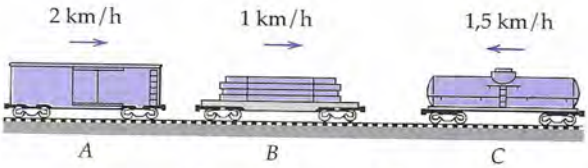


Figura problema 4.11

4.12 La muchacha A de 60 kg, el capitán B de 90 kg y el marinero C de 80 kg están sentados en el esquife de 150 kg que se desliza por el agua a la celeridad de un nudo. Si las tres personas cambian sus posiciones tal como se muestra en la segunda figura, hallar la distancia x desde la proa del esquife a la posición que la misma ocuparía si las personas no se hubieran movido. Despreciar cualquier resistencia al movimiento que pudiera presentar el agua. ¿Afecta al resultado final la secuencia en la que tengan lugar los cambios de posición?

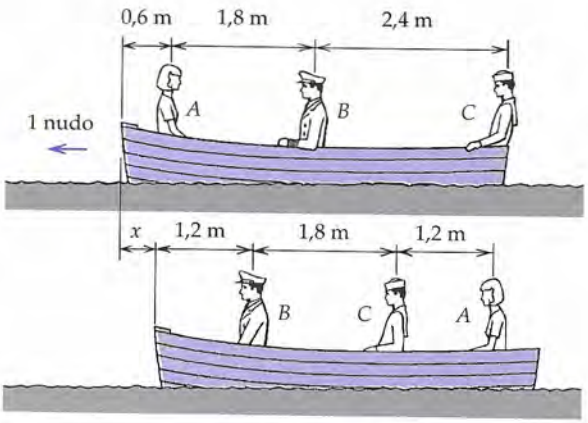


Figura problema 4.12

4.13 Las cinco partículas conectadas tienen una masa de 0,6 kg cada una y G es el centro de masa del sistema. En cierto instante el momento cinético del sistema respecto a G es $1{,}20\mathbf{k}$ kg·m²/s, y las componentes x e y de la velocidad de G son 3 y 4 m/s, respectivamente. Calcular el momento cinético $\mathbf{H}_O$ del sistema respecto a O en ese instante.

Resp. $\mathbf{H}_O = 3{,}3\mathbf{k}$ kg·m²/s

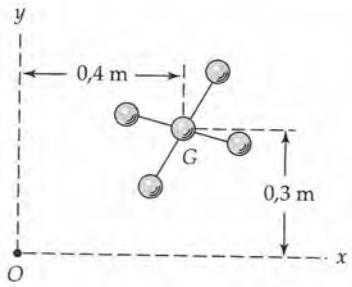


Figura problema 4.13

4.14 Las dos bolas están unidas a la varilla rígida liviana, que cuelga del soporte mediante una cuerda. Si sobre el conjunto, inicialmente en reposo, comienza a actuar la fuerza $F = 60$ N, calcular la aceleración correspondiente $\bar{a}$ del centro de masa y la variación por unidad de tiempo $\ddot{\theta}$ de la velocidad angular de la varilla.

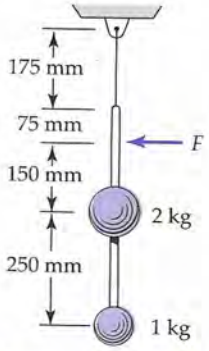


Figura problema 4.14

4.15 En cierto instante, los vectores de posición de las partículas A, B y C, de 2, 3 y 4 kg de masa, respectivamente, son $\mathbf{r}_A = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ m, $\mathbf{r}_B = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ m, y $\mathbf{r}_C = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ m. En ese mismo instante, las velocidades son $\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A = 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ m/s, $\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ m/s, y $\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C = -2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ m/s. Calcular el momento cinético $\mathbf{H}_O$ del sistema de las tres partículas respecto al origen O.

Resp. $\mathbf{H}_O = -19\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ kg·m²/s

4.16 En el instante $t = 4$ el momento cinético de un sistema de seis partículas respecto a un punto fijo O es $\mathbf{H}_4 = 3{,}65\mathbf{i} + 4{,}27\mathbf{j} - 5{,}36\mathbf{k}$ kg·m²/s. En el instante $t = 4{,}1$ s, el momento cinético es $\mathbf{H}_{4,1} = 3{,}67\mathbf{i} + 4{,}30\mathbf{j} - 5{,}20\mathbf{k}$. Hallar el valor medio del momento resultante respecto a O de todas las fuerzas que actúan sobre las seis partículas durante el intervalo de 0,1 s.

4.17 Desde el vehículo de 1 Mg que se mueve a la velocidad inicial $v_1 = 1{,}2$ m/s se disparan simultáneamente dos proyectiles de masa 10 kg cada uno en sentido opuesto al del movi-

http://gratislibrospdf.com/

miento del vehículo. Cada proyectil posee una velocidad en boca $v_r = 1200$ m/s respecto al cañón. Calcular la velocidad v_2 del vehículo después del doble disparo.

Resp. $v_2 = 24{,}7$ m/s

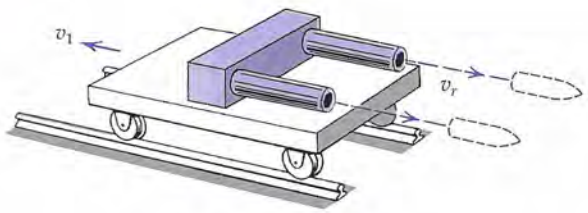


Figura problema 4.17

4.18 La pequeña vagoneta de 20 kg de masa rueda libremente por la vía horizontal transportando la esfera de 5 kg montada en la barra giratoria de masa despreciable en la que $r = 0{,}4$ m. Un accionamiento por motor con reductor de velocidad mantiene la barra a una celeridad angular constante $\dot{\theta} = 4$ rad/s. Si la velocidad de la vagoneta es $v = 0{,}6$ m/s cuando $\theta = 0$, calcular v cuando $\theta = 60°$. Despreciar la masa de las ruedas y todos los rozamientos.

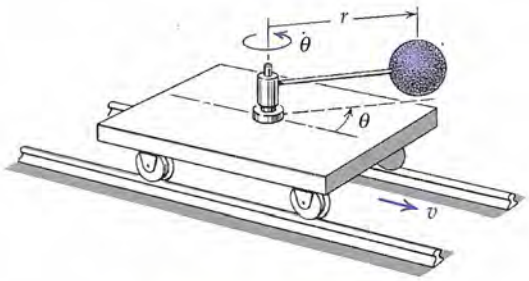


Figura problema 4.18

4.19 Hallar el valor máximo de la velocidad v de la vagoneta del problema 4.18 y el ángulo θ correspondiente.

Resp. $v = 0{,}920$ m/s, $\theta = 90°$

4.20 Las vagonetas de una montaña rusa pasan por la cima de la pista circular con una celeridad de 30 km/h. Despreciar el rozamiento y hallar su celeridad v cuando llegan al tramo horizontal inferior. En la posición superior, el radio de la trayectoria circular de sus centros de masa es de 18 m y las seis tienen la misma masa.

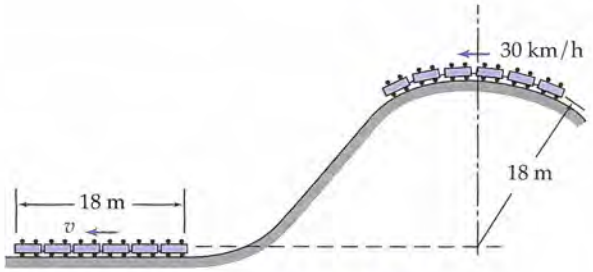


Figura problema 4.20

4.21 La escalera mecánica de unos grandes almacenes forma un ángulo de 30° con la horizontal y tarda 40 segundos en llevar a una persona desde la primera a la segunda planta, a través de una distancia vertical de 6 m. En un determinado momento, en la escalera se hallan 10 personas, cuya masa media es de 70 kg, en reposo relativo a los escalones en movimiento. Además, tres muchachos de 54 kg de masa media corren escalera abajo a una celeridad de 0,6 m/s relativa a los escalones en movimiento. Calcular la potencia útil que desarrolla el motor de accionamiento de la escalera para mantener a ésta con su celeridad constante. La potencia en vacío necesaria para vencer los rozamientos en el mecanismo es de 1,8 kW.

Resp. $P = 2{,}59$ kW

4.22 Las dos esferitas, de masa m cada una, están conectadas por una cuerda de longitud $2b$ (medida desde los centros de las esferitas) e inicialmente se hallan en reposo sobre una superficie horizontal. Un proyectil de masa m_0 animado de una velocidad v_0 perpendicular a la cuerda incide en el centro de ésta, haciendo que la misma se doble tal como se indica en la parte b de la figura. Hallar la velocidad v de m_0 cuando las dos esferitas están a punto de tocarse y el valor de θ se acerca a los 90°, tal como se indica en la parte c de la figura. Hallar asimismo $\dot{\theta}$ en esa situación.

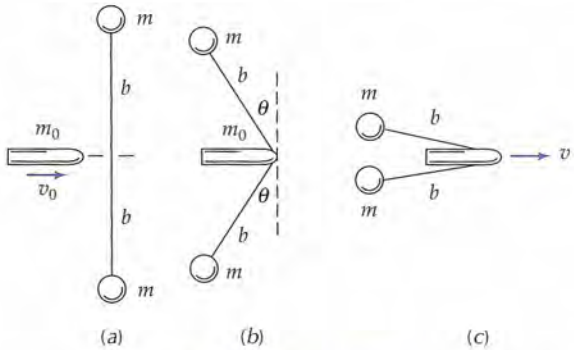


Figura problema 4.22

http://gratislibrospdf.com/

4.23 Las barras A y B de 10 kg de masa cada una, se deslizan sin rozamiento por la guía horizontal. Como se representa en la figura, el movimiento es controlado por la palanca de masa despreciable conectada a las barras. Calcular la aceleración del punto C de la palanca cuando se aplica la fuerza de 200 N en la forma indicada. Para comprobar el resultado estudiar la cinética de cada miembro por separado y hallar a_C por consideraciones cinemáticas a partir de las aceleraciones calculadas de las dos barras.

Resp. $a_C = 10\ \text{m/s}^2$

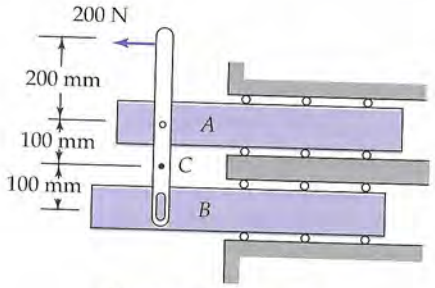


Figura problema 4.23

4.24 Las tres esferas, de masa m cada una, están sujetas a las varillas livianas formando un conjunto rígido que se mantiene en el plano vertical merced a la superficie circular lisa. La fuerza P de módulo constante se aplica perpendicularmente a la varilla y en el centro de la misma. Si el sistema parte del reposo con $\theta = 0$, hallar (*a*) la fuerza mínima P_{min} que hará que el sistema se pare en $\theta = 60°$ y (*b*) la velocidad v común de las esferas 1 y 2 cuando $\theta = 60°$ y $P = 2P_{\text{min}}$.

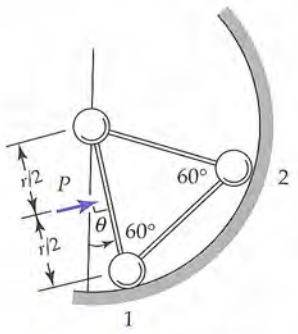


Figura problema 4.24

4.25 Las tres esferas iguales de 2 kg están soldadas a las varillas de masas despreciables y cuelgan de A mediante una cuerda. La esferas se encuentran inicialmente en reposo cuando a la superior se aplica una fuerza horizontal $F = 16$ N. Calcular la aceleración inicial $\bar{a}$ del centro de masa de las esferas, el aumento $\ddot{\theta}$ por unidad de tiempo de la velocidad angular y la aceleración inicial a de la esfera superior.

Resp. $\bar{a} = 2{,}67\ \text{m/s}^2$, $\ddot{\theta} = 15{,}40\ \text{rad/s}^2$, $a = 5{,}33\ \text{m/s}^2$

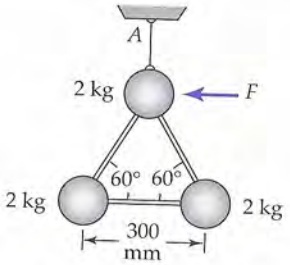


Figura problema 4.25

4.26 Las tres esferas iguales, de masa m cada una, están sujetas en el plano vertical sobre el plano inclinado 30°. Están también soldadas a las dos varillas de masas despreciables. La varilla superior, también de masa despreciable, está articulada libremente a la esfera superior y al soporte A. Si repentinamente se retira el tope B, hallar la velocidad v con que la esfera superior golpeará en el plano inclinado. (Obsérvese que la correspondiente velocidad de la esfera central será $v/2$.) Explicar la pérdida de energía que tiene lugar cuando ha cesado todo movimiento.

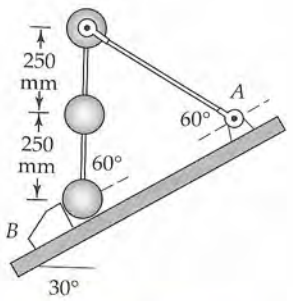


Figura problema 4.26

▶**4.27** Una cuerda flexible e inextensible de masa ρ por unidad de longitud y de longitud igual a 1/4 del perímetro del tambor de radio r se suelta desde el reposo en la posición indicada por las líneas de trazos, con su extremo B sujeto al punto más alto del tambor. Hallar la pérdida de energía ΔQ del sistema cuando finalmente la cuerda se detiene con su extremo A en C. ¿A dónde va a parar la energía perdida?

Resp. $\Delta Q = 0{,}571\ \rho g r^2$

http://gratislibrospdf.com/

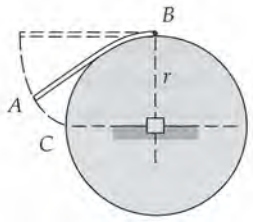


Figura problema 4.27

▶4.28 Una barra horizontal de masa m_1 y pequeño diámetro cuelga mediante dos alambres de longitud l de un carrito de masa m_2, que puede rodar sobre los dos raíles horizontales. Si el conjunto se abandona desde el reposo con los alambres formando un ángulo θ con la horizontal, hallar la velocidad $v_{b/c}$ de la barra relativa al carrito y la velocidad v_c del carrito en el instante $\theta = 0$. Despreciar el rozamiento y tratar el carrito y la barra como si fueran masas puntuales en un plano de movimiento vertical.

$$Resp.\ v_{b/c} = \sqrt{(1 + m_1/m_2)2gl(1 - \cos\theta)}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{2gl(1 - \cos\theta)}{(m_2/m_1)(1 + m_2/m_1)}}$$

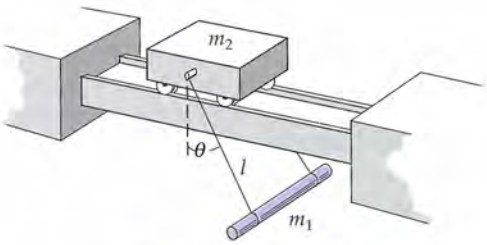


Figura problema 4.28

▶4.29 Un vagón batea de 25 Mg carga un vehículo de 7,5 Mg en una rampa de 5° construida sobre la propia batea. Si el vehículo se deja ir desde el reposo, estando el vagón también en reposo, hallar la velocidad v de éste cuando el primero ha rodado $s = 12$ m rampa abajo, inmediatamente antes de golpear en el tope B. Despreciar el rozamiento y tratar el vehículo y el vagón como si fueran masas puntuales.

Resp. $v = 1{,}186$ m/s

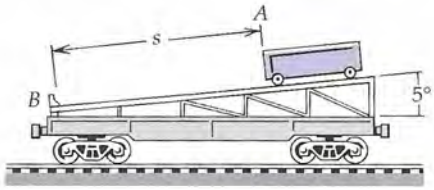


Figura problema 4.29

▶4.30 Una cuerda flexible de masa ρ por unidad de longitud se hace girar en torno a un eje vertical con una velocidad angular constante $\omega = \dot{\theta}$. Determinar la forma $y = f(x)$ que adquiere la cuerda cuando ω es lo suficientemente grande para que la distancia, medida a lo largo de la cuerda, desde el extremo sujeto de la cuerda hasta cualquier elemento de la misma pueda suponerse aproximadamente igual al radio horizontal correspondiente al elemento. La cuerda puede asimilarse a un sistema de partículas conectadas. (*Sugerencia*: Dibujar el diagrama para sólido libre del trozo de cuerda representado y escribir sus ecuaciones de movimiento en las direcciones x e y. Véase que $dy/dx = tg\ \theta$ y que la tensión T de la cuerda es nula en su extremo libre, donde $x \cong L$.)

$$Resp.\ y = \frac{2g}{\omega^2}\ln\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

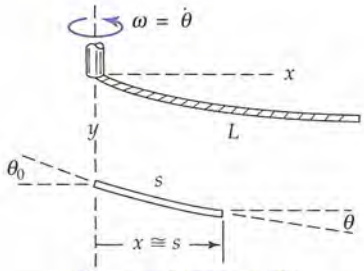


Figura problema 4.30

4.6 MOVIMIENTO ESTACIONARIO DE UN MEDIO CONTINUO

La expresión de la cantidad de movimiento obtenida en el apartado 4.4 para un sistema material cualquiera proporciona un procedimiento para estudiar directamente lo que ocurre en el movimiento de un medio continuo en el que varíe la cantidad de movimiento. La dinámica de los medios continuos es de gran importancia para el estudio de las máquinas de fluidos de todo tipo, entre las que se cuentan turbinas, bombas, toberas, motores de reacción aerobios y

http://gratislibrospdf.com/

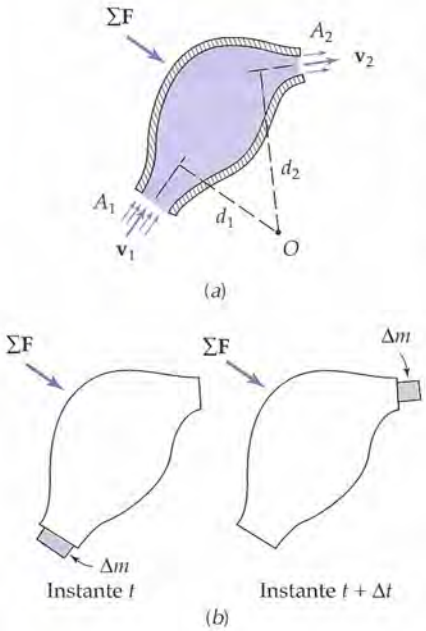


Figura 4.5

cohetes. El tratamiento que en este apartado damos al movimiento de los medios continuos no está pensado como sustitutivo de la Mecánica de Fluidos, sino que simplemente pretende presentar los principios y las ecuaciones de la cantidad de movimiento fundamentales de mayor aplicación en Mecánica de Fluidos y en el movimiento general de medios continuos, sea la forma de éstos líquida, gaseosa o granular.

Uno de los casos más importantes del movimiento de un medio continuo se tiene en condiciones estacionarias, es decir, cuando la masa que penetra por unidad de tiempo en un volumen dado es igual a la masa que por unidad de tiempo abandona dicho volumen. Este puede estar encerrado por un contorno rígido, fijo o móvil, tal como la tobera de un avión a reacción o de un cohete, el espacio entre aletas de una turbina de gas, el volumen interno de una bomba centrífuga o el volumen interno de un codo de tubería por la que fluya un fluido a velocidad constante. El diseño de estas máquinas depende del análisis de las fuerzas y momentos que se desarrollan a consecuencia de las variaciones correspondientes de la cantidad de movimiento y del momento cinético de la masa en circulación.

Consideremos el recipiente rígido, cuya sección se representa en la figura 4.5*a*, a cuyo interior penetra una corriente másica, por la sección de entrada de área A_1, a razón de m' por unidad de tiempo. Por la sección de salida, de área A_2, sale masa del recipiente en la misma cantidad por unidad de tiempo, por lo que durante el período de observación no se acumula ni disminuye la masa total contenida en el recipiente. La velocidad de la corriente entrante es $\mathbf{v}_1$ normal a A_1, y la velocidad de la corriente saliente es $\mathbf{v}_2$ normal a A_2. Si son ρ_1 y ρ_2 las respectivas densidades de las corrientes, la continuidad de circulación exige

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 = m' \tag{4.17}$$

Las fuerzas que se ejercen las describiremos aislando la masa de fluido interior al recipiente o bien el recipiente completo con el fluido interior al mismo. Lo primero sería lo que se haría si se deseara describir las fuerzas que se desarrollan entre el recipiente y el fluido; lo segundo cuando interesen las fuerzas exteriores al recipiente. La última situación es la que acostumbra a interesar, en cuyo caso el *sistema aislado* consta de la estructura fija del recipiente y del fluido existente en su interior en un instante particular. Ese aislamiento se describe mediante un sistema para sólido libre de la masa interior a un volumen definido por la superficie externa del recipiente y las superficies de entrada y salida. Deberán tenerse en cuenta todas las fuerzas aplicadas *exteriormente* a ese sistema y en la figura 4.5*a* se ha representado por $\Sigma\mathbf{F}$ la suma vectorial de ese sistema de fuerzas exteriores. En $\Sigma\mathbf{F}$ se incluyen las fuerzas que se ejercen sobre el recipiente en sus puntos de sujeción a otras estructuras, incluyendo las sujeciones en A_1 y A_2, si existen, las fuerzas que se ejercen en A_1 y A_2 sobre el fluido interior al recipiente debidas a cualquier presión estática que pueda existir en el fluido en dichas posiciones y el peso del fluido y la estructura si es apreciable. La resultante $\Sigma\mathbf{F}$ de todas estas fuerzas exteriores debe ser igual a la variación por unidad de tiempo $\dot{\mathbf{G}}$ de la cantidad de movimiento del sistema aislado, en virtud de la ecuación 4.6 desarrollada en el apartado 4.4 para todo sistema de masa constante, rígido o deformable.

La expresión de $\dot{\mathbf{G}}$ puede hallarse por análisis incremental. La figura 4.5*b* presenta el sistema en el instante t, cuando la masa del sistema es la del recipiente, la que éste contiene y un incremento de masa Δm a punto de entrar durante un tiempo Δt. En el instante $t + \Delta t$ la misma masa total es la del recipiente, la que

http://gratislibrospdf.com/

éste contiene y un incremento igual Δm que abandona el recipiente durante el tiempo Δt. La cantidad de movimiento del recipiente y la masa que contiene entre las secciones A_1 y A_2 permanece invariable durante Δt, por lo que la variación de la cantidad de movimiento del sistema durante ese mismo tiempo es

$$\Delta \mathbf{G} = (\Delta m)\mathbf{v}_2 - (\Delta m)\mathbf{v}_1 = \Delta m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

Dividiendo por Δt y pasando al límite se tiene $\dot{\mathbf{G}} = m'\Delta\mathbf{v}$, donde

$$m' = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right) = \frac{dm}{dt}$$

Así pues, en virtud de la ecuación 4.6

$$\Sigma \mathbf{F} = m'\Delta\mathbf{v} \tag{4.18}$$

Esta ecuación 4.18 establece la relación existente entre la fuerza resultante sobre un sistema en régimen estacionario y los correspondientes caudal másico e incremento de vector velocidad.[1]

Otra posibilidad sería tener en cuenta que la variación por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento es la diferencia (vectorial) entre la cantidad de movimiento que por unidad de tiempo sale del sistema y la cantidad de movimiento que por unidad de tiempo entra en él. Entonces, podemos escribir $\dot{\mathbf{G}} = m'\mathbf{v}_2 - m'\mathbf{v}_1 = m'\Delta\mathbf{v}$, que concuerda con el resultado anterior.

En este momento ya podemos observar una de las aplicaciones más potentes de la segunda ley de Newton generalizada que se obtuvo para un sistema material cualquiera. En el caso presente, el sistema incluye partículas rígidas (la estructura que limita la corriente másica) y puntos materiales que se mueven (el medio continuo en movimiento). Definidos los límites del sistema, en cuyo interior la masa es constante en régimen estacionario, es posible hacer uso de la generalidad con que se ha escrito la ecuación 4.6. No obstante, se ha de poner cuidado en tener en cuenta *todas* las fuerzas actuantes sobre el sistema, las cuales son evidentes si se dibuja correctamente el diagrama para solido libre.

Para el momento cinético de sistemas en régimen estacionario se obtiene una formulación análoga. El momento resultante respecto a un punto fijo O, interior o exterior al sistema (fig. 4.5*a*), de todas las fuerzas exteriores, es igual a la variación por unidad de tiempo del momento cinético del sistema respecto a O. Este hecho se estableció en la ecuación 4.7, la cual, en el caso de régimen estacionario en un plano, queda en la forma

$$\Sigma M_O = m'(v_2 d_2 - v_1 d_1) \tag{4.19}$$

Cuando las velocidades de las masas entrante y saliente no estén en un mismo plano, la ecuación deberá escribirse en forma vectorial de la manera siguiente

$$\Sigma \mathbf{M}_O = m'(\mathbf{d}_2 \times \mathbf{v}_2 - \mathbf{d}_1 \times \mathbf{v}_1) \tag{4.19a}$$

[1] Téngase cuidado en no interpretar que dm/dt sea la derivada temporal de la masa del sistema aislado. Tal derivada es nula, pues la masa del sistema permanece constante al encontrarse éste en régimen estacionario. Para evitar la confusión, para representar el caudal másico estacionario se emplea el símbolo m' y no dm/dt.

http://gratislibrospdf.com/

donde $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son los vectores de posición de los centros de A_1 y A_2 respecto al punto de referencia O. En ambas relaciones podría tomarse como centro de momentos el centro de masa G en virtud de la ecuación 4.9.

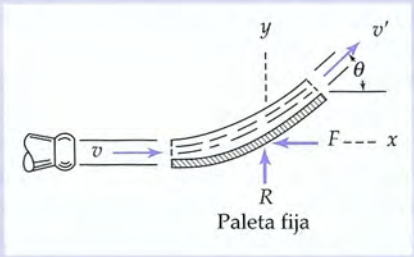
Las ecuaciones 4.18 y 4.19 son relaciones muy sencillas que hallan una aplicación importante en la descripción de acciones relativamente complicadas de los fluidos. Debe observarse que estas ecuaciones relacionan fuerzas *exteriores* con las resultantes variaciones de la cantidad de movimiento y son independientes de la trayectoria del flujo y de las variaciones de la cantidad de movimiento *internas* al sistema.

El análisis anterior puede aplicarse a sistemas que se muevan con celeridad constante teniendo en cuenta que las relaciones fundamentales $\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$ y $\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$, o bien $\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$, son aplicables a sistemas que se mueven con celeridad constante, tal como se expuso en los apartados 3.12 y 4.4. La única restricción es que la masa interior al sistema permanezca constante respecto al tiempo.

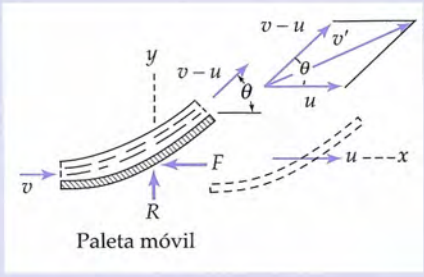
Los problemas tipo que se presentan a continuación constituyen tres ejemplos de análisis de movimiento estacionario de un medio continuo e ilustran la aplicación de los principios contenidos en las ecuaciones 4.18 y 4.19.

PROBLEMA TIPO 4.5

La paleta lisa de la figura desvía la corriente fluida abierta de sección recta de área A, densidad ρ y velocidad v. (a) Determinar las componentes R y F de la fuerza necesaria para mantener la paleta en una posición fija. (b) Hallar las fuerzas cuando se da a la paleta una velocidad constante u inferior a v y de su mismo sentido.



Solución. Parte (a). Se representa el diagrama para sólido libre de la paleta junto la porción de fluido que sufre la variación de cantidad de movimiento. Podemos aplicar el teorema de la cantidad de movimiento al sistema aislado en ambas direcciones x e y. Con la paleta parada, la celeridad de salida v' debe ser igual a la de entrada v, puesto que despreciamos el rozamiento. Las variaciones de las componentes de la velocidad serán



$$\Delta v_x = v' \cos\theta - v = -v(1 - \cos\theta) \quad (1)$$

y

$$\Delta v_y = v' \operatorname{sen}\theta - 0 = v \operatorname{sen}\theta$$

El caudal másico es $m' = \rho A v$ y aplicado en la ecuación 4.18 resulta

$$[\Sigma F_x = m'\Delta v_x] \qquad -F = \rho A v[-v(1 - \cos\theta)]$$

$$F = \rho A v^2(1 - \cos\theta) \qquad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_y = m'\Delta v_y] \qquad R = \rho A v[v \operatorname{sen}\theta]$$

$$R = \rho A v^2 \operatorname{sen}\theta \qquad \textit{Resp.}$$

(1) **Al aplicar la ecuación 4.18 ha de ponerse mucho cuidado en los signos algebraicos. La variación de v_x es el valor final menos el valor inicial medidos en la dirección x positiva. También debe ponerse cuidado al escribir ΣF_x que es $-F$.**

http://gratislibrospdf.com/

Parte (b). Cuando la paleta se mueve, la velocidad final del fluido al salir es la suma vectorial de la velocidad u de la paleta más la velocidad del fluido con relación a la paleta $u - v$. La combinación de estas dos componentes de la velocidad, da la velocidad absoluta final del fluido v' en la forma indicada. La componente x de v' es la suma de las componentes de sus dos partes, es decir, $v'_x = (v - u)\cos\theta + u$. La variación de la componente x de la velocidad de la corriente es

$$\Delta v_x = (v-u)\cos\theta + (u-v) = -(v-u)(1-\cos\theta)$$

La componente y de v' es $(v - u)$ sen θ, con lo que la variación de la componente y de la velocidad de la corriente es $\Delta v_y = (v - u)$ sen θ.

La masa m' que circula por unidad de tiempo es la masa que sufre la variación de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo. Es la que circula sobre la paleta por unidad de tiempo y *no* la que sale por la tobera por unidad de tiempo. Así pues,

$$m' = \rho A(v-u)$$

El principio de la cantidad de movimiento (ec. 4.18) aplicado en los sentidos positivos de las coordenadas da

$$[\Sigma F_x = m'\Delta v_x] \qquad -F = \rho A(v-u)[-(v-u)(1-\cos\theta)]$$

$$F = \rho A(v-u)^2(1-\cos\theta) \qquad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_y = m'\Delta v_y] \qquad R = \rho A(v-u)^2 \operatorname{sen}\theta \qquad \textit{Resp.}$$

(2) Obsérvese que para los valores dados de u y v, el ángulo correspondiente a la fuerza máxima es $\theta = 180°$.

PROBLEMA TIPO 4.6

Para la paleta móvil del problema tipo 4.5, hallar la celeridad óptima u en lo que respecta a la generación de la potencia máxima por la acción del fluido sobre la paleta.

Solución. La fuerza R representada en la figura del problema tipo 4,5 es perpendicular a la paleta y no trabaja. El trabajo de la fuerza F es negativo, pero la potencia que desarrolla la fuerza (de reacción a F) ejercida por el fluido sobre la paleta móvil es

$$[P = Fu] \qquad P = \rho A(v-u)^2 u(1-\cos\theta)$$

La velocidad de la paleta para la potencia máxima correspondiente a la paleta que se halla en la corriente, está especificada por

$$\left[\frac{dP}{du} = 0\right] \qquad \rho A(1-\cos\theta)(v^2 - 4uv + 3u^2) = 0$$

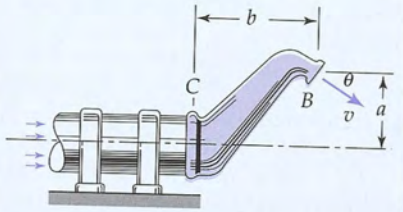
$$(v-3u)(v-u) = 0 \qquad u = \frac{v}{3} \qquad \textit{Resp.}$$

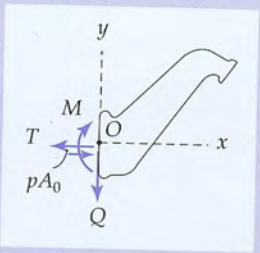
La segunda solución $u = v$ da una condición de mínimo que corresponde a potencia nula. Un ángulo $\theta = 180°$ invierte por completo el flujo y evidentemente produce tanto una fuerza como una potencia máximas para cualquier valor de u.

(1) Este resultado es solamente aplicable a una paleta única. En el caso de varias paletas, como son los álabes de un rotor de turbina, el ritmo al cual sale el fluido por las toberas es el mismo al que tiene lugar la variación de la cantidad de movimiento. O sea, $m' = \rho Av$ en vez de $\rho A(v - u)$. Con este cambio, el valor óptimo de u resulta ser $u = v/2$.

http://gratislibrospdf.com/

La tobera acodada tiene una sección de descarga de área A en B y una sección de admisión de área A_0 en C. En ella penetra un líquido que, en la tubería estática, presenta una presión manométrica p y que sale por la tobera con una velocidad v en la dirección que se indica. Si es ρ la densidad constante del fluido, escribir las expresiones de la tracción T, la fuerza cortante Q y el momento flector M en la sección C de la tubería.





Solución. En el diagrama para sólido libre de la tobera y el fluido contenido en ella se muestran la tracción T, la fuerza cortante Q y el momento flector M que actúan sobre la pestaña de la tobera que la fija a la tubería. La fuerza pA_0 que se ejerce sobre el fluido interior a la tobera debida a la presión estática es otra fuerza exterior al sistema considerado.

La ecuación de la continuidad del caudal para densidad constante requiere

$$Av = A_0 v_0$$

donde v_0 es la velocidad del fluido al entrar en la tobera. El principio de la cantidad de movimiento (ec. 4.18) puede aplicarse en las dos direcciones coordenadas para dar

$$[\Sigma F_x = m'\Delta v_x] \qquad pA_0 - T = \rho A v(v\cos\theta - v_0)$$

$$T = pA_0 + \rho A v^2\left(\frac{A}{A_0} - \cos\theta\right) \qquad \textit{Resp.}$$

(1)

$$[\Sigma F_y = m'\Delta v_y] \qquad -Q = \rho A v(-v\,\text{sen}\,\theta - 0)$$

$$Q = \rho A v^2\,\text{sen}\,\theta \qquad \textit{Resp.}$$

La ecuación 4,19 aplicada en sentido horario nos da

(2)

$$[\Sigma M_O = m'(v_2 d_2 - v_1 d_1)] \qquad M = \rho A v(va\cos\theta + vb\,\text{sen}\,\theta - 0)$$

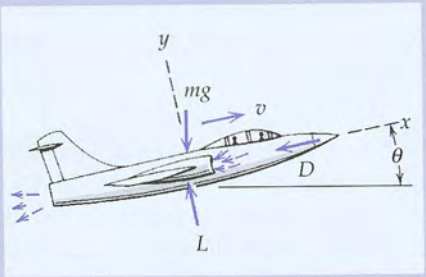
$$M = \rho A v^2(a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta) \qquad \textit{Resp.}$$

(1) Insistimos otra vez en la necesidad de observar escrupulosamente los signos algebraicos de los términos de ambos miembros de las ecuaciones 4.18 y 4.19.

(2) Las fuerzas y los momentos actuantes sobre la tubería son iguales y opuestos a los que se representan actuando sobre la tobera.

http://gratislibrospdf.com/

Un turborreactor de masa total m que vuela a la celeridad constante v consume un caudal másico de aire m_a' y lanza un caudal másico m_g' de gases quemados a la velocidad u relativa al avión. El caudal de combustible consumido es constante y vale m_f'. Las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre el avión son la sustentación L, perpendicular a la dirección de vuelo, y la resistencia D del aire opuesta al sentido del vuelo. Se supone que todas las fuerzas originadas por la presión estática sobre las superficies de admisión y del escape están incluidas en D. Escribir la ecuación del movimiento del avión e identificar el empuje T.



Solución. En el diagrama para sólido libre del avión junto con el aire, el combustible y el gas de escape contenidos en su interior figuran sólo el peso y las fuerzas de sustentación y resistencia, tal como se definieron. Fijemos unos ejes (1) (2) *x*-*y* al avión y apliquemos la ecuación de la cantidad de movimiento referida al sistema móvil.

El combustible lo tratamos como una corriente estacionaria que penetrase en el avión a velocidad nula respecto al mismo y que saliese a la velocidad relativa *u* por la corriente de escape. Aplicamos ahora la ecuación 4.18 con relación a los ejes de referencia tratando por separado a los caudales de aire y combustible. Para la corriente de aire, la variación de velocidad en la dirección *x* respecto al sistema móvil es

$$\Delta v_a = -u-(-v) = -(u-v) \quad (3)$$

y para la corriente de combustible la variación de velocidad en la dirección *x* respecto a *x*-*y* es

$$\Delta v_f = -u-(0) = -u$$

Así pues, tenemos

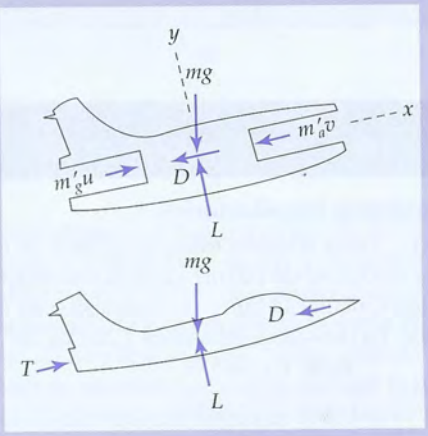
$$[\Sigma F_x = m'\Delta v_x] \qquad -mg \operatorname{sen}\theta - D = -m_a'(u-v) - m_f' u$$
$$= -m_g' u + m_a' v$$

donde se ha hecho la sustitución de $m_a' + m_f'$ por m_g'. Cambiando los signos resulta

$$m_g' u - m_a' v = mg \operatorname{sen}\theta + D$$

que no es sino una ecuación que expresa el equilibrio del avión.

Si modificamos el contorno del sistema para dejar a la vista las superficies interiores sobre las que actúan el aire y el gas, obtendremos el modelo simulado



(1) **Obsérvese que la corriente de aire del sistema corta al través a la corriente de aire en la entrada de la toma y a la corriente de aire en la tobera.**

(2) **Nos es posible utilizar ejes móviles que se trasladen a velocidad constante. Véanse los apartados 3.14 y 4.2.**

(3) **Volando en el avión observaríamos que el aire entra en el sistema a la velocidad – *v*, medida en la dirección x positiva y que lo abandona a una velocidad cuya componente *x* es – *u*. La diferencia entre los valores inicial y final nos da la expresión citada, es decir, $-u-(-v) = -(u-v)$.**

http://gratislibrospdf.com/

④ Vemos, pues, que el "empuje" no es en realidad la fuerza exterior aplicada al avión que se representa en la primera figura, pero podemos imaginarla como si lo fuera.

de la figura en el que el aire ejerce una fuerza $m_a'v$ sobre el interior de la turbina y el gas de escape reacciona contra las superficies interiores con una fuerza $m_g'u$.

En la última figura se muestra el modelo habitualmente empleado con los efectos netos de las cantidades de movimiento del aire y del escape sustituidos por un empuje simulado

$$T = m_g'u - m_a'v \qquad \textit{Resp.}$$

aplicado al avión por un hipotético agente externo.

Como sucede que m_f' es generalmente sólo el 2% de m_a' o menos, podemos hacer la aproximación $m_g' \cong m_a'$ y expresar el empuje mediante

$$T \cong m_g'(u - v) \qquad \textit{Resp.}$$

Hemos estudiado el caso de velocidad constante. Aunque los principios de la Mecánica de Newton no son válidos en general respecto a ejes acelerados, se demuestra que puede emplearse la ecuación $F = ma$ con el modelo simulado y escribir $T - m\dot{g}$ sen $\theta - D = m\dot{v}$ prácticamente sin error.

PROBLEMAS

Problemas introductorios

4.31 De la boquilla mana un caudal de 0,2 m³/s de aire con una velocidad de 100 m/s que es desviado por el álabe rectangular. Calcular la fuerza F necesaria para mantener inmóvil el álabe. La densidad del aire es 1,206 kg/m³.

Resp. $F = 24{,}1$ N

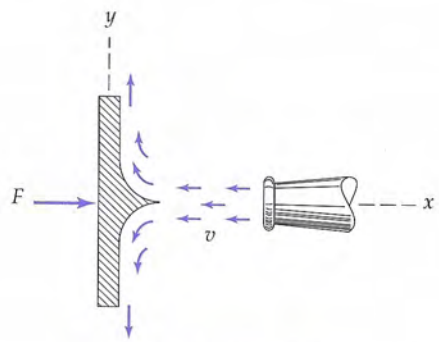


Figura problema 4.31

4.32 De la boquilla mana un caudal de 0,05 m³/s de agua dulce con una velocidad de 30 m/s y el chorro se divide en dos corrientes iguales por acción del álabe fijo que las desvía 60°, tal como se muestra. Calcular la fuerza F necesaria para mantener inmóvil el álabe. La densidad del agua es 1000 kg/m³.

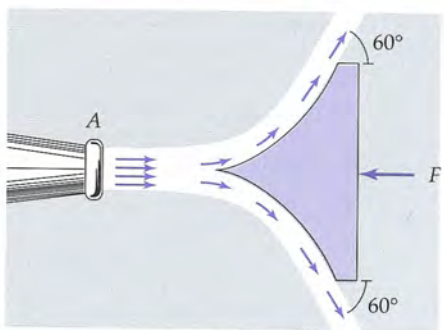


Figura problema 4.32

4.33 Un supresor de ruido de motor a reacción consiste en una conducción móvil que se sitúa directamente detrás de la salida, asegurándola mediante el cable A y que desvía hacia arriba el chorro. Durante una prueba en tierra, el aparato absorbe aire a razón de 43 kg/s y quema combustible a razón de

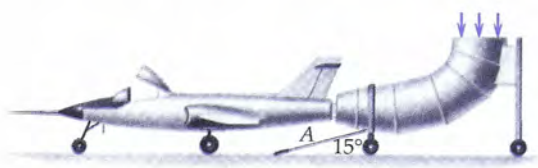


Figura problema 4.33

http://gratislibrospdf.com/

0,8 kg/s. La velocidad de los gases de escape es de 720 m/s. Hallar la tracción T que sufre el cable.

Resp. $T = 32{,}6$ kN

4.34 El remolcador contraincendios descarga un chorro de agua de mar (densidad, 1030 kg/m^3) con una velocidad de 40 m/s a la salida de la boquilla y a razón de 0,080 m^3/s. Calcular el empuje que debe desarrollar la embarcación para mantenerse en una posición fija mientras lanza agua.

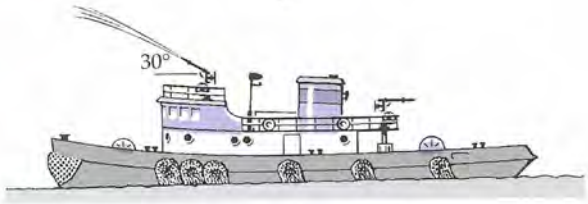


Figura problema 4.34

4.35 El reactor tiene una masa de 4,6 Mg y, a determinada altura, soporta una resistencia aerodinámica de 32 kN a una velocidad de 1000 km/h. El avión consume aire a razón de 106 kg/s a través de su toma de admisión y gasta combustible a razón de 4 kg/s. Si el escape posee una velocidad hacia atrás de 680 m/s con relación a la tobera, hallar el ángulo de elevación máximo α bajo el que el aparato es capaz de volar a una celeridad constante de 1000 km/h a la altura en cuestión.

Resp. $\alpha = 17{,}22°$

Figura problema 4.35

4.36 La bomba representada extrae aire de densidad ρ a través del conducto A de diámetro d con una velocidad u y lo descarga a la velocidad v a través de las dos salidas B. La presión en los puntos A y B de las corrientes de aire es la atmosférica. Hallar la expresión de la tensión T que se ejerce sobre la bomba a través de la pestaña C.

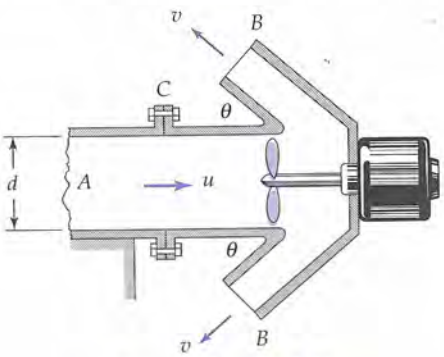


Figura problema 4.36

4.37 Funcionando en agua de mar, el esquí acuático de propulsión a chorro alcanza una velocidad máxima de 70 km/h. La toma de agua se halla en un túnel horizontal en el fondo del casco, por lo que el agua penetra en élla a la velocidad de 70 km/h con relación al esquí. La bomba mecánica descarga agua procedente de la tobera de escape horizontal de 50 mm de diámetro a razón de 0,083 m^3/s. Calcular la resistencia R del agua sobre el casco a la velocidad de funcionamiento.

Resp. $R = 1885$ N

Figura problema 4.37

4.38 En la figura se representa la vista en planta de un trineo cohete experimental cuya velocidad es de 300 m/s cuando su toma de agua delantera penetra en un canal de agua que actúa como dispositivo de frenado. El agua es desviada según ángulos rectos respecto al movimiento del trineo. Siendo de 10^{-2} m^2 la superficie de admisión delantera, calcular la fuerza de frenado inicial. La densidad del agua es 1000 kg/m^3.

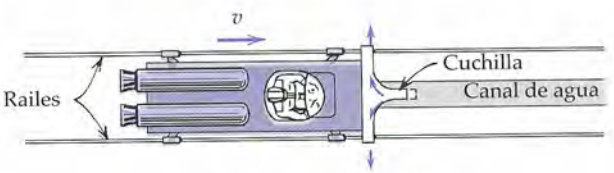


Figura problema 4.38

Problemas representativos

4.39 El álabe de 90° se mueve, a la celeridad constante de 10 m/s, en sentido opuesto al del chorro de agua dulce que mana a 20 m/s de la boquilla de 25 mm de diámetro. Calcular las fuerzas F_x y F_y que deben ejercerse sobre el álabe para mantenerlo en movimiento.

Resp. $F_x = 442$ N, $F_y = 442$ N

http://gratislibrospdf.com/

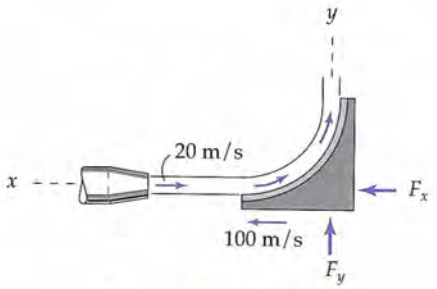


Figura problema 4.39

4.40 La plancha de acero de 25 mm de espesor y 1,2 m de anchura penetra en los rodillos a 0,4 m/s y su espesor se reduce a 19 mm. Calcular el pequeño empuje horizontal T que sufren los cojinetes de los dos rodillos.

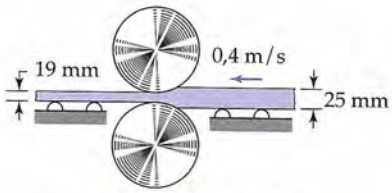


Figura problema 4.40

4.41 El ventilador de flujo axial aspira aire por la canalización de sección circular y lo descarga en B con una velocidad v. En A y B las densidades del aire son, respectivamente, ρ_A y ρ_B. Las paletas deflectoras fijas D restablecen el flujo axial del aire después de pasar éste por las paletas impulsoras C. Escribir la expresión de la fuerza horizontal R que ejercen sobre el grupo ventilador la brida y los pernos de la sección A.

$$Resp.\ R = \frac{\pi d^2}{4}\left[\rho_B\left(1-\frac{\rho_B}{\rho_A}\right)v^2 + (p_B - p_A)\right]$$

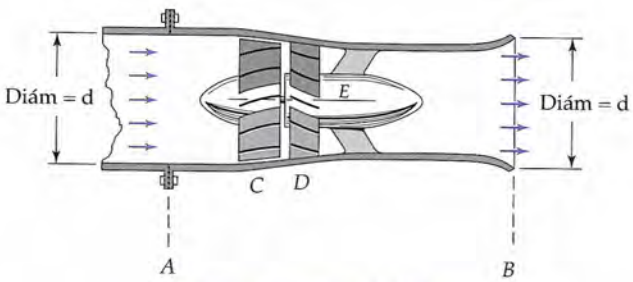


Figura problema 4.441

4.42 En uno de los procedimientos más avanzados para cortar placas metálicas se emplea un chorro de agua a alta velocidad que lleva en suspensión polvo de granate abrasivo. El chorro brota de la boquilla de 25 mm de diámetro y sigue el trayecto que se indica de un lado a otro del espesor t de la placa. Conforme la placa se desplaza lentamente hacia la derecha, el chorro abre una ranura de precisión de poca anchura en la placa. La mezcla de agua y abrasivo, de densidad 1100 kg/m^3, se gasta escasamente a razón de $2(10^{-3})$. El agua sale de la cara inferior de la placa con una velocidad igual al sesenta por ciento de la que tenía al incidir en la cara superior saliendo de la boquilla. Calcular la fuerza horizontal F necesaria para mantener la placa contra el chorro.

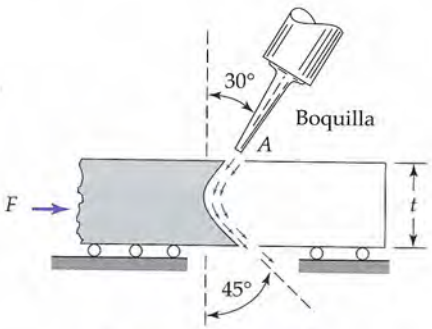


Figura problema 4.42

4.43 En el ensayo estático de un montaje de motor a chorro y tobera de escape, el caudal másico de aire aspirado es de 30 kg/s y el consumo de combustible es de 1,6 kg/s. La sección de flujo, la presión estática y la velocidad axial del flujo son las siguientes en las tres secciones que se indican:

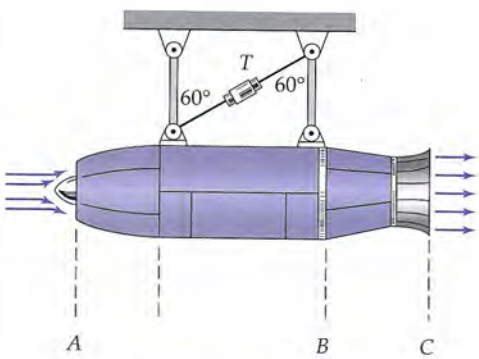


Figura problema 4.43

http://gratislibrospdf.com/

	Sección A	Sección B	Sección C
Sección, m^2	0,15	0,16	0,06
Presión estática, kPa	− 14	140	14
Velocidad axial, m/s	120	315	600

Hallar la tracción T que sufre el elemento diagonal del soporte y la fuerza F que sobre la brida B ejercen los pernos y la junta para mantener la tobera unida al cárter del motor.

Resp. $T = 21{,}1$ kN, $F = 12{,}55$ kN

4.44 A través del conducto estacionario A se hace circular una corriente de aire a una velocidad de 15 m/s y sale por un tramo de tobera experimental de sección BC. La presión estática media indicada en la sección B es de 1050 kPa y la densidad del aire a esa presión y a la temperatura existente es de 13,5 kg/m^3. La presión estática media indicada en la sección de salida C resulta ser de 14 kPa y la densidad del aire correspondiente es de 1,217 kg/m^3. Calcular la fuerza T que sobre las pestañas B ejercen los pernos y la junta para sujetar la tobera.

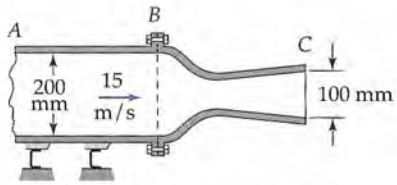


Figura problema 4.44

4.45 En el aterrizaje de los reactores el empuje inverso se consigue rotando los deflectores de escape tal como se muestra en la figura, con lo que se invierte parcialmente el chorro de escape. Para un motor a reacción que gaste 40 kg de aire por segundo a una velocidad en tierra de 250 km/h y consuma 2 kg de combustible por segundo, determinar el empuje inverso como fracción n del empuje hacia adelante sin deflectores. La velocidad de descarga es de 600 m/s respecto a la tobera. Se supone que el aire penetra en el motor a una velocidad igual a la velocidad en tierra del avión.

Resp. $n = 0{,}508$

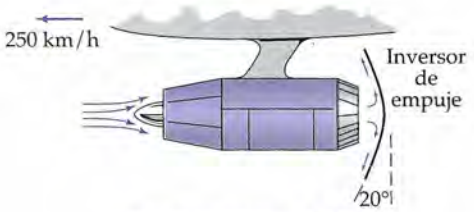


Figura problema 4.45

4.46 El vehículo levitante experimental tiene una masa de 2,2 Mg. Aspirando aire a la presión atmosférica a través del conducto de admisión circular B y descargándolo horizontalmente por debajo de la periferia del faldón C consigue mantenerse flotando en el aire. Para una velocidad de admisión v de 45 m/s, calcular la presión media p del aire a nivel del suelo bajo la máquina de 6 m de diámetro. La densidad del aire es 1,206 kg/m^3.

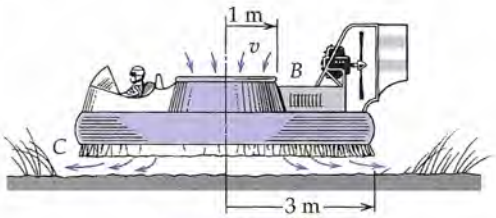


Figura problema 4.46

4.47 Para un chorro que actúe sobre múltiples álabes de tal modo que a cada álabe que entre en el chorro le siga inmediatamente otro (véanse las figuras de los problemas 4.65 y 4.66), determinar la potencia máxima P que puede generarse para un ángulo de álabe dado y la correspondiente celeridad periférica óptima u de los álabes en función de la velocidad del chorro para potencia máxima. Modificar el problema tipo 4.6 suponiendo que el número de paletas es infinito de tal manera que el ritmo al cual el fluido abandona la tobera es igual al ritmo al cual el fluido pasa por las paletas.

Resp. $P = \frac{1}{4}\rho A v^3(1 - \cos\theta)$, $u = v/2$

4.48 El codo de tubería de la figura tiene una sección recta de área A y está soportado en su plano por la tensión T aplicada a sus pestañas por los tubos contiguos (no ilustrados). Si la velocidad del líquido es v, su densidad ρ y su presión estática p, hallar T y mostrar que no depende del ángulo θ.

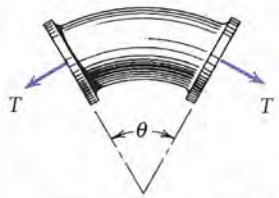


Figura problema 4.48

4.49 Un avión comercial que vuela horizontalmente a 800 km/h halla a su paso un fuerte aguacero que descarga verticalmente a 6 m/s con una intensidad equivalente a una pluviometría en tierra de 25 mm/h. La superficie superior del avión proyectada en un plano horizontal es de 275 m^2. Calcular

http://gratislibrospdf.com/

la fuerza despreciable F hacia abajo que la lluvia ejerce sobre el avión.

Resp. $F = 11{,}46$ N

Figura problema 4.49

4.50 En una prueba de funcionamiento de un camión contraincendios con grúa alzamanguera, la máquina puede rodar libremente con los frenos sueltos. Para la posición representada, se observa que el camión comprime 150 mm el resorte de constante $k = 15$ kN/m a consecuencia del chorro de agua horizontal que brota de la lanza cuando se activa la bomba. Si el diámetro de salida de la lanza es 30 mm, calcular la velocidad v del chorro cuando abandona la lanza. Hallar asimismo el momento adicional M que debe resistir la articulación A cuando la bomba está funcionando con la lanza en la posición indicada.

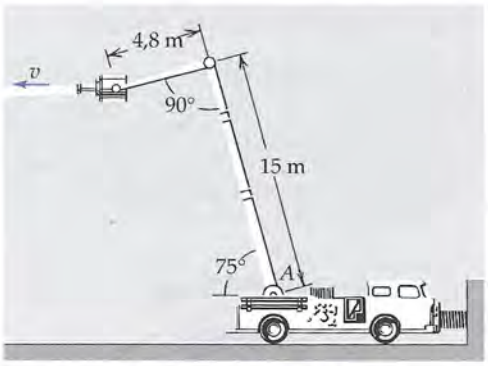


Figura problema 4.50

4.51 La bomba de avenamiento tiene una masa total de 310 kg y bombea un caudal de 0,125 m^3/s de agua dulce contra una altura de 6 m. Hallar la fuerza vertical R que se desarrolla entre la base de apoyo y la brida de la bomba A durante el funcionamiento de ésta. La masa de agua contenida en la bomba puede suponerse equivalente a una columna de 200 mm de diámetro y 6 m de altura.

Resp. $R = 5980$ N

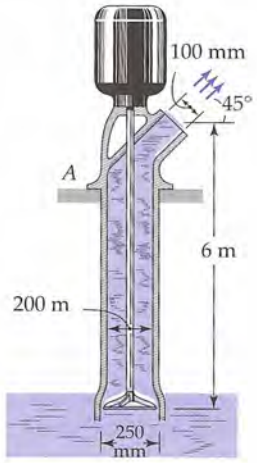


Figura problema 4.51

4.52 La tubería de retorno descarga a la atmósfera un caudal constante de 0,050 m^3/s de agua de mar (densidad, 1030 kg/m^3). En la sección A, la presión estática del agua es de 70 kPa por encima de la atmosférica. La sección en A tiene una área de 12 500 mm^2 y en las dos salidas las secciones son de 2000 mm^2. Si los seis pernos de las bridas de acoplamiento se aprietan todos con una llave dinamométrica de tal modo que cada uno soporta una tracción de 750 N, hallar la presión media p que soporta la junta de las bridas. La superficie de brida en contacto con la junta es 10 000 mm^2. Hallar también el momento flector M en la sección A de la tubería si se bloquea la descarga izquierda y el caudal se reduce a la mitad. Se desprecian el peso de la tubería y el agua que ésta contiene.

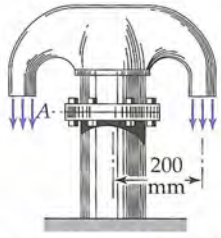


Figura problema 4.52

4.53 El helicóptero de la figura tiene una masa m y se mantiene suspendido en el aire al comunicar una cantidad de movimiento hacia abajo a una columna de aire definida por el límite del rotor según se indica en la figura. Hallar la velocidad v hacia abajo dada al aire por el rotor en una sección del chorro por debajo de él, en donde la presión es la atmosférica y el radio del chorro es r. Hallar también la potencia P que debe desarrollar el motor. Despréciese la energía de rotación del aire,

http://gratislibrospdf.com/

cualquier elevación de temperatura debida al rozamiento con el aire y cualquier variación de la densidad ρ del aire.

Resp. $v = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{mg}{\pi\rho}}$, $P = \frac{mg}{2r}\sqrt{\frac{mg}{\pi\rho}}$

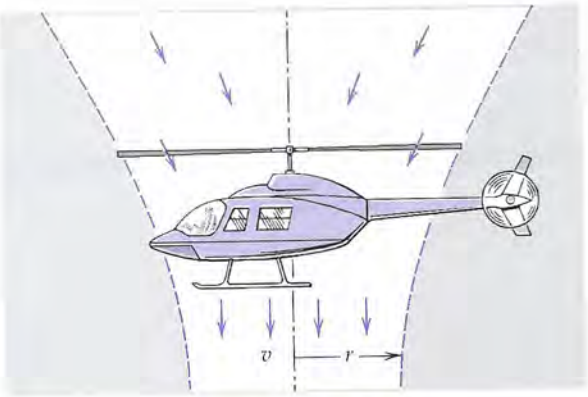


Figura problema 4.53

4.54 El aire penetra en el tubo por A a razón de 6 kg/s a una presión indicada de 1400 kPa y sale por el silbato a la presión atmosférica a través de la abertura B. La velocidad con que penetra el aire por A es de 45 m/s y la de escape por B es de 360 m/s. Calcular la tensión T, la fuerza cortante Q y el momento flector M en la sección A del tubo. El área de flujo efectivo en A es 7500 mm^2.

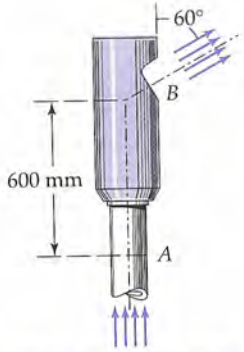


Figura problema 4.54

4.55 La boca de incendios se ensaya sometiendo la columna a una alta presión de 800 kPa. El caudal total es de 0,280 m^3/s. Este se divide a partes iguales entre las dos salidas, de 3800 mm^2 de sección cada una. La sección transversal de la base de entrada es de 6,80(10^4) mm^2. Despreciar el peso de la boca y el agua que contiene y calcular la tensión T, la fuerza cortante V y el momento flector M en la base B de la columna. La densidad del agua es 1000 kg/m^3. La presión estática del agua al entrar por la base B es de 800 kPa.

Resp. $T = 53{,}0$ kN, $V = 0{,}691$ kN, $M = 2{,}48$ kN·m

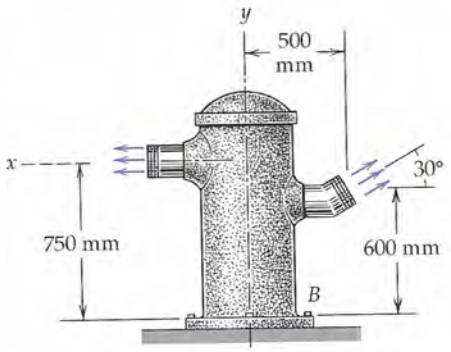


Figura problema 4.55

4.56 Una terminal marítima para descarga de trigo a granel está equipada de una tubería vertical dotada de una boquilla A que aspira el grano y lo traslada al depósito. Calcular las componentes x e y de la fuerza F necesaria para cambiar la cantidad de movimiento de la corriente de grano al doblar el codo. Identificar todas las fuerzas exteriormente aplicadas al codo y a la masa de su interior. El aire fluye por la tubería de 350 mm de diámetro con un caudal másico de 16 Mg por hora bajo una depresión de 250 mm de mercurio ($p = -30{,}7$ kPa) y arrastra consigo 135 Mg de trigo por hora a una velocidad de 40 m/s.

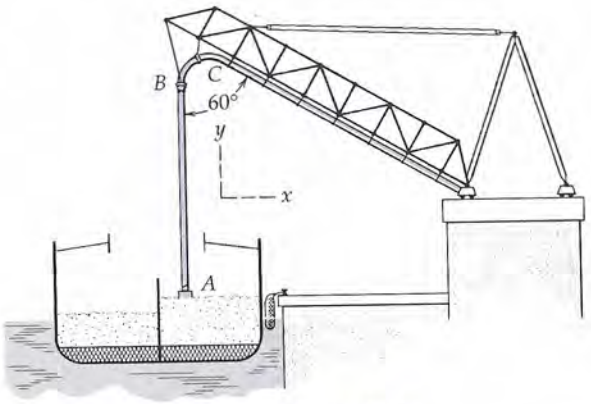


Figura problema 4.56

4.57 La soplante aspira aire por la abertura axial A con una velocidad v_1 y lo descarga a la presión y temperatura atmosféricas con una velocidad v_2 por el conducto B de 150 mm de diámetro. La máquina despacha 16 m^3 de aire por minuto con el motor y el ventilador funcionando a 3450 rpm. Si el motor con-

http://gratislibrospdf.com/

sume una potencia de 0,32 kW en vacío (ambos conductos cerrados), calcular la potencia P que consume funcionando normalmente.

Resp. $P = 0{,}671$ kW

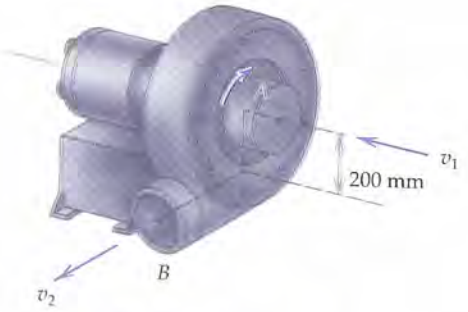


Figura problema 4.57

4.58 Se está examinando la viabilidad de una embarcación aérea monoplaza de despegue y aterrizaje vertical. El anteproyecto demanda un motor pequeño de alta relación potencia/peso que accione una bomba que introduzca aire por los conductos a 70°con una velocidad de entrada $v = 40$ m/s a una presión estática indicada de $-1{,}8$ kPa a través de las superficies de admisión de 0,1320 m^2 en total. El aire se descarga verticalmente hacia abajo con una velocidad $u = 420$ m/s. Para un pasajero de 90 kg, calcular la masa total máxima neta m que debe tener la máquina para que pueda despegar y mantenerse en el aire. (Véase la tabla D.1 para la densidad del aire.)

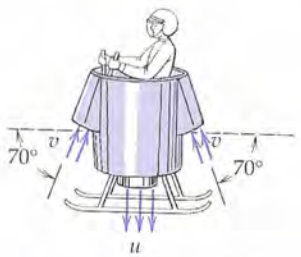


Figura problema 4.58

4.59 El reactor militar tiene una masa total de 10 Mg y está posado para despegar con los frenos aplicados mientras el motor aumenta de revoluciones hasta la máxima potencia. En esa situación aspira 48 kg/s de aire de densidad 1,206 kg/m^3 por los canales de entrada con una presión estática (indicada) de $-2{,}0$ kPa en las embocaduras de los canales. La sección transversal total de ambos canales de entrada (uno en cada costado) es 1,160 m^2. La relación aire/combustible es 18 y la velocidad del gas de escape u es 940 m/s con una contrapresión (indicada) nula en la tobera de escape. Calcular la aceleración inicial a del avión al soltar los frenos.

Resp. $a = 4{,}83$ m/s^2

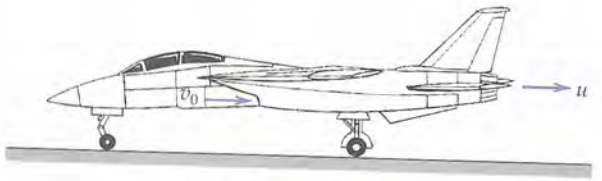


Figura problema 4.59

4.60 El avión militar de despegue y aterrizaje vertical es capaz de elevarse verticalmente bajo la acción de su chorro de escape, el cual puede orientarse desde $\theta \cong 0$ para despegar y suspenderse hasta $\theta = 90°$ para volar normalmente. A plena carga, el avión tiene una masa de 8600 kg. Bajo la potencia máxima al despegue, su motor turbofán consume 90 kg/s de aire y tiene una relación aire/combustible de 18. La velocidad del gas de escape es 1020 m/s con una presión esencialmente igual a la atmosférica en las toberas de escape. Por los canales de admisión se aspira aire de 1,206 kg/m^3 de densidad a una presión (indicada) de -2 kPa en la sección total de entrada de 1,10 m^2. Hallar el ángulo θ para despegue vertical y la correspondiente aceleración vertical a_y del avión.

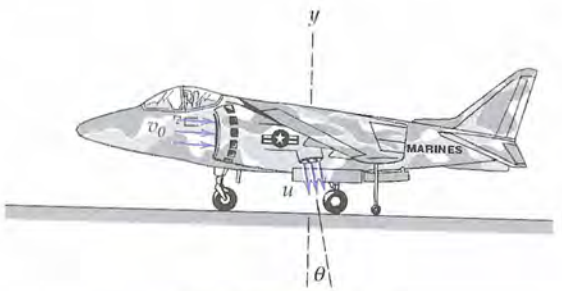


Figura problema 4.60

4.61 La soplante es accionada por el motor eléctrico que hace girar al impulsor a 3450 rpm y lanza por la salida C de 150 mm de diámetro un caudal de aire de 24 m^3/min. El aire penetra en la máquina en el sentido y negativo con una densidad de 1,206 kg/m^3. El conjunto de soplante y su motor eléctrico tiene una masa de 30 kg, con el centro de masa en G, exactamente encima del centro entre los pernos de anclaje A y B. Calcular la fuerza vertical total que sufren los soportes A y B.

Resp. $A = 159{,}0$ N, $B = 135{,}3$ N

http://gratislibrospdf.com/

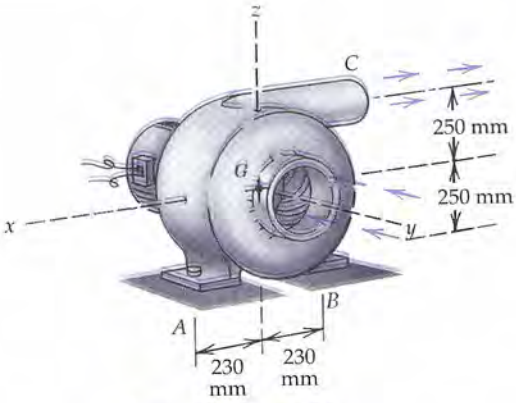


Figura problema 4.61

▶ 4.62 Un aspersor gira a la velocidad angular constante ω y distribuye un volumen de agua Q por unidad de tiempo. Cada una de las cuatro boquillas tiene una sección de salida A. Escribir la expresión del momento M aplicado al árbol del surtidor necesario para mantener la rotación. Para una presión dada y por tanto, un gasto Q, ¿cuál debe ser la velocidad ω_0 del aspersor si no se aplica momento alguno? La densidad del agua es ρ.

$$Resp.\ M = \rho Q\left[\frac{Qr}{4A} - (r^2 + b^2)\omega\right]$$

$$\omega_0 = \frac{Qr}{4A(r^2 + b^2)}$$

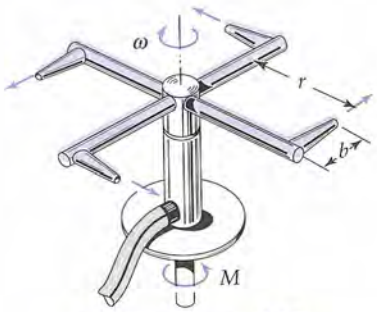


Figura problema 4.62

▶ 4.63 Se representa aquí una sección longitudinal de la boquilla de succión A de la descargadora de trigo del problema 4.56. El tubo externo está unido al interno por varios nervios longitudinales que no estorban el flujo de aire. En el tubo interno se mantiene una depresión de 230 mm de mercurio ($p = -30{,}7$ kPa, indicada) y en la parte inferior del tubo externo se mantiene la presión atmosférica ($p = 0$). Entre el espacio de ambos tubos se aspira aire de densidad 1,206 kg/m^3 a razón de 16 Mg por hora, a la presión atmosférica, el cual arrastra consigo 135 Mg por hora de grano con una velocidad de 40 m/s tubo arriba. Si la boquilla, situada por debajo de la sección A-A, tiene una masa de 30 kg, calcular la compresión C en el empalme A-A.

Resp. $C = 265$ N

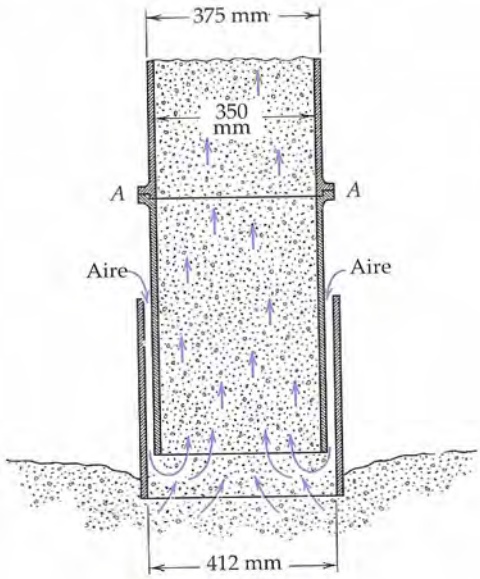


Figura problema 4.63

▶ 4.64 La bomba centrífuga trasiega 20 m^3 de agua dulce por minuto con unas velocidades de entrada y salida de 18 m/s. Al impulsor se le hace girar en sentido horario a 900 rpm mediante un motor de 40 kW. Estando la bomba llena pero sin girar, las reacciones verticales en C y D son de 250 N cada una. Calcular las reacciones de la base de la bomba sobre C y D. Las tensiones en los tubos de unión en A y B están equilibradas por las respectivas fuerzas debidas a la presión estática del agua. (*Sugerencia*: Aislar la bomba completa y el agua contenida en su interior entre las secciones A y B y aplicar el teorema de la cantidad de movimiento al sistema total.)

Resp. $C = 4340$ N (hacia arriba),
$D = 3840$ N (hacia abajo)

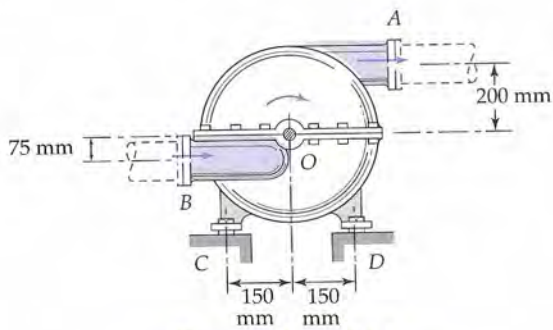


Figura problema 4.64

http://gratislibrospdf.com/

▶ **4.65** En la figura puede verse un detalle del diafragma *A* de la tobera estacionaria y las paletas giratorias *B* de una turbina de gas. Los productos de la combustión pasan a través de las paletas fijas del diafragma montadas a un ángulo de 27° e inciden sobre las paletas móviles del rotor. Los ángulos que se indican se han tomado para que la velocidad del gas relativa a la paleta móvil forme a la entrada el ángulo de 20° para turbulencia mínima, correspondiente a una velocidad media de las paletas de 315 m/s a un radio de 375 mm. Si el caudal de gas, rebasadas las paletas, es de 15 kg/s, determinar la potencia útil teórica *P* de la turbina. Despréciense los rozamientos mecánico y fluido con las correspondientes pérdidas de energía térmica, y supóngase que todos los gases se desvían por las superficies de las paletas con una velocidad relativa a la paleta de módulo constante.

Resp. $P = 1{,}197$ MW

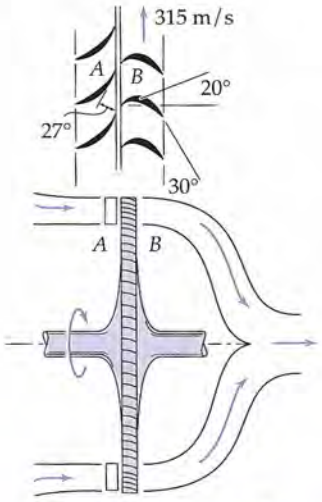


Figura problema 4.65

▶ **4.66** En la figura puede verse una turbina de central hidroeléctrica que funciona con una columna estática de agua igual a 300 m en cada una de sus seis toberas y gira a 270 rpm. Cada conjunto de rueda y generador debe desarrollar una potencia útil de 22 000 kW. El rendimiento del generador puede considerarse igual a 0,90 y puede esperarse que el rendimiento de conversión de la energía cinética de los chorros de agua en energía suministrada por la turbina sea de 0,85. La velocidad periférica media de la rueda para rendimiento máximo es, aproximadamente, el 47% de la velocidad del chorro. Si cada álabe tiene la forma indicada en la figura, determinar el diámetro *d* del chorro y el diámetro *D* de la rueda necesarios para las anteriores condiciones. Supóngase que el agua actúa sobre el álabe que esté tangente a cada uno de los chorros.

Resp. $d = 165{,}3$ mm, $D = 2{,}55$ m

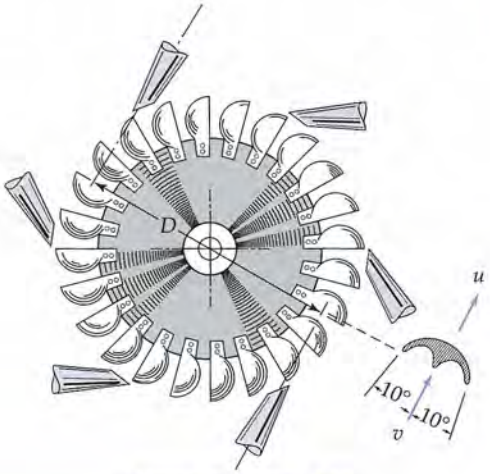


Figura problema 4.66

4.7 MASA VARIABLE

En el apartado 4.4 se han extendido las ecuaciones que describen el movimiento de un punto material para incluir un sistema de puntos materiales. En ese apartado, tal extensión nos llevó a las expresiones de carácter totalmente general $\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$, $\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ y $\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$, que son las ecuaciones 4.6, 4.7 y 4.9, respectivamente. Al deducir estas ecuaciones los sumatorios comprendían un número fijo de puntos materiales, por lo que la masa del sistema estudiado era constante. En el apartado 4.6 se extendieron esos principios mediante las ecuaciones 4.18 y 4.19 para describir la acción de las fuerzas que se ejercen sobre un sistema definido por un volumen geométrico atravesado por un flujo másico estacionario. La masa existente en el interior del volumen considerado era, por tanto, constante respecto al tiempo y, por ello, pudieron emplearse las ecuacio-

http://gratislibrospdf.com/

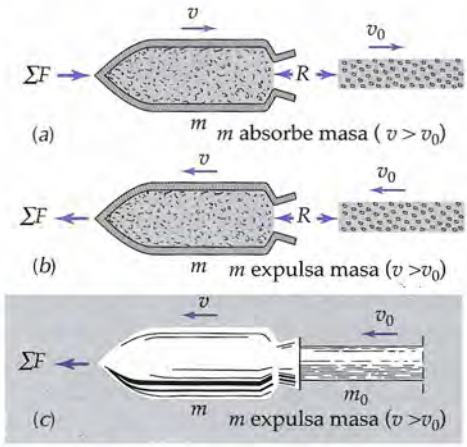


Figura 4.6

nes 4.6, 4.7 y 4.9. Cuando la masa interior al contorno de un sistema que se considere no sea constante con el tiempo, las relaciones anteriores dejan de tener validez.[1]

Ahora vamos a desarrollar la ecuación del movimiento de un sistema cuya masa varíe con el tiempo. Para este caso simplificado consideremos, primeramente, un cuerpo (fig. 4.6*a*) que gane masa al absorber y expulsar una corriente de materia. La masa del cuerpo y su velocidad, en un instante cualquiera, son m y v, respectivamente. Se supone que la corriente de materia se mueve en la misma dirección y sentido que m con una velocidad constante v_0 inferior a v. En virtud de la ecuación 4.18, la fuerza ejercida por m sobre las partículas de la corriente para acelerarlas desde una velocidad v_0 hasta otra velocidad mayor v es $R = m'(v - v_0) = \dot{m}u$, donde el aumento de m por unidad de tiempo es $m' = \dot{m}$ y donde u es la velocidad relativa con que se aproximan a m las partículas. Aparte de R, designaremos por ΣF a todas las fuerzas que se ejerzan sobre m en la dirección de su movimiento. La ecuación del movimiento de m según la segunda ley de Newton es, por tanto, $\Sigma F - R = m\dot{v}$; o sea,

$$\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u \qquad (4.20)$$

Análogamente, si el cuerpo pierde masa expulsándola a una velocidad v_0 inferior a v (fig. 4.6*b*), la fuerza R necesaria para desacelerar las partículas desde una velocidad v hasta otra inferior v_0 es $R = m'(-v_0 - [-v]) = m'(v - v_0)$. Ahora bien, $m' = -\dot{m}$, ya que m disminuye. Además, la velocidad relativa con que las partículas abandonan m es $u = v - v_0$. Así pues, la fuerza R se hace $R = -\dot{m}u$. Si ΣF representa la resultante de todas las demás fuerzas que se ejercen sobre m en la dirección de su movimiento, la segunda ley de Newton exige que $\Sigma F + R = m\dot{v}$ o sea,

$$\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u$$

1 En Mecánica relativista la masa resulta ser función de la velocidad, y su derivada respecto al tiempo tiene un significado diferente al que tiene en Mecánica newtoniana.

http://gratislibrospdf.com/

que es la misma relación que se obtuvo en el caso en que m ganaba masa. Por tanto, la ecuación 4.20 puede utilizarse como ecuación del movimiento de m tanto si gana como si pierde masa.

Es frecuente cometer el error de expresar la suma parcial de fuerzas ΣF en la forma

$$\Sigma F = \frac{d}{dt}(mv) = m\dot{v} + \dot{m}v$$

De los análisis anteriores se ve que esta derivación directa de la cantidad de movimiento da la fuerza correcta ΣF *únicamente* cuando el cuerpo capta masa inicialmente en reposo o cuando la expulsa con una velocidad absoluta nula. En ambos casos, $v_0 = 0$ y $u = v$.

La ecuación 4.20 puede también obtenerse por derivación directa de la cantidad de movimiento a partir de la relación fundamental $\Sigma F = \dot{G}$ con tal que se tome un sistema adecuado de masa total constante. Para explicar esto, tomaremos el caso en que m pierde masa; la figura 4.6*c* muestra el sistema constituido por m y una porción arbitraria m_0 de la corriente de masa expulsada. La masa de este sistema es $m + m_0$ y es constante. La corriente de masa expulsada se supone que se mueve sin perturbación una vez separada de m y que la única fuerza exterior al sistema total es ΣF, que está aplicada directamente a m como antes. La reacción $R = -\dot{m}u$ es interior al sistema y no se ha representado. Con masa total constante es aplicable el principio de la cantidad de movimiento $\Sigma F = \dot{G}$ y queda

$$\Sigma F = \frac{d}{dt}(mv + m_0v_0) = m\dot{v} + \dot{m}v + \dot{m}_0v_0 + m_0\dot{v}_0$$

Evidentemente $\dot{m}_0 = -\dot{m}$, y la velocidad de la masa expulsada respecto a m es $u = v - v_0$. Además $\dot{v}_0 = 0$, puesto que m_0 se mueve sin perturbación con aceleración nula una vez libre de m. Así pues, la relación queda en la forma

$$\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u$$

que es igual al resultado de la formulación anterior.

El caso en que m pierde masa es característico de la propulsión cohete. En la figura 4.7*a* puede verse un cohete en ascenso vertical, cuyo sistema es la masa interior al volumen definido por la superficie exterior del cohete y el plano de salida a través de la tobera. El diagrama para sólido libre presenta como exteriores a ese sistema los valores instantáneos de la atracción de la gravedad mg, la resistencia aerodinámica R y la fuerza pA debida a la presión estática media a través del plano de salida a través de la tobera de área A. Además, la circulación de masa por unidad de tiempo es $m' = -\dot{m}$. Así pues, la ecuación del movimiento del cohete $\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u$ podemos escribirla en la forma $pA - mg - R = m\dot{v} + \dot{m}u$; o sea,

$$m'u + pA - mg - R = m\dot{v} \qquad (4.21)$$

La ecuación 4.21 es de la forma "$\Sigma F = ma$", donde el primer término de "ΣF" es el empuje $E = m'u$. Así pues, el cohete puede simularse mediante un cuerpo al cual se aplique un empuje exterior E (fig. 4.7*b*) y el problema puede en-

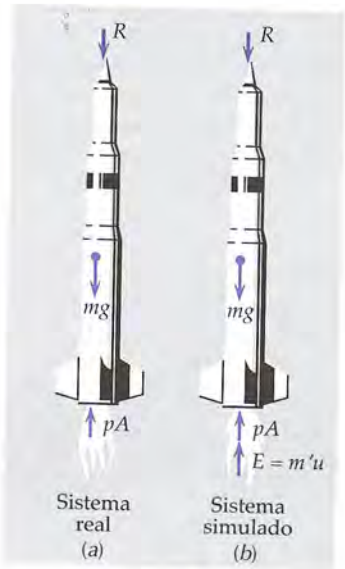


Figura 4.7

http://gratislibrospdf.com/

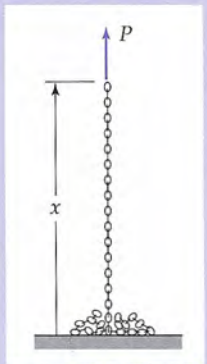
tonces estudiarse como cualquier otro problema de $F = ma$, con la salvedad de que m es función del tiempo.

Puede observarse que, durante las etapas iniciales del movimiento en las que el valor de la velocidad v del cohete es inferior a la velocidad relativa de expulsión u, la velocidad absoluta v_0 de los gases expulsados estará dirigida hacia atrás. En cambio, cuando el cohete alcance una velocidad v cuyo valor sea mayor que u, la velocidad absoluta v_0 de los gases expulsados estará dirigida hacia adelante. Para una circulación dada de masa por unidad de tiempo, el empuje E del cohete sólo depende de la velocidad relativa de expulsión u y no del valor ni del sentido de la velocidad absoluta v_0 de los gases expulsados.

En este estudio de los cuerpos de masa variable con el tiempo hemos supuesto que todos los elementos de la masa m del cuerpo se movían a la misma velocidad v en todo instante y que las partículas que el cuerpo ganaba o perdía sufrían una transición de velocidad brusca al penetrar o abandonar el cuerpo. Por ello, esa variación de velocidad se ha representado mediante una discontinuidad matemática, pero en la realidad, esa variación de velocidad no puede ser discontinua aun cuando la transición pueda ser muy rápida. En el caso de un cohete, por ejemplo, la variación de velocidad tiene lugar en el espacio comprendido entre la zona de combustión y el plano de salida de la tobera de escape. Un estudio más general de la dinámica de masas variables elimina esta limitación que supone la discontinuidad en la variación de la velocidad e introduce una pequeña corrección en la ecuación 4.20.

PROBLEMA TIPO 4.9

El extremo de una cadena de longitud L y masa ρ por unidad de longitud, que está apilada sobre una plataforma, se eleva verticalmente a velocidad constante v mediante una fuerza variable P. Hallar P en función de la altura x del extremo sobre la plataforma. Hallar, además, la energía perdida durante la ascensión de la cadena.



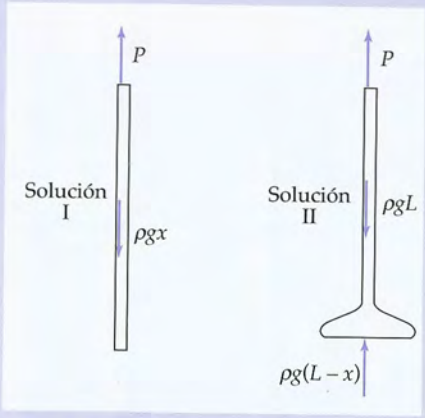
Solución I (método de la masa variable). Utilizaremos la ecuación 4.20 para aplicarla a la porción móvil de la cadena, de longitud x, cuya masa aumenta. El sumatorio ΣF de las fuerzas incluye a todas las que actúan sobre la porción móvil, salvo la ejercida por los puntos materiales que en cada instante están en el sistema. Del diagrama resulta

$$\Sigma F_x = P - \rho g x$$

http://gratislibrospdf.com/

La velocidad es constante y por tanto $\dot{v} = 0$. El aumento de masa por unidad de tiempo es $\dot{m} = \rho v$ y la velocidad relativa con que los puntos materiales se agregan a la porción móvil es $u = v - 0 = v$. Así pues, la ecuación 4.20 se hace

(1) $$[\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u] \qquad P - \rho g x = 0 - \rho v(v) \qquad P = \rho(gx + v^2) \qquad \textit{Resp.}$$



Vemos así que la fuerza P se compone de dos partes: ρgx, peso de la porción móvil de la cadena, y ρv^2, que es la fuerza adicional para cambiar la cantidad de movimiento de los eslabones de la plataforma desde su estado de reposo hasta la velocidad v.

Solución II (método de la masa constante). Aplicaremos a toda la cadena el teorema de la cantidad de movimiento para un sistema de puntos materiales expresado por la ecuación 4.6, considerando toda la cadena como un sistema de masa constante. El diagrama para sólido libre de éste presenta la fuerza desconocida P, el peso total de todos los eslabones ρgL y la fuerza $\rho g(L - x)$ que ejerce la plataforma sobre los eslabones que se hallan en reposo sobre ella. La cantidad de movimiento del sistema para una posición cualquiera es $G_x = \rho x v$ y la ecuación de la cantidad de movimiento da

(2) $$\left[\Sigma F_x = \frac{dG_x}{dt}\right] \qquad P + \rho g(L - x) - \rho g L = \frac{d}{dt}(\rho x v) \qquad P = \rho(gx + v^2) \quad \textit{Resp.}$$

Vemos otra vez que la fuerza P es igual al peso de la porción de cadena que ha abandonado la plataforma más el término adicional que tiene en cuenta el aumento por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento de la cadena.

Energía perdida. Cada eslabón situado en la plataforma adquiere su velocidad repentinamente a través de un choque con el eslabón inmediatamente superior a él y que lo separa de la plataforma. Esta sucesión de choques origina una pérdida de energía ΔE. El teorema de las fuerzas vivas puede escribirse $U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta E$.

$$U'_{1\text{-}2} = \int P\,dx = \int_0^L (\rho g x + \rho v^2)\,dx = \tfrac{1}{2}\rho g L^2 + \rho v^2 L$$

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}\rho L v^2 \qquad \Delta V_g = \rho g L \frac{L}{2} = \tfrac{1}{2}\rho g L^2$$

Al aplicar estos valores en el teorema de las fuerzas vivas resulta

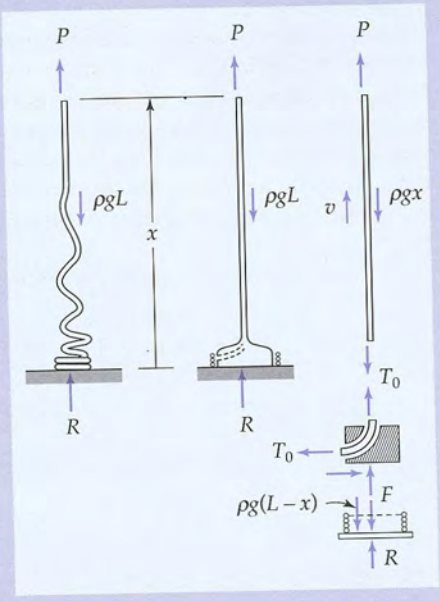
$$\tfrac{1}{2}\rho g L^2 + \rho v^2 L = \tfrac{1}{2}\rho L v^2 + \tfrac{1}{2}\rho g L^2 + \Delta E \qquad \Delta E = \tfrac{1}{2}\rho L v^2 \qquad \textit{Resp.}$$

(1) En el modelo de la figura 4/6*a* se ve la masa que se agrega al extremo de cabeza de la porción móvil. En el caso de la cadena, la masa se añade al extremo de cola, pero el efecto es el mismo.

(2) Hay que prestar atención para no aplicar la ecuación $\Sigma F = \dot{G}$ a sistemas cuya masa varíe. Por ello, el sistema en nuestro caso presente es toda la cadena ya que su masa es constante.

http://gratislibrospdf.com/

Sustituir la cadena de eslabones sueltos del problema tipo 4.9 por una cuerda flexible e inextensible o una cadena de tipo de bicicleta de longitud L y masa ρ por unidad de longitud. Determinar la fuerza P necesaria para elevar el extremo de la cuerda a la velocidad constante v y la correspondiente reacción R entre el arrollamiento y la plataforma.



Solución. En la ilustración de la izquierda se representa el diagrama para sólido libre del arrollamiento y la porción móvil del arrollamiento. A causa de una cierta resistencia a la flexión que ofrecerá la cuerda y de algo de movimiento lateral, la transición desde el reposo hasta la velocidad vertical v tendrá lugar a lo largo de un trecho apreciable de la cuerda. No obstante, suponemos primero que todos los elementos en movimiento poseen la misma velocidad, por lo que si aplicamos la ecuación 4.6 resulta

(1) Un flexibilidad perfecta no admitiría resistencia alguna a la flexión.

$$\left[\Sigma F_x = \frac{dG_x}{dt}\right] \qquad P + R - \rho g L = \frac{d}{dt}(\rho x v) \qquad P + R = \rho v^2 + \rho g L$$

(2)

(2) Recuérdese que v es constante y que es igual a $\dot{x}$. Adviértase también que esta misma relación es válida para la cadena del problema tipo 4.9.

Suponemos adicionalmente que todos los elementos de cuerda contenidos en el arrollamiento se hallan en reposo sobre la plataforma y que no ejerce sobre ella más fuerza que su propio peso, por lo que $R = \rho g(L - x)$. Aplicando esta relación en la anterior tenemos

$$P + \rho g(L - x) = \rho v^2 + \gamma g L \qquad \text{o sea} \qquad P = \rho v^2 + \rho g x$$

(3)

(3) Este término adicional no tenido en cuenta en la energía cinética es exactamente igual a la energía que pierde la cadena durante el choque de sus eslabones.

resultado que coincide con el obtenido en el problema tipo 4.9 anterior.

El trabajo total de P sobre la cuerda es

$$U'_{1\text{-}2} = \int P\, dx = \int_0^x (\rho v^2 + \rho g x)\, dx = \rho v^2 x + \tfrac{1}{2}\rho g x^2$$

Aplicando estos valores en el teorema de las fuerzas vivas resulta

$$[U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta V_g] \qquad \rho v^2 x + \tfrac{1}{2}\rho g x^2 = \Delta T + \rho g x \frac{x}{2} \qquad \Delta T = \rho x v^2$$

http://gratislibrospdf.com/

(3) que es el doble de la energía cinética $\frac{1}{2}\rho x v^2$ del movimiento vertical. Es decir, hay una cantidad igual de energía que no se tiene en cuenta. Esta conclusión está en total discordancia con nuestra hipótesis de movimiento monodimensional en la dirección x.

Al objeto de conseguir un modelo monodimensional que retenga la propiedad de inextensibilidad atribuida a la cuerda, es necesario imponer una ligadura física en la base, tal que guíe a la cuerda hasta que ésta se halle en movimiento (4) vertical, pero que a la vez garantice una transición suave desde el reposo hasta una velocidad vertical v sin pérdida de energía. En la ilustración del centro se representa el diagrama para sólido libre de toda la cuerda con la guía añadida cuyo esquema puede verse en la ilustración central del diagrama para sólido libre de la derecha.

Para un sistema conservativo, el teorema de las fuerzas vivas da

(5)
$$[dU' = dT + dV_g] \qquad P\,dx = d(\tfrac{1}{2}\rho x v^2) + d\left(\rho g x \frac{x}{2}\right)$$

$$P = \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g x$$

Y aplicando estos valores en el teorema de la cantidad de movimiento resulta

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g x + R = \rho v^2 + \rho g L \qquad R = \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g (L - x)$$

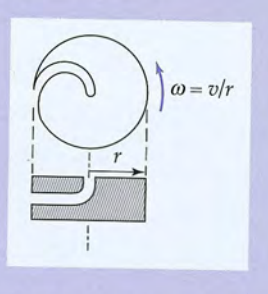
Pese a que esta fuerza, que excede en $\frac{1}{2}\rho v^2$ al peso, es experimentalmente irreal, estará presente en el modelo ideal.

El equilibrio del tramo vertical requiere

$$T_0 = P - \rho g x = \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g x - \rho g x = \tfrac{1}{2}\rho v^2$$

Como es necesaria una fuerza de ρv^2 para cambiar la cantidad de movimiento de los elementos de la cuerda, la guía limitadora debe proporcionar lo que falta, $F = \frac{1}{2}\rho v^2$, que, a su vez, es transmitido a la plataforma.

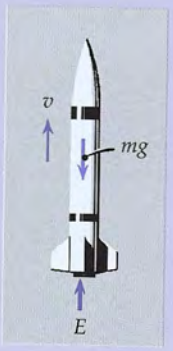
(4) Esta guía limitadora podríamos imaginarla como si fuera una especie de receptáculo de masa despreciable que rotase dentro del arrollamiento con una velocidad angular v/r y conectado por el eje a la plataforma. Al girar, alimenta de cuerda al tramo en movimiento vertical, haciendo que los elementos de cuerda pasen del reposo a moverse verticalmente con una velocidad v, tal como se indica en la figura adjunta.



(5) Téngase en cuenta que el centro de masa del trozo de longitud x estará a una distancia $x/2$ por encima de la base.

PROBLEMA TIPO 4.11

En el polo norte se dispara verticalmente un cohete de masa inicial m_0 que se acelera hasta agotar el combustible, el cual se consume a velocidad constante. La velocidad en tobera del gas expulsado tiene un valor constante u y durante todo el vuelo sale el gas por la tobera a la presión atmosférica. Si es m_b la masa residual del cohete con su maquinaria cuando se agota el combustible, hallar la expresión de la velocidad máxima que alcanza el cohete. Se desprecian la resistencia atmosférica y la variación de la gravedad con la altura.



http://gratislibrospdf.com/

Solución I (solución F = ma). Adoptamos el planteamiento que se ilustra en la figura y tratamos el empuje como si fuera una fuerza exterior aplicada al cohete. Despreciando la contrapresión p en la tobera y la resistencia atmosférica R, la segunda ley de Newton, o sea, la ecuación 4.21, nos da (1)

$$E = mg = m\dot{v}$$

Pero el empuje es $E = m'u = -\dot{m}u$, y entonces la ecuación del movimiento queda

$$-\dot{m}u - mg = m\dot{v}$$

Multiplicando por dt, dividiendo por m y ordenando los términos resulta

$$dv = -u\frac{dm}{m} - g\,dt$$

que ya presenta una forma integrable. La velocidad v correspondiente al tiempo t viene dada por la integral

$$\int_0^v dv = -u\int_{m_o}^{m}\frac{dm}{m} - g\int_0^t dt$$

o sea

$$v = u\ln\frac{m_0}{m} - gt$$

Como el combustible se quema a razón constante de masa $m' = -\dot{m}$ por unidad de tiempo, la masa en un instante cualquiera t es $m = m_0 + \dot{m}t$. Si es m_b la masa del cohete en el momento en que se agota el combustible, el instante en que tiene lugar el agotamiento del combustible será $t_b = (m_b - m_o)/\dot{m} = (m_o - m_b)/(-\dot{m})$. Este instante corresponde al de velocidad máxima y ésta será (2)

$$v_{\max} = u\ln\frac{m_0}{m_b} + \frac{g}{\dot{m}}(m_0 - m_b) \qquad \textit{Resp.}$$

La cantidad $\dot{m}$ es negativa, ya que la masa disminuye con el tiempo.

Solución II (masa variable). Si empleamos la ecuación 4.20, será $\Sigma F = -mg$ y la ecuación quedará

$$[\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u] \qquad -mg = m\dot{v} + \dot{m}u$$

Pero $\dot{m}u = -m'u = -E$ y entonces la ecuación del movimiento se convierte en

$$E - mg = m\dot{v}$$

igual a la planteada en la *Solución I*.

(1) En una primera aproximación, despreciar la resistencia atmosférica no es una hipótesis incorrecta, por cuanto la velocidad de ascenso del cohete es menor en la zona densa de la atmósfera y mayor en la zona enrarecida. Además, a 320 km de altitud la aceleración de la gavedad es el 91% de la existente en la superficie terrestre.

(2) Se ha supuesto un lanzamiento vertical desde el polo norte únicamente para eliminar las complicaciones que supone la rotación terrestre al representar la trayectoria absoluta del cohete.

http://gratislibrospdf.com/

Problemas introductorios

4.67 El cohete Saturno V tiene una masa de $2{,}7(10^3)$ Mg aproximadamente. En el momento del lanzamiento el combustible se quema a razón de 13 Mg/s y en la tobera los gases tienen una velocidad de escape de 2400 m/s. Calcular la aceleración inicial del cohete. Suponer que en el plano de salida de la tobera de escape reina la presión atmosférica.

Resp. $a = 1{,}746$ m/s^2

4.68 Cuando, en su trayectoria, el cohete alcanza la posición representada, tiene una masa de 3 Mg y se halla fuera de los efectos de la atmósfera terrestre. La aceleración gravitatoria vale 9,60 m/s^2. El combustible es quema a razón de 130 kg/s y la velocidad de escape, relativa a la tobera, es 600 m/s. Calcular las componentes n y t de la aceleración del cohete.

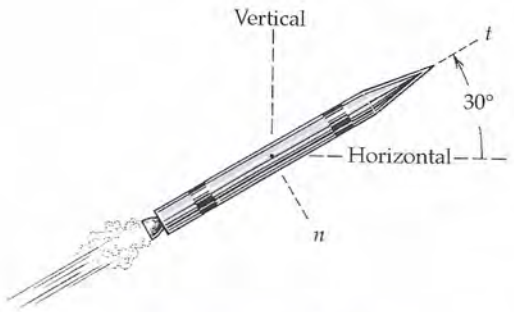


Figura problema 4.68

4.69 A plena carga, un autocuba para la limpieza de calles tiene una masa total de 10 Mg. Con el rociador conectado, de la boquilla mana un caudal de agua de 40 kg/s a una velocidad de 20 m/s relativa al vehículo y bajo el ángulo indicado de 30°. Si el vehículo ha de acelerar a razón de 0,6 m/s^2, al arrancar sobre una calzada horizontal, hallar la fuerza de tracción P necesaria entre los neumáticos y la calzada cuando (*a*) el rociador funciona y (*b*) el rociador no funciona.

Resp. (*a*) $P = 5{,}31$ kN, (*b*) $P = 6{,}00$ kN

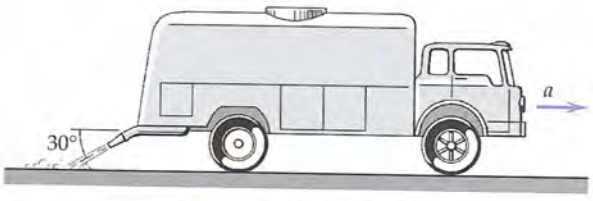


Figura problema 4.69

4.70 Un depósito, cuya masa vacío es de 50 kg, es impulsado hacia la izquierda por una fuerza P y recoge agua dulce de una corriente que fluye en sentido contrario con una velocidad de 1,5 m/s. La boca de recogida tiene una entrada de 2000 mm^2 y el agua penetra por ella con una velocidad igual a la de la boca respecto a la corriente. Hallar la fuerza P en el instante en que se han admitido 80 kg de agua y la velocidad y aceleración del depósito son, respectivamente, de 2 m/s y 0,4 m/s^2. Despreciar la pequeña presión debida al choque con la boca, necesaria para elevar el agua al depósito.

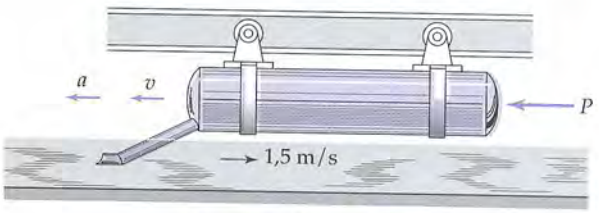


Figura problema 4.70

4.71 Un vagón carbonero tiene una masa vacío de 25 Mg y transporta una carga total de 90 Mg de carbón. Los contenedores están equipados con unas puertas de fondo que permiten descargar el carbón a través de unas aberturas entre los raíles. Si el vagón descarga carbón a razón de 10 Mg/s en dirección descendente relativa al vagón y si la resistencia al movimiento debida al rozamiento es de 20 N por megagramo de masa remanente, hallar la fuerza de enganche P necesaria para comunicarle una aceleración de 0,045 m/s^2 en la dirección y sentido de P en el instante en que se ha descargado la mitad del carbón.

Resp. $P = 4{,}55$ kN

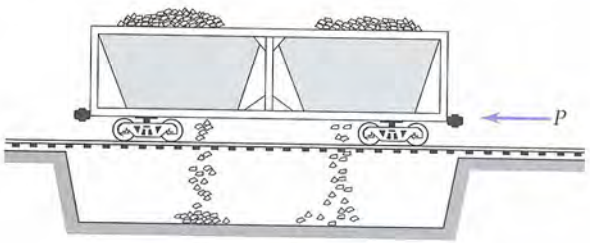


Figura problema 4.71

4.72 La masa m de una gota de lluvia aumenta a medida que recoge humedad durante su descenso en el seno de aire encalmado. Si la resistencia del aire al movimiento de la gota es R y su velocidad descendente es v, escribir la ecuación del movi-

http://gratislibrospdf.com/

miento de la gota y mostrar que la relación $\Sigma F = d(mv)/dt$ se cumple como caso particular de la ecuación para masa variable.

4.73 La lanzadera espacial, junto con su depósito de combustible central y dos cohetes de refuerzo, tiene una masa total de $2{,}04(10^3)$ Mg en el despegue. Los cohetes de refuerzo generan un empuje de $11{,}8(10^6)$ N y los tres motores principales del vehículo generan un empuje de $2{,}00(10^6)$ N cada uno. El impulso específico (cociente entre la velocidad de descarga de los gases y la aceleración gravitatoria) en cada uno de los tres motores principales es de 455 s. Calcular la aceleración vertical inicial a del conjunto con los cinco motores todos funcionando y hallar el consumo de combustible m', en kg/s, de cada uno de los tres motores de la lanzadera.

Resp. $a = 4{,}70$ m/s^2, $m' = 448$ kg/s

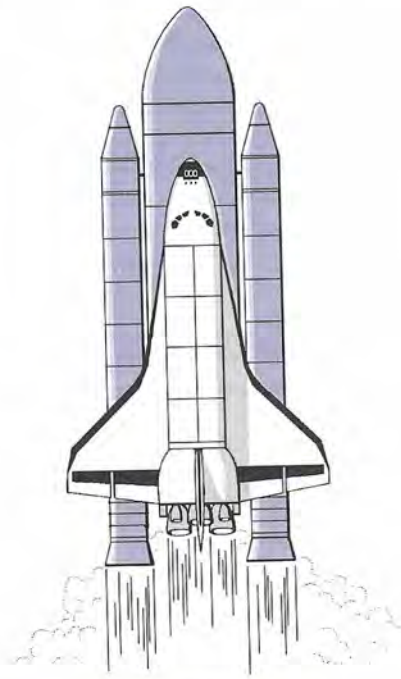


Figura problema 4.73

4.74 El brazo magnetométrico de un ingenio espacial se compone de un gran número de elementos triangulares que se expanden a su configuración desplegada cuando se liberan del receptáculo que los contiene y en cuyo interior se guardan plegados antes de la suelta. Escribir la expresión de la fuerza F, que la base del receptáculo debe ejercer sobre el brazo durante el despliegue de éste, en función de la longitud en aumento x y sus derivadas temporales. La masa del brazo por unidad de longitud desplegada es ρ. Supóngase que la base de apoyo en el ingenio espacial es una plataforma inmóvil y que el despliegue tiene lugar fuera de cualquier campo gravitatorio. Despréciese la cota b en comparación con x.

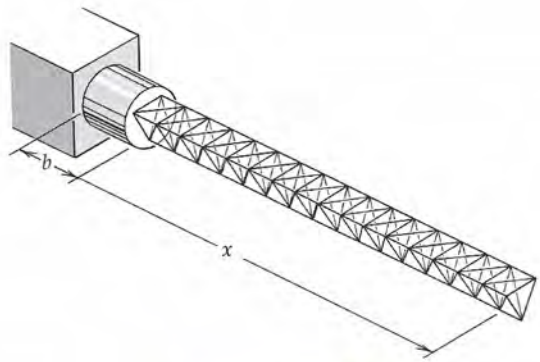


Figura problema 4.74

4.75 La masa inicial de un pequeño cohete es m_0. Se dispara verticalmente cerca de la superficie de la Tierra (g constante). Si la resistencia del aire es despreciable, determinar la forma en que debe variar la masa m del cohete en función del tiempo t después del lanzamiento para que el cohete en cuestión pueda tener una aceleración vertical constante a con una velocidad constante u de los gases de escape respecto a la tobera.

Resp. $m = m_0 e^{-\frac{a+g}{u}t}$

Problemas representativos

4.76 La masa del cohete en el lanzamiento es de 8,5 Mg/s. El consumo de combustible es 200 kg/s con una velocidad de descarga en tobera de 760 m/s. Calcular la aceleración inicial a del cohete en la rampa y hallar el ángulo θ que forma con la horizontal la aceleración del centro de masa un instante después de que el cohete abandone la rampa.

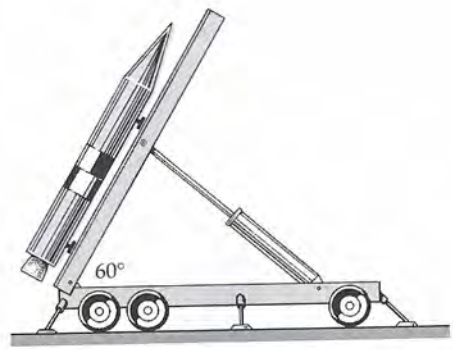


Figura problema 4.76

http://gratislibrospdf.com/

4.77 Bajo la acción de la fuerza P, el extremo superior de la cadena de longitud L y masa ρ por unidad de longitud desciende a la celeridad constante v. Determinar la lectura R de la báscula en función de x.

Resp. $R = \rho g x + \rho v^2$

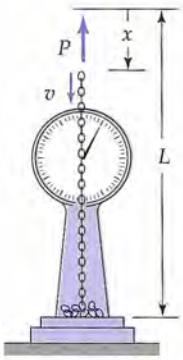


Figura problema 4.77

4.78 El extremo superior de la cadena de longitud L y masa ρ por unidad de longitud, se suelta partiendo del reposo con el extremo inferior tocando la plataforma de la báscula. Determinar la fuerza F que señala la báscula en función de la distancia x recorrida por el extremo superior. (*Comentario*: La cadena adquiere una velocidad de caída libre de $\sqrt{2gx}$, pues los eslabones que ya están en la báscula no ejercen fuerza alguna sobre los que están encima de ellos descendiendo todavía libremente. Resolver el problema por dos procedimientos: primero, calculando la variación por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento de la cadena completa y, segundo, considerando la fuerza F como compuesta por el peso de los eslabones en reposo sobre la báscula más la fuerza necesaria para desviar una corriente fluida equivalente.)

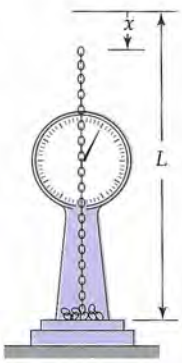


Figura problema 4.78

4.79 En una plataforma de prueba de cohetes el consumo de combustible m', en kilogramos por segundo, de un cohete instalado verticalmente se programa de manera que el empuje compense siempre la disminución de peso del cohete durante el ensayo. Si la masa inicial de cohete y combustible es de 6000 kg y la velocidad de descarga relativa es de 800 m/s, independientemente del consumo de combustible, hallar de qué modo debe variar m' con el tiempo t en segundos después del encendido. Hallar asimismo la masa m_f de combustible consumido en los primeros diez segundos.

Resp. $m' = 73{,}6e^{-0{,}0123t}$ kg/s, $m_f = 692$ kg

4.80 La figura representa la idealización de una estructura monodimensional de masa uniforme ρ por unidad de longitud que se mueve horizontalmente a una velocidad v_0 cuando choca con un obstáculo inamovible y se aplasta. La fuerza F requerida para mantener una deformación acordeonada es constante. Se desprecia la longitud b del tramo aplastado de la estructura en comparación con el desplazamiento s del tramo no deformado a partir del impacto. La parte aún no deformada puede considerarse como un cuerpo de masa decreciente. Deducir la ecuación diferencial que relaciona F con s, $\dot{s}$ y $\ddot{s}$ aplicando adecuadamente la ecuación 4.20. Comprobar el resultado aplicando la ecuación 4.6 a las dos porciones del cuerpo juntas como si fuera un cuerpo de masa constante.

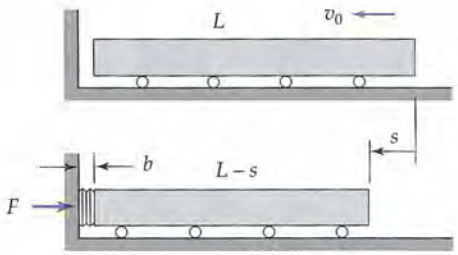


Figura problema 4.80

4.81 Se tira horizontalmente, con una fuerza constante P, del extremo de una cadena de eslabones independientes que está apilada y que tiene una masa ρ por unidad de longitud. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre la cadena y la superficie es μ_c, calcular la aceleración a de la cadena en función de x y $\dot{x}$.

Resp. $a = \dfrac{P}{\rho x} - \mu_c g - \dfrac{\dot{x}^2}{x}$

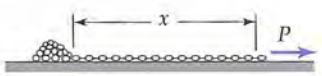


Figura problema 4.81

http://gratislibrospdf.com/

4.82 Una cadena de longitud $L = 8$ m y 48 kg de masa reposa sobre una superficie horizontal lisa cuando es doblada sobre ella misma aplicando una fuerza P al extremo A. (*a*) Calcular el valor de P necesario para comunicar a A una velocidad constante de 1,5 m/s. (*b*) Calcular la aceleración a del extremo A si $P = 20$ N y si $v = 1{,}5$ m/s cuando $x = 4$ m.

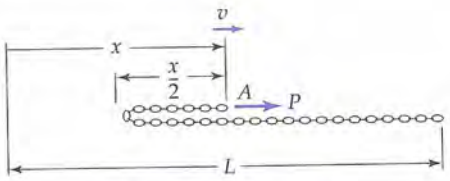


Figura problema 4.82

4.83 Mediante una fuerza P aplicada a su extremo A, se dobla sobre sí misma una cuerda ideal, o cadena de tipo bicicleta, de longitud L y masa ρ por unidad de longitud, que descansa sobre una superficie horizontal lisa. Su extremo B está unido a un soporte fijo. Hallar la fuerza P necesaria para que A adquiera una velocidad constante v. (*Sugerencia*: El efecto puede representarse intercalando un disco sin masa en la forma indicada en el esquema separado de la figura y haciendo luego igual a cero el radio de ese disco. Se demuestra fácilmente que las tensiones en los puntos C, D y B de la cuerda valen todas P en las condiciones ideales impuestas y a velocidad constante.)

Resp. $P = \rho v^2/4$

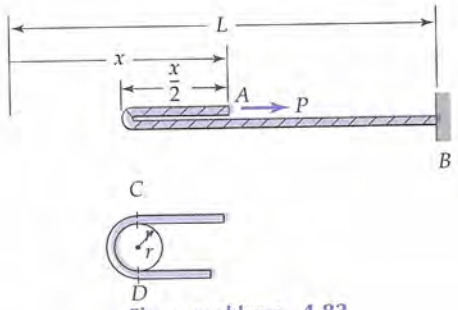


Figura problema 4.83

4.84 La cadena de longitud L y masa ρ por unidad de longitud se suelta a partir del reposo en $x = 0$ en el preciso instante en que la plataforma arranca también desde el reposo en $y = 0$ hacia arriba con una aceleración constante a. Hallar la fuerza total R ejercida sobre la plataforma por la cadena al cabo de t segundos de iniciado el movimiento.

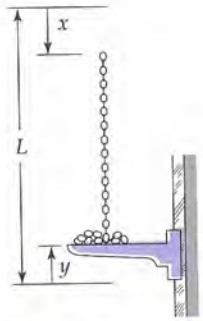


Figura problema 4.84

4.85 Una cadena de eslabones sueltos, de masa ρ por unidad de longitud, se abandona desde el reposo sobre el plano inclinado en la posición $x = 0$. Entre la cadena y el plano hay un coeficiente de rozamiento cinético μ_c. La cadena se amontona en un cubo situado al pie del plano. Hallar, en función de x, la fuerza R que debe irse ejerciendo sobre el cubo para sujetarlo contra la acción de la cadena. Se tendrá en cuenta que el último eslabón en movimiento al final del plano pierde contacto con el que inmediatamente le precede.

Resp. $R = \rho g x(3 \operatorname{sen} \theta - 2\mu_c \cos \theta)$

con $\mu_c < \operatorname{tg} \theta$

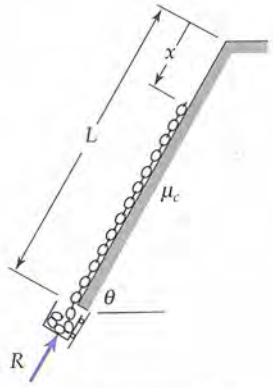


Figura problema 4.85

4.86 Una cadena de eslabones sueltos, de longitud $\pi r/2$ y masa ρ por unidad de longitud, se abandona desde el reposo en la posición $\theta = 0$ y se desliza hacia abajo por la guía circular lisa. La cadena se amontona al pie de la guía donde el último eslabón en movimiento, situado en $\beta = \pi/2$, pierde contacto con el que le precede, que ya está en reposo. Hallar, en función de θ, la expresión de la aceleración a_t común a todos los eslabones. (*Sugerencia*: Escribir la ecuación del movimiento para un elemento cualquiera según la segunda ley de Newton e inte-

http://gratislibrospdf.com/

grar la tensión desde cero, para $\beta = \theta$, hasta cero, para $\beta = \pi/2$.) Hallar asimismo la pérdida de energía Q durante el movimiento desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi/2$.

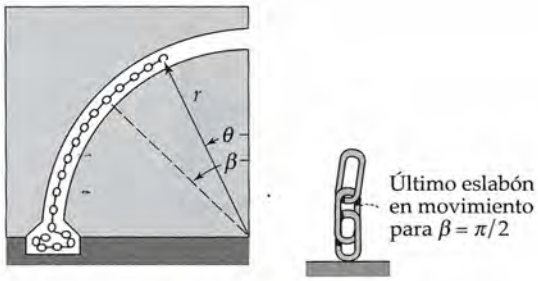


Figura problema 4.86

4.87 El carro transporta una cadena de eslabones sueltos, de masa ρ por unidad de longitud, amontonada. La cadena atraviesa libremente el orificio existente en el carro y se va deteniendo, eslabón a eslabón, merced a la tracción T en la parte de la misma que descansa sobre el suelo sujeta por el extremo. El conjunto de carro y cadena se mueve bajo la acción de la fuerza constante P y posee una velocidad v_0 y una masa m_0 cuando $x = 0$. Despreciando todos los rozamientos, determinar las expresiones de la aceleración a y la velocidad v del carro en función de x. Hallar también T. Adviértase que el eslabón intermedio 2 se desacelera desde la velocidad v hasta la velocidad cero por efecto de la tracción T que le transmite el último eslabón horizontal 1. Adviértase asimismo que el eslabón 2 no ejerce fuerza alguna, durante la transición, sobre el eslabón siguiente 3. Explicar por qué no aparece el término mu si se aplica la ecuación 4.20 a este problema.

$$\text{Resp. } a = \frac{P}{m_0 - \rho x}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2P}{\rho} \ln \frac{m_0}{m_0 - \rho x}}$$

$$T = \rho v^2$$

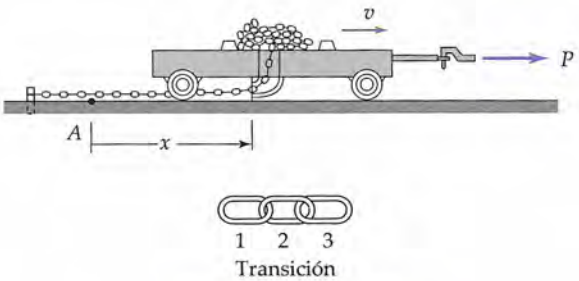


Figura problema 4.87

4.88 El carro transporta un rollo de cable flexible de masa ρ por unidad de longitud. El cable se desenrolla y atraviesa el orificio existente en el carro y se va deteniendo merced a la tracción T en la parte del mismo ya en el suelo sujeto por el extremo. El conjunto de carro y rollo se mueve bajo la acción de la fuerza constante P y posee una masa m_0 cuando $x = 0$. Despreciando todos los rozamientos, determinar las expresiones de la aceleración a y la tracción T en función de x y la velocidad v. Como el carro y todo el cable constituyen un sistema conservativo, el teorema de las fuerzas vivas puede aplicarse durante un desplazamiento infinitesimal dx. Seguidamente, T puede obtenerse escribiendo la relación entre el impulso y la cantidad de movimiento para el sistema completo. Compárese este problema con el 4.87. Se supone que todos los elementos del cable del rollo tienen la misma velocidad horizontal v.

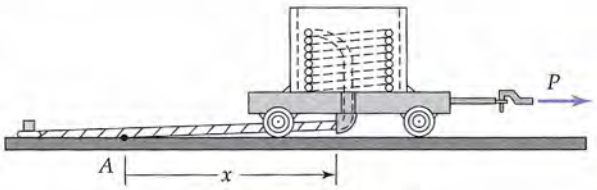


Figura problema 4.88

4.89 En la figura puede verse un sistema para detener un avión en su aterrizaje sobre un campo de longitud reducida. El avión de masa m rueda libremente con velocidad v_0 y se engancha en un dispositivo que tira de los extremos de dos cadenas pesadas de longitud L cada una y masa ρ por unidad de longitud, en la forma indicada. En un cálculo prudente de la efectividad del dispositivo se prescinde del frenado por rozamiento de la cadena sobre el suelo y de toda otra resistencia al movimiento del avión. Bajo esta hipótesis, calcular la velocidad v del avión en el instante en que se pone en movimiento el último eslabón de la cadena. Determinar también la relación entre el desplazamiento x y el tiempo t medido a partir del instante

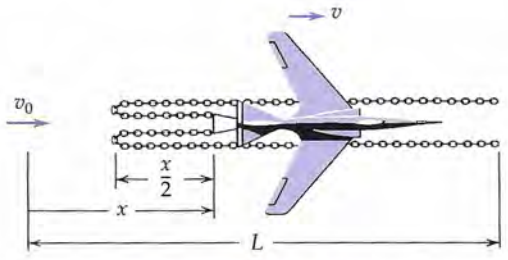


Figura problema 4.89

http://gratislibrospdf.com/

en que toma contacto con la cadena. Supóngase que cada eslabón adquiere instantáneamente su velocidad v por el contacto con los eslabones en movimiento.

$$\textit{Resp. } v = \frac{v_0}{1+2\rho L/m}$$

$$x = \frac{m}{\rho}\left[\sqrt{1+\frac{2v_0 t\rho}{m}}-1\right]$$

▶ **4.90** Un bote metálico de masa m_0 contiene un rollo de cuerda flexible de masa ρ por unidad de longitud. El extremo de la cuerda está amarrado a un soporte situado en lo alto de un hueco de ascensor y el bote se deja caer desde el reposo. En el cuello del bote hay un tornillo manual que sirve para ajustar una abrazadera elástica que aplica una fuerza de rozamiento constante $F/2$ a cada costado de la cuerda cuando ésta pasa por el cuello. Hallar la expresión de la aceleración a del bote y la fuerza P en el soporte en función de x y de la velocidad v. La longitud total de la cuerda es L.

$$\textit{Resp. } a = g + \frac{\rho v^2/2 - F}{m_0 + \rho(L-x)}$$

$$P = \rho g x + \rho v^2/2 + F$$

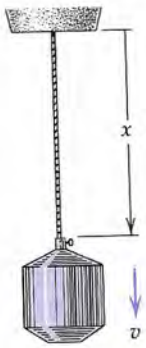


Figura problema 4.90

▶ **4.91** Una cuerda o cadena de eslabones articulados, como las de bicicleta, de longitud L y masa ρ por unidad de longitud, se suelta del reposo en $x = 0$. Determinar, en función de x, la expresión que da la fuerza total R ejercida por la cadena sobre la plataforma fija. Obsérvese que una cadena de este tipo es un sistema conservativo durante todo el movimiento, salvo en la última fase. Comparar el resultado con el del problema 4.84 si se anula el movimiento ascendente de la plataforma en ese problema.

$$\textit{Resp. } R = \rho g x \frac{4L-3x}{2(L-x)}$$

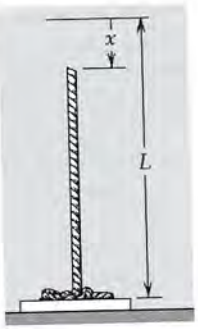


Figura problema 4.91

▶ **4.92** El extremo libre de la cadena de eslabones sueltos de longitud total L y masa ρ por unidad de longitud se suelta desde el reposo con $x = 0$. Hallar, en función de x, la fuerza R que se ejerce en el extremo fijo y la tracción T_1 que soporta la cadena en el extremo inferior de la porción inmóvil. Hallar también la pérdida total de energía Q cuando $x = L$.

$$\textit{Resp. } R = \tfrac{1}{2}\rho g(L+3x),\ T_1 = \rho g x,\ Q = \tfrac{1}{4}\rho g L^2$$

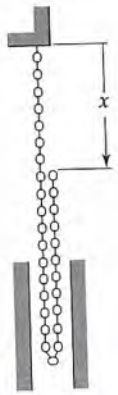


Figura problema 4.92

▶ **4.93** Sustituir la cadena del problema 4.92 por una cuerda flexible o una cadena de bicicleta de masa ρ y longitud total L. El extremo libre se suelta desde el reposo con $x = 0$ y cae bajo la acción de la gravedad. Hallar, siempre en función de x, la fuerza R en el extremo fijo y la tracción T_1 que sufre la cuerda en el bucle. (Adviértase que a es mayor que g. ¿Qué le pasa a la energía del sistema cuando $x = L$?

$$\textit{Resp. } a = g\left[1+\frac{x(L-x/2)}{(L-x)^2}\right]$$

$$R = \tfrac{1}{2}\rho g\left[(L+x)+\frac{x(L-x/2)}{L-x}\right]$$

$$T_1 = \tfrac{1}{2}\rho g\,\frac{x(L-x/2)}{L-x}$$

http://gratislibrospdf.com/

▶ **4.94** Al extremo libre de la cuerda flexible e inextensible, de masa ρ por unidad de longitud y longitud total L, se le comunica una velocidad ascendente constante v. Escribir, en función de x, las expresiones de P, la fuerza F que sujeta al extremo fijo y la tracción T_1 que soporta la cuerda en el bucle. (En este caso el bucle se supone de dimensiones despreciables y la tracción es la misma en ambas ramas de la cuerda.)

Resp. $T_1 = \frac{1}{4}\rho v^2$

$P = \frac{1}{2}\rho(\frac{1}{2}v^2 + gx)$

$R = \frac{1}{4}\rho v^2 + \rho g\left(L - \frac{x}{2}\right)$

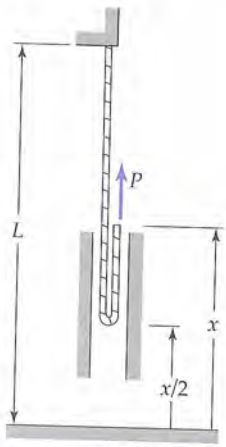


Figura problema 4.94

▶ **4.95** Sustituir la cuerda del problema 4.94 por una cadena de eslabones sueltos de la misma masa ρ por unidad de longitud. A su extremo libre se le comunica una velocidad ascendente constante v. Escribir, en función de x, la expresiones de P, la tracción T_1 que sufre la cadena en el extremo inferior de la parte móvil y la fuerza R que sujeta al extremo fijo. Hallar, asimismo en función de x, la pérdida de energía Q.

Resp. $T_1 = \frac{1}{2}\rho v^2$

$P = \frac{1}{2}\rho(\frac{1}{2}v^2 + gx)$

$R = \rho g\left(L - \frac{x}{2}\right)$

$Q = \frac{1}{4}\rho x(v^2 + gx)$

▶ **4.96** Por un orificio practicado en la superficie donde descansa una cadena apilada sale un extremo de ésta y tira de los demás eslabones poniéndolos en movimiento continuo. Si los eslabones, que inicialmente están en reposo, adquieren bruscamente la velocidad de la cadena sin resistencias por parte del rozamiento o de los eslabones adyacentes, hallar la velocidad v de la cadena en función de x si $v = 0$ cuando $x = 0$. Hallar también la aceleración de la cadena caída y la energía Q que ha perdido el sistema cuando el último eslabón abandona la plataforma. (*Sugerencia*: Aplicar la ecuación 4.20 y tomar el producto xy como variable para resolver la ecuación diferencial. Obsérvese también, en el momento adecuado, que $dx = v\,dt$.) La longitud total de la cadena es L y su masa por unidad de longitud es ρ.

Resp. $v = \sqrt{\frac{2gx}{3}}$, $a = \frac{g}{3}$, $Q = \frac{\rho g L^2}{6}$

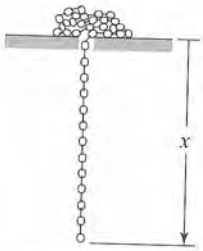


Figura problema 4.96

▶ **4.97** Sustitúyase la cadena apilada del problema 4.96 por un rollo de cuerda de masa ρ por unidad de longitud y longitud total L en la forma indicada, y determínese la velocidad de la parte que cae en función de x si parte del reposo con $x = 0$. Demostrar que la aceleración es constante y vale $g/2$. La cuerda se considera perfectamente flexible, pero inextensible y constituye un sistema conservativo (sin pérdida de energía mecánica). Los elementos de la cuerda adquieren su velocidad de forma continua desde cero hasta v en un pequeño tramo de transición de la cuerda en la parte alta del rollo. Para comparar este caso con el de la cadena del problema 4.96, puede considerarse que ese tramo de transición tiene una longitud despreciable sin violar el requisito de que no haya pérdida de energía en este problema. Determinar también la fuerza R ejercida por la plataforma sobre el rollo en función de x y explicar por qué R se anula cuando $x = 2L/3$. Despréciense las dimensiones del rollo frente a x.

Resp. $v = \sqrt{gx}$, $R = \rho g\left(L - \frac{3x}{2}\right)$

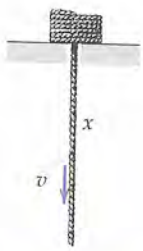


Figura problema 4.97

http://gratislibrospdf.com/

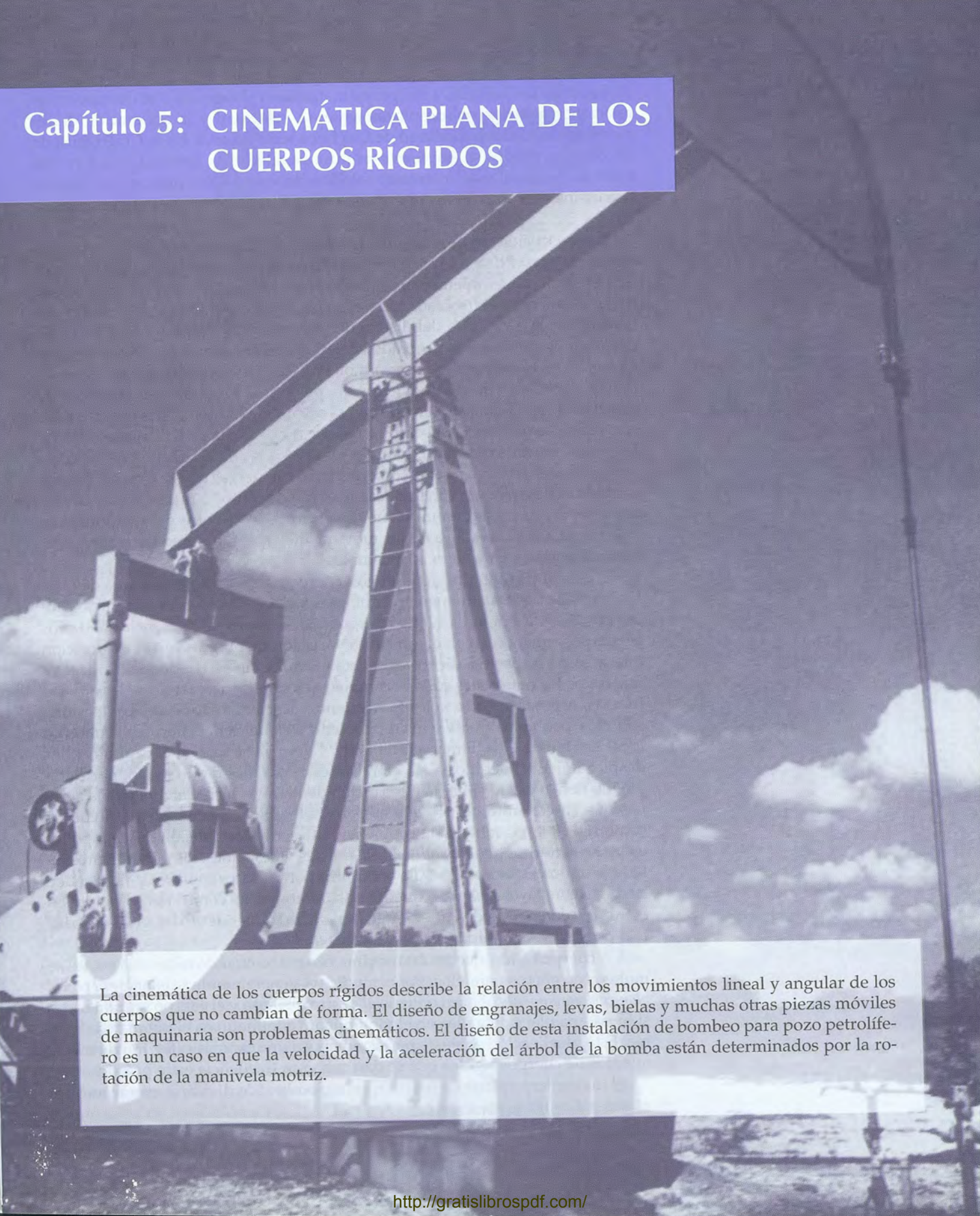
PARTE 2

DINÁMICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

Capítulo 5: CINEMÁTICA PLANA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS



La cinemática de los cuerpos rígidos describe la relación entre los movimientos lineal y angular de los cuerpos que no cambian de forma. El diseño de engranajes, levas, bielas y muchas otras piezas móviles de maquinaria son problemas cinemáticos. El diseño de esta instalación de bombeo para pozo petrolífero es un caso en que la velocidad y la aceleración del árbol de la bomba están determinados por la rotación de la manivela motriz.

http://gratislibrospdf.com/

5.1 INTRODUCCIÓN

Al tratar de la Cinemática del punto material en el capítulo 2 se dedujeron las relaciones que rigen el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de un punto que se mueva a lo largo de una línea recta o curva. En la Cinemática de los cuerpos rígidos se emplean esas mismas relaciones, pero además hay que tener en cuenta el movimiento de rotación del cuerpo. Así pues, en la Cinemática de los cuerpos rígidos intervienen magnitudes tanto lineales como angulares.

La descripción del movimiento de los cuerpos rígidos es útil por dos importantes razones. Primero, frecuentemente es necesario generar, transmitir o gobernar ciertos movimientos empleando levas, engranajes y transmisiones de diversos tipos. En estos casos la descripción del movimiento es necesaria para determinar la geometría del diseño del mecanismo y lo que es más, a consecuencia del movimiento generado suelen aparecer fuerzas que deben tenerse en cuenta en el proyecto. Segundo, a menudo es necesario determinar el movimiento de un cuerpo rígido que resulta de aplicar fuerzas a éste. Ejemplo de este tipo de problemas lo tenemos en el cálculo de la trayectoria de un cohete sometido a la influencia del empuje de su chorro y de la atracción gravitatoria. En ambos casos es necesario dominar los principios de la Cinemática del cuerpo rígido antes de que puedan determinarse las fuerzas que se ejercen. En este capítulo se desarrolla la Cinemática de los movimientos que pueden analizarse como si tuvieran lugar en un plano. En el capítulo 7 se ofrecerá una introducción breve a la Cinemática de los movimientos que requieren las tres coordenadas espaciales para su descripción.

En el capítulo anterior definimos el cuerpo rígido como un sistema de puntos materiales que mantienen invariables sus distancias mutuas. Así pues, si localizamos cada punto de un tal cuerpo mediante ejes de referencia solidarios al cuerpo y que giren con él, no habrá variación de ningún vector de posición que se mida respecto a dichos ejes. Esta formulación es, desde luego, ideal ya que todos los materiales sólidos cambian algo de forma cuando se les aplican fuerzas. A pesar de todo, si los movimientos asociados a los cambios de forma son muy pequeños frente a los movimientos globales del cuerpo, el concepto ideal de rigidez es totalmente aceptable. Como ya se dijo en el capítulo 1, los desplazamientos debidos a las vibraciones de las alas de un avión, por ejemplo, no tienen efecto sobre la descripción de la trayectoria de vuelo de la aeronave en su conjunto, por lo que es perfectamente lícito considerar el cuerpo como rígido. En cambio, si el problema es describir en función del tiempo los esfuerzos internos generados en el ala por sus vibraciones, los movimientos relativos de los elementos del ala cobran importancia primordial y no pueden despreciarse. En este caso no puede considerarse el ala como cuerpo rígido. En este capítulo y en los dos que siguen, toda la materia que se desarrolla se basa esencialmente en la hipótesis de rigidez.

Un cuerpo rígido ejecuta un movimiento plano cuando todas sus partes se mueven en planos paralelos. Por comodidad, generalmente se considera como *plano del movimiento* al que contiene al centro de masa y el cuerpo se trata como si fuera una placa delgada con el movimiento confinado en el plano de la misma. Esta idealización se ajusta perfectamente a una extensa categoría de movimientos de cuerpos rígidos que se dan con gran frecuencia en la práctica.

El movimiento plano de los cuerpos rígidos puede dividirse en varias categorías, tal como se presenta en la figura 5.1.

http://gratislibrospdf.com/

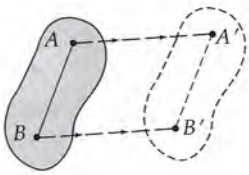
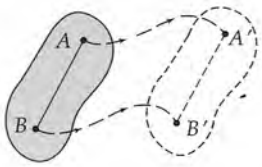
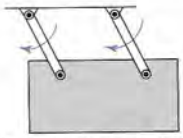
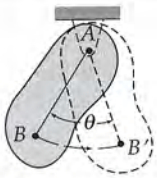
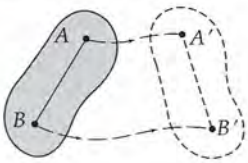
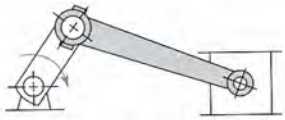
Tipos de movimiento plano de un cuerpo rígido		Ejemplo
(*a*) Traslación rectilínea		Trineo de ensayo para cohetes
(*b*) Traslación curvilínea		 Placa oscilante sujeta con barras paralelas
(*c*) Rotación en torno a un eje fijo		Péndulo compuesto
(d) Movimiento plano general		 Bielas de un motor de movimiento alternativo

Figura 5.1

Por definición, ***traslación*** es todo movimiento en cuyo curso todo segmento rectilíneo del cuerpo permanece paralelo a su posición original. En una traslación *no gira ningún segmento rectilíneo del cuerpo*. En una *traslación rectilínea* (fig. 5.1, parte *a*), todos los puntos del cuerpo recorren rectas paralelas. En una *traslación curvilínea* (fig. 5.1, parte *b*), todos los puntos recorren curvas congruentes. Adviértase que en uno y otro caso el movimiento de traslación del cuerpo lo define el movimiento de uno cualquiera de sus puntos, pues todos ellos ejecutan el mismo movimiento. Queda así claro que el contenido del capítulo 2 nos permite describir por completo el movimiento de traslación del cuerpo rígido.

La **rotación** en torno a un eje fijo (fig. 5.1 parte *c*) es el movimiento angular alrededor de dicho eje. Se deduce que todos los puntos seguirán trayectorias circulares alrededor del eje de rotación y que todos los segmentos rectilíneos del cuerpo (incluso los que no pasan por el eje) giran al mismo tiempo ángulos iguales. También en este caso ocurre que ya hemos tratado el tema en el capítulo 2, al estudiar el movimiento circular del punto, lo que nos permite describir el movimiento de rotación de los cuerpos rígidos tal como veremos en el apartado siguiente.

El ***movimiento plano general*** de un cuerpo rígido (fig. 5.1, parte *d*) es una combinación de traslación y rotación. Para describir el movimiento plano ge-

http://gratislibrospdf.com/

neral haremos uso de las fórmulas desarrolladas al estudiar el movimiento plano en el apartado 2.8.

Adviértase que en todos los ejemplos citados el movimiento real del cuerpo se proyecta sobre el plano del movimiento, tal como se representa en cada figura.

La determinación del movimiento plano de los cuerpos rígidos se realiza o bien por cálculo directo de los desplazamientos absolutos y de sus derivadas respecto al tiempo a partir de la configuración absoluta actual, o bien utilizando los principios del movimiento relativo. Uno y otro método son importantes y útiles y serán abordados sucesivamente en los apartados que siguen.

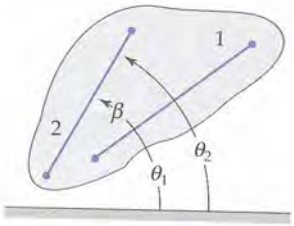


Figura 5.2

5.2 ROTACIÓN

La rotación de un cuerpo rígido queda descrita por su movimiento angular. En la figura 5.2 puede verse un cuerpo ejecutando un movimiento plano en el plano de la figura. Las posiciones angulares de dos segmentos cualesquiera 1 y 2, solidarios al cuerpo, están especificadas por los ángulos θ_1 y θ_2 medidos a partir de una dirección conveniente de referencia cualquiera. Como el ángulo β es constante, la relación $\theta_2 = \theta_1 + \beta$ derivada respecto al tiempo da $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_1$, o bien, para un intervalo finito, $\Delta\theta_2 = \Delta\theta_1$. Así pues, *todas las rectas de un cuerpo rígido tendrán, en su plano de movimiento, el mismo desplazamiento angular, la misma velocidad angular y la misma aceleración angular.* Nótese que el movimiento angular de una recta sólo depende de su desplazamiento angular respecto a un eje de referencia arbitrario cualquiera y de las derivadas respecto al tiempo del desplazamiento. El movimiento angular no exige la presencia de un eje fijo normal al plano del movimiento alrededor del cual giren la recta y el cuerpo.

(a) Fórmulas del movimiento angular. La velocidad angular ω y la aceleración angular α de un cuerpo rígido en rotación angular plana son, respectivamente, las derivadas temporales primera y segunda de la coordenada de posición angular θ de cualquier recta del cuerpo contenida en el plano del movimiento. Estas definiciones dan

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \qquad \text{o sea} \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \tag{5.1}$$

$$\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \qquad \text{o sea} \qquad \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \ddot{\theta}\, d\theta$$

La tercera relación se obtiene eliminando dt entre las dos primeras. En todas estas relaciones el sentido positivo de ω y α, horario o antihorario, es el mismo que se haya tomado para θ. Debe observarse que las fórmulas 5.1 son análogas a las definitorias del movimiento rectilíneo del punto que son las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3. En realidad, todas las relaciones expuestas en el apartado 2.2 con relación al movimiento rectilíneo son válidas para el caso de rotación plana, si las cantidades lineales s, v y a se sustituyen por las cantidades angulares equivalentes θ, ω y α. A medida que avancemos en la dinámica de los cuerpos rígidos, iremos viendo que las analogías entre las fórmulas de los movimientos lineal y angular son casi absolutas en toda la Cinética y la Cinemática. Es im-

http://gratislibrospdf.com/

portante reconocer estas relaciones, ya que ayudan a poner de manifiesto la simetría y la unidad que impregnan toda la Mecánica.

Para la rotación con aceleración angular *constante* resulta, tras integrar las ecuaciones 5.1,

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \end{aligned}$$

Donde θ_0 y ω_0 son los valores para $t = 0$ de la coordenada de posición angular y de la velocidad angular, respectivamente, y t es la duración del intervalo de movimiento considerado. El lector no debe encontrar dificultades para efectuar estas integraciones, pues son por completo análogas a las ecuaciones correspondientes al movimiento rectilíneo bajo aceleración constante desarrolladas en el apartado 2.2.

Las relaciones gráficas entre s, v, a y t representadas en las figuras 2.3 y 2.4 pueden aplicarse a θ, ω y α sin más que sustituir los símbolos correspondientes. Recomendamos al lector que dibuje esas relaciones gráficas para la rotación plana. La marcha del cálculo para obtener la velocidad y el desplazamiento a partir de la aceleración que se describió para el caso de movimiento rectilíneo puede aplicarse a la rotación sin más que sustituir las cantidades lineales por las cantidades angulares correspondientes.

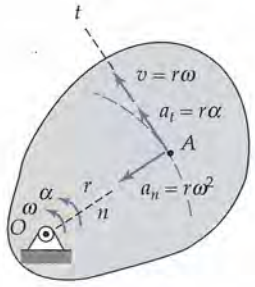
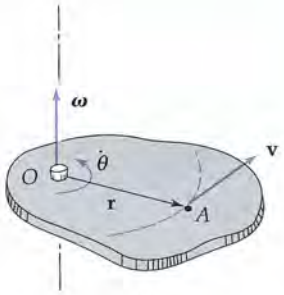


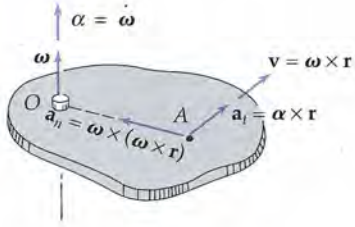
Figura 5.3

(b) Rotación alrededor de un eje fijo. Cuando un cuerpo gira alrededor de un eje fijo todos sus puntos, salvo los situados en el eje de rotación, describen circunferencias alrededor del eje. Así, en el movimiento giratorio de la figura 5.3, alrededor de un eje fijo perpendicular en O al plano de la figura, un punto como el A describe una circunferencia de radio r. Ya conocemos del apartado 2.5 las relaciones entre el movimiento lineal de A y el movimiento angular de la recta normal a su trayectoria, que representa también al movimiento angular del cuerpo rígido. Representando respectivamente por $\omega = \dot{\theta}$ y $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo podemos volver a escribir como sigue las ecuaciones 2.11

$$\begin{aligned} v &= r\omega \\ a_n &= r\omega^2 = v^2/r = v\omega \\ a_t &= ra \end{aligned} \qquad (5.2)$$



(a)



(b)

Figura 5.4

Estas magnitudes pueden también expresarse utilizando la notación del producto vectorial, lo cual es particularmente importante para estudiar movimientos en tres dimensiones. La velocidad angular del cuerpo en rotación puede representarse mediante un vector $\boldsymbol{\omega}$ normal al plano de rotación y cuyo sentido esté dado por la regla de la mano derecha, tal como se representa en la figura 5.4*a*. Según la definición de producto vectorial vemos que $\mathbf{v}$ se obtiene multiplicando vectorialmente $\boldsymbol{\omega}$ por $\mathbf{r}$. Este producto vectorial nos da el módulo, la dirección y el sentido correctos de $\mathbf{v}$ y podemos escribir

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

El orden de los vectores no debe alterarse, pues si lo invertimos resulta $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{v}$.

http://gratislibrospdf.com/

La aceleración de A la obtenemos derivando el producto vectorial que da el valor de $\mathbf{v}$ y así resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} \\ &= \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} \\ &= \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}\end{aligned}$$

Aquí $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ representa la aceleración angular del cuerpo. Entonces, las relaciones vectoriales equivalentes a las 5.2 son

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \\ \mathbf{a}_n &= \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \\ \mathbf{a}_t &= \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}\end{aligned} \qquad (5.3)$$

y se representan gráficamente en la figura 5.4*b*.

Cuando un cuerpo rígido se mueve en tres dimensiones, el vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ puede cambiar de dirección y también de módulo y de sentido, y entonces la aceleración angular, que es la derivada temporal de la velocidad angular $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$, ya no tendrá la misma dirección y sentido que $\boldsymbol{\omega}$.

PROBLEMA TIPO 5.1

Un volante que gira en sentido horario a 1800 rpm está sometido a un par de fuerzas variable, de sentido antihorario, que empieza a aplicarse en el instante $t = 0$. Ese par de fuerzas produce una aceleración angular antihoraria $\alpha = 4t$ rad/s^2, siendo t el tiempo en segundos que dura la aplicación del par. Hallar (a) el tiempo que transcurre hasta que la celeridad angular del volante se reduce a 900 rpm, (b) el tiempo necesario para que se invierta el sentido de la rotación del volante y (c) el número de vueltas que da el volante, en sentidos horario y antihorario, durante los primeros 14 segundos que dura la aplicación del par.

Solución. Arbitrariamente, tomamos como positivo el sentido antihorario.

(a) Como α es una función conocida del tiempo, podemos integrarla para obtener la velocidad angular. Siendo $-1800(2\pi)/60 = -60\pi$ rad/s la velocidad angular inicial, tenemos

$$[d\omega = \alpha\, dt] \qquad \int_{-60\pi}^{\omega} dw = \int_0^t 4t\, dt \qquad \omega = -60\pi + 2t^2$$

Al sustituir por la velocidad angular horaria correspondiente a 900 rpm, o sea, $\omega = -900(2\pi)/60 = -30\pi$ rad/s, resulta

$$-30\pi = -60\pi + 2t^2 \qquad t^2 = 15\pi \qquad t = 6{,}86 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

(b) La rotación del volante cambia de sentido en el instante en que su velocidad angular se anula momentáneamente. O sea,

$$0 = -60\pi + 2t^2 \qquad t^2 = 30\pi \qquad t = 9{,}71 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

① Los signos algebraicos deben manejarse coherentemente. El límite inferior es el valor de la velocidad angular inicial cambiando de signo (sentido horario). Además hemos de pasar las revoluciones a radianes porque α se expresa en radianes.

http://gratislibrospdf.com/

(c) El total de vueltas que da el volante en 14 segundos es igual al número de vueltas en sentido horario N_1 que da durante los primeros 9,71 segundos más el número de vueltas antihorarias N_2 que da durante el resto del intervalo. Integrando la expresión de ω en función de t obtenemos el desplazamiento angular en radianes. Entonces, el primer intervalo

$$[d\theta = \omega\, dt] \qquad \int_0^{\theta_1} d\theta = \int_0^{9,71} (-60\pi + 2t^2)\, dt$$

$$\theta_1 = [-60\pi t + \tfrac{2}{3}t^3]_0^{9,71} = -1220 \text{ rad}$$

(2)

o sea, $N_1 = 1220/2\pi = 194,2$ vueltas en sentido horario.

Para el segundo intervalo

$$\int_0^{\theta_2} d\theta = \int_{9,71}^{14} (-60\pi + 2t^2)\, dt$$

$$\theta_2 = [-60\pi t + \tfrac{2}{3}t^3]_{9,71}^{14} = 410 \text{ rad}$$

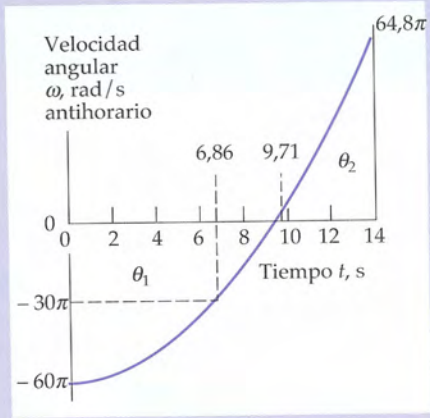
(3)

o sea, $N_2 = 410/2\pi = 65,3$ vueltas en sentido antihorario. Así pues, el número total de vueltas que da el volante en los 14 segundos es

$$N = N_1 + N_2 = 194,2 + 65,3 = 259,5 \text{ rev} \qquad \textit{Resp.}$$

Representando ω en función de t, vemos que θ_1 está representada por el área negativa y θ_2 por el área positiva. Si hubiéramos integrado a lo largo de todo el intervalo en un solo paso, habríamos obtenido $|\theta_2| - |\theta_1|$

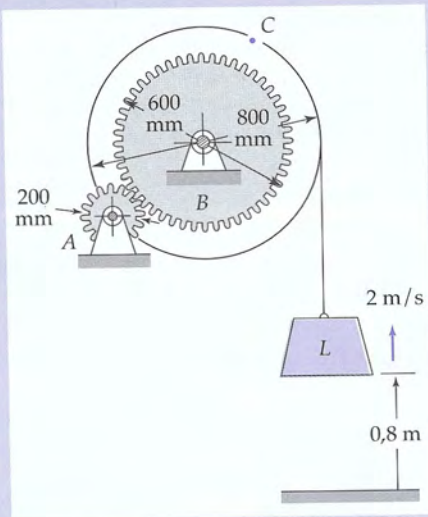
(2) **Se observará una vez más que en este problema el signo menos representa sentido horario.**



(3) **La expresión original de α podría haberse pasado a rev/s^2, en cuyo caso las integrales habrían dado directamente vueltas.**

PROBLEMA TIPO 5.2

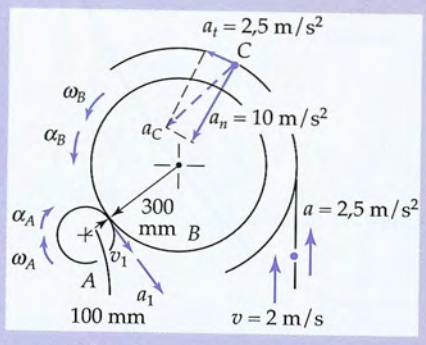
El piñón A del motor engrana con el piñón B, solidario del tambor elevador. La carga L es izada desde el reposo adquiriendo, bajo aceleración constante, una velocidad ascendente de 2 m/s durante su recorrido vertical de 0,8 m. Calcular, en el instante en que la carga pasa por dicha posición, (a) la aceleración del punto C del cable en contacto con el tambor y (b) la velocidad angular y la aceleración angular del piñón A.



Solución. *(a)* Si el cable no resbala en el tambor, la velocidad y la aceleración verticales de la carga L son necesariamente iguales a la velocidad tangencial v y la aceleración tangencial a_t del punto C. Para el movimiento rectilíneo de L, a aceleración constante, las componentes n y t de la aceleración de C se hacen

http://gratislibrospdf.com/

① **Compréndase bien que las velocidades de los puntos del cable cambian de dirección cuando éstos entran en contacto con el tambor y su aceleración adquiere una componente normal.**



① $[v^2 = 2as]$ $\quad a = a_t = v^2/(2s) = 2^2/[2(0{,}8)] = 2{,}5$ m/s²

$[a_n = v^2/r]$ $\quad a_n = 2^2/0{,}400 = 10$ m/s²

$[a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}]$ $\quad a_C = \sqrt{(10)^2 + (2{,}5)^2} = 10{,}31$ m/s² *Resp.*

(b) El movimiento angular del engranaje A se determina a partir del movimiento angular del engranaje B mediante la velocidad v_1 y la aceleración tangencial a_1 de su punto común de contacto. Primeramente el movimiento angular del engranaje B se determina a partir del movimiento del punto C del tambor solidario. O sea

$[v = r\omega]$ $\quad \omega_B = v/r = 2/0{,}400 = 5$ rad/s

$[a_t = r\alpha]$ $\quad \alpha_B = a_t/r = 2{,}5/0{,}400 = 6{,}25$ rad/s²

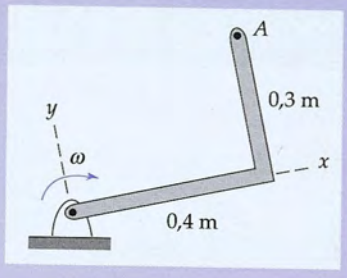
Y entonces, como $v_1 = r_A\,\omega_A = r_B\,\omega_B$ y $a_1 = r_A\,\alpha_A = r_B\,\alpha_B$, tenemos

$$\omega_A = \frac{r_B}{r_A}\omega_B = \frac{0{,}300}{0{,}100}5 = 15 \text{ rad/s (H)} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\alpha_A = \frac{r_B}{r_A}\omega_B = \frac{0{,}300}{0{,}100}6{,}25 = 18{,}75 \text{ rad/s}^2 \text{ (H)} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 5.3

La barra acodada en ángulo recto gira con una velocidad angular horaria que decrece a razón de 4 rad/s². Escribir las expresiones vectoriales de la velocidad y la aceleración del punto A cuando $\omega = 2$ rad/s.



Solución. Según la regla de la mano derecha

$$\boldsymbol{\omega} = -2\mathbf{k} \text{ rad/s} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\alpha} = +4\mathbf{k} \text{ rad/s}^2$$

Así pues, para la velocidad y la aceleración del punto A podemos escribir

$[\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ $\quad \mathbf{v} = -2\mathbf{k} \times (0{,}4\mathbf{i} + 0{,}3\mathbf{j}) = 0{,}6\mathbf{i} - 0{,}8\mathbf{j}$ m/s *Resp.*

$[\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]$ $\quad \mathbf{a}_n = -2\mathbf{k} \times (0{,}6\mathbf{i} - 0{,}8\mathbf{j}) = -1{,}6\mathbf{i} - 1{,}2\mathbf{j}$ m/s²

$[\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}]$ $\quad \mathbf{a}_t = 4\mathbf{k} \times (0{,}4\mathbf{i} + 0{,}3\mathbf{j}) = -1{,}2\mathbf{i} + 1{,}6\mathbf{j}$ m/s²

$[\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t]$ $\quad \mathbf{a} = -2{,}8\mathbf{i} + 0{,}4\mathbf{j}$ m/s² *Resp.*

Los módulos de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ son

$$v = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}8^2} = 1{,}0 \text{ m/s} \qquad \text{y} \qquad a = \sqrt{2{,}8^2 + 0{,}4^2} = 2{,}83 \text{ m/s}^2$$

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMAS

Problemas introductorios

5.1 La biela acodada se mueve desde la posición ABC a la $A'B'C'$ mientras el extremo A se desplaza 100 mm hacia la izquierda a la velocidad constante de 25 mm/s. Calcular la velocidad angular media ω_{med} del brazo BC durante ese intervalo. Se supone que el sentido del movimiento es antihorario.

Resp. $\omega_{med} = 0{,}393$ rad/s

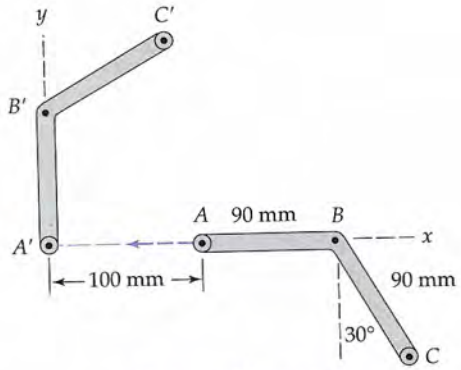


Figura problema 5.1

5.2 Un par de fuerzas que se aplica a un volante de inercia produce en éste una aceleración uniforme que lo lleva desde las 200 rpm a las 800 rpm en cuatro segundos. Hallar el número de vueltas N que da el volante durante ese intervalo. (*Sugerencia*: En los cálculos emplear revoluciones y minutos.)

5.3 El carrito se abandona en reposo en la posición 1 y necesita 0,683 segundos para llegar a la posición 2 del punto más bajo de la trayectoria, donde su centro G tiene una velocidad de 4,33 m/s. Hallar la velocidad angular ω de la recta AB en la posición 2 y la velocidad angular media ω_{med} de AB durante el intervalo.

Resp. $\omega = 3{,}61$ rad/s, $\omega_{med} = 1{,}231$ rad/s

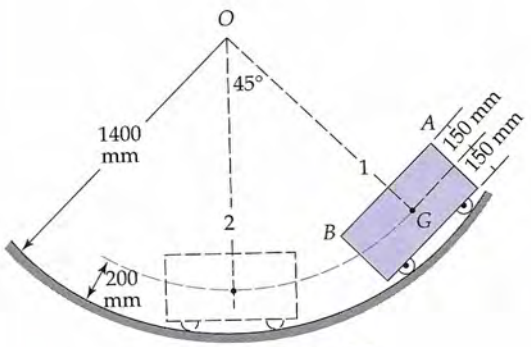


Figura problema 5.3

5.4 La placa rectangular gira, con una velocidad angular constante $\omega = 10$ rad/s, en torno al eje que pasa por la esquina O. Hallar los módulos de la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ de la esquina A empleando (*a*) las relaciones escalares y (*b*) las relaciones vectoriales.

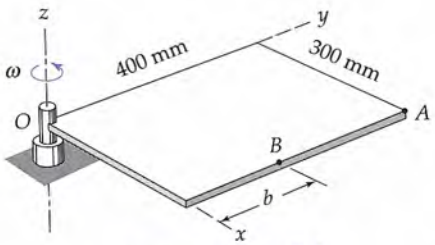


Figura problema 5.4

5.5 El disco gira en torno a su centro O en el sentido indicado. En un cierto instante, el punto P del perímetro posee una aceleración dada por $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ m/s^2. Hallar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del disco en ese instante.

Resp. $\boldsymbol{\omega} = -\sqrt{8}\ \mathbf{k}$ rad/s, $\boldsymbol{\alpha} = 6\mathbf{k}$ rad/s^2

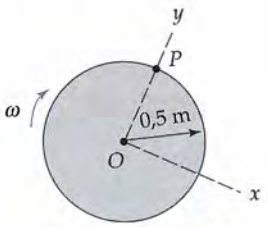


Figura problema 5.5

5.6 La cinta magnética avanza y pasa de la forma indicada por las poleas sin peso montadas en un ordenador. Si la celeri-

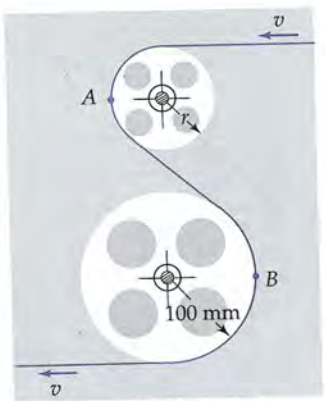


Figura problema 5.6

http://gratislibrospdf.com/

dad v de la cinta es constante y si el módulo de la aceleración del punto A de la cinta es 4/3 la del punto B, calcular el radio r de la polea pequeña

5.7 Si la placa rectangular del problema 5.4 arranca del reposo y el punto B esta animado de una aceleración inicial de 5,5 m/s^2, hallar la distancia b si la placa alcanza una celeridad angular de 300 rpm en dos segundos bajo una aceleración angular constante.

Resp. $b = 180{,}6$ mm

5.8 La posición angular de uno de los radios de un disco que gira está dada por el ángulo horario $\theta = 2t^3 - 3t^2 + 4$, donde θ está en radianes y t está en segundos. Calcular el desplazamiento angular $\Delta\theta$ del disco durante el intervalo en que su aceleración angular aumenta de 42 rad/s^2 a 66 rad/s^2.

Problemas representativos

5.9 El cilindro macizo rota en torno a su eje z. En el instante representado, el punto P de la llanta posee una velocidad cuya componente x es $-1{,}28$ m/s, siendo $\theta = 20°$. Hallar la velocidad angular ω de la recta AB perteneciente a la base del cilindro. ¿Posee velocidad angular la generatriz BC?

Resp. $\boldsymbol{\omega} = 24{,}9\mathbf{k}$ rad/s; no

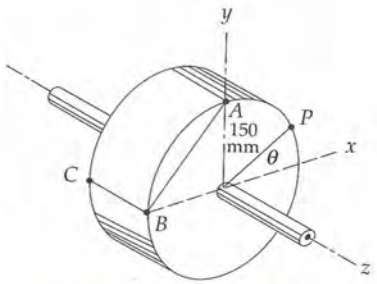


Figura problema 5.9

5.10 Los datos experimentales relativos al componente rotatorio de un dispositivo de accionamiento revelan que la relación entre la velocidad angular y la coordenada angular θ obedece a la curva representada. Determinar por aproximación la aceleración angular α del componente para $\theta = 6$ rad.

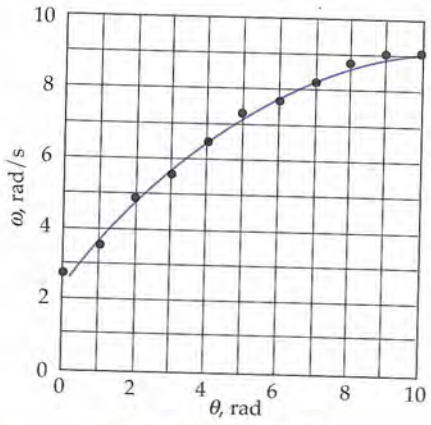


Figura problema 5.10

5.11 El brazo giratorio parte del reposo y adquiere una celeridad de rotación $N = 600$ rpm al cabo de dos segundos bajo una aceleración angular constante. Determinar el tiempo t que transcurre desde el arranque hasta que el vector aceleración del extremo P forme un ángulo de 45° con el brazo OP.

Resp. $t = 0{,}1784$ s

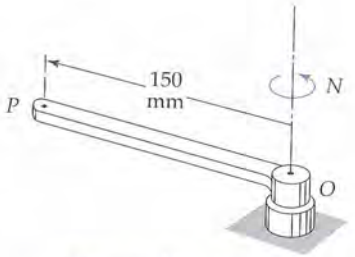


Figura problema 5.11

5.12 La placa rectangular rota en sentido horario en torno al cojinete fijo O. Si el lado BC tiene una velocidad angular constante de 6 rad/s, hallar las expresiones vectoriales de la velocidad y la aceleración del punto A en las coordenadas que se indican.

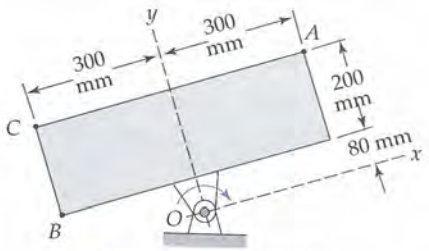


Figura problema 5.12

5.13 A ritmo constante se acelera un árbol desde el reposo hasta una celeridad de 3600 rpm, instante desde el que inmediatamente se desacelera, a ritmo constante, hasta el reposo, invirtiéndose un total de 10 segundos para toda la maniobra. ¿Cuántas vueltas N habrá dado el árbol durante ese intervalo?

Resp. $N = 300$ rev

5.14 Un árbol se halla girando, en sentido horario, con una celeridad de rotación de 200 rpm cuando se le aplica un par de fuerzas que le comunica una aceleración angular constante α de sentido antihorario. Si, al cabo de tres segundos de la aplicación del par, la celeridad del árbol es de 400 rpm, en sentido antihorario, calcular la aceleración angular α y el número total

http://gratislibrospdf.com/

N de vueltas (en ambos sentidos, horario y antihorario) que da el árbol durante los tres segundos.

5.15 Las dos poleas de correas trapezoidales forman un conjunto único que gira alrededor de O. En cierto instante, el punto A de la correa pequeña lleva una velocidad $v_A = 1{,}5$ m/s el punto B de la polea grande posee una aceleración $a_B = 45$ m/s^2, tal como se indica en la figura. Hallar el módulo $\mathbf{a}_C$ del punto C en ese instante y dibujar el diagrama vectorial correspondiente.

Resp. $a_C = 149{,}6$ m/s^2

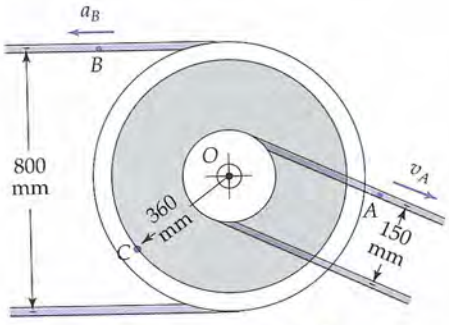


Figura problema 5.15

5.16 El disco gira en torno a su centro O. En el instante representado, la velocidad de A es $\mathbf{v}_A = 200\mathbf{j}$ mm/s y la aceleración tangencial de B es $(\mathbf{a}_B)_t = 150\mathbf{i}$ mm/s^2. Escribir las expresiones vectoriales de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración $\boldsymbol{\alpha}$ del disco. Emplear estos resultados para escribir la expresión vectorial de la aceleración del punto C.

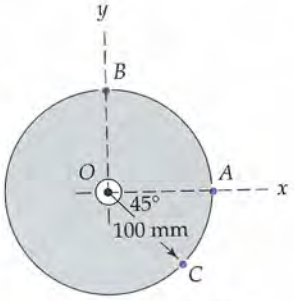


Figura problema 5.16

5.17 Un engranaje que gira a 200 rpm, en sentido horario, es sometido a un par de fuerzas que le comunica una aceleración angular α en sentido horario que varía con el tiempo según se indica en la gráfica. Hallar la celeridad N del disco cuando $t = 5$ s.

Resp. $N = 272$ rpm

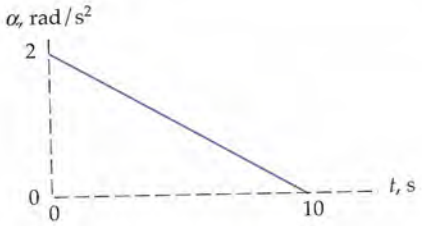


Figura problema 5.17

5.18 La velocidad de rotación de un mecanismo de mando disminuye desde 2000 rpm a 500 rpm del modo que se representa durante el intervalo de seis segundos. Hallar el número de vueltas N que da el mecanismo durante esos seis segundos. Determinar asimismo la aceleración angular α, en rad/s^2, durante los dos últimos segundos del intervalo.

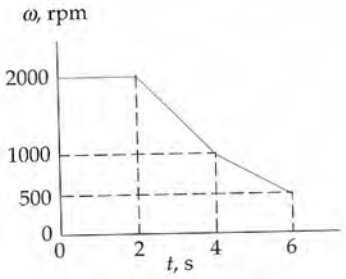


Figura problema 5.18

5.19 Las dos poleas solidarias son accionadas a celeridad creciente por la correa. Cuando ésta alcanza una celeridad $v = 0{,}6$ m/s, la aceleración total del punto P es 8 m/s^2. Hallar, para ese instante, la aceleración angular α de las poleas y la aceleración del punto B de la correa.

Resp. $\alpha = 17{,}44$ rad/s^2, $a_B = 1{,}744$m/s^2

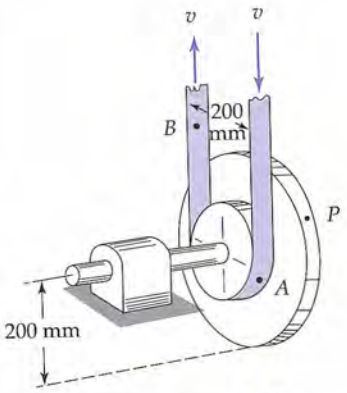


Figura problema 5.19

http://gratislibrospdf.com/

5.20 El disco gira alrededor del eje z con una velocidad angular del sentido indicado. En cierto instante, el módulo de la velocidad del punto A es de 3 m/s y decrece a razón de 7,2 m/s^2. Escribir las expresiones vectoriales de la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del disco y la aceleración total del punto B en ese instante.

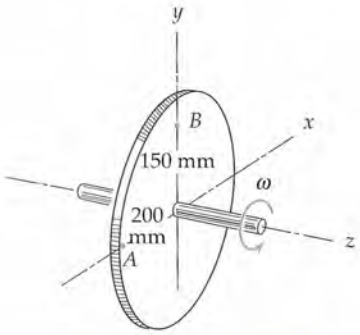


Figura problema 5.20

5.21 En el instante $t = 0$ a un volante se aplica un par de fuerzas variable, de sentido horario, el cual hace que su aceleración angular, de sentido horario, disminuya linealmente con el desplazamiento angular θ durante 20 revoluciones de la manera que se representa. Si la celeridad, de sentido horario, del volante era de 300 rpm en el instante $t = 0$, hallar su celeridad N al cabo de las 20 revoluciones. (*Sugerencia*: Emplear vueltas y no radianes.)

Resp. $N = 513$ rpm

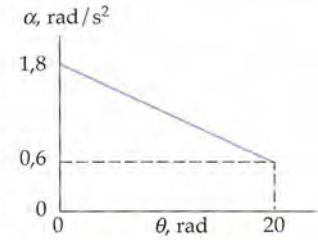


Figura problema 5.21

5.22 La figura representa un reductor de velocidad a base de poleas de correas trapezoidales, en el que la polea A arrastra a las dos poleas solidarias B, que a su vez arrastran a la polea C. Si A parte del reposo en el instante $t = 0$ y recibe una aceleración angular constante α_1, deducir las expresiones de la velocidad angular de C y del módulo de la aceleración de un punto P de la correa, ambas para un instante t.

$$\textit{Resp. } \omega_c = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \alpha_1 t$$

$$a_P = \frac{r_1^2}{r_2^2}\alpha_1 \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 \alpha_1^2 t^4}$$

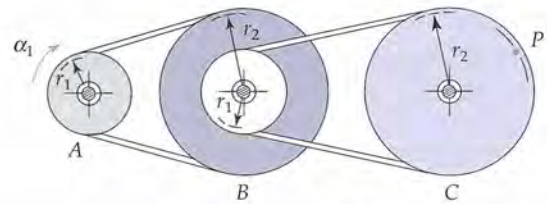


Figura problema 5.22

5.3 MOVIMIENTO ABSOLUTO

Vamos a exponer ahora cómo se describe la cinemática de los cuerpos rígidos por el procedimiento basado en el movimiento absoluto. En este planteamiento se emplean las relaciones geométricas que definen la configuración de los cuerpos que intervienen en el problema y, seguidamente, se derivan respecto al tiempo esas relaciones geométricas al objeto de obtener velocidades y aceleraciones. En el apartado 2.9 del capítulo 2, que trataba de la cinemática del punto material, se presentó cómo se realiza el análisis del movimiento vinculado de puntos por el método del movimiento absoluto. Así, en los aparejos de poleas que allí se examinaron, las velocidades y aceleraciones interrelacionadas se determinaron derivando sucesivamente las longitudes de los cables de enlace. En aquel primer planteo las relaciones geométricas eran muy sencillas, sin que hubiera que considerar cantidades angulares. Sin embargo, cuando se trata del movimiento de cuerpos rígidos, en las relaciones geométricas definitorias aparecen medidas tanto lineales como angulares y, por tanto, las derivadas temporales de esas cantidades comprenden velocidades tanto lineales como angulares.

http://gratislibrospdf.com/

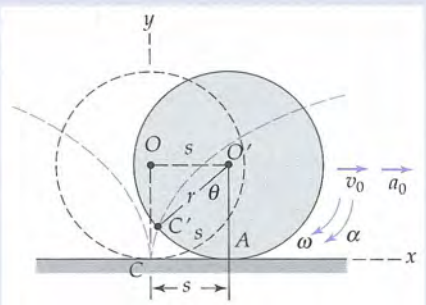
En el análisis por movimiento absoluto es esencial la coherencia en los cálculos en que se basa la descripción. Por ejemplo, si la posición angular de una recta que se mueve en el plano del movimiento se especifica mediante el ángulo θ, medido en sentido antihorario, que forma con algún eje de referencia, entonces el sentido positivo tanto de la velocidad angular $\dot{\theta}$ como de la aceleración angular $\ddot{\theta}$ deberá ser también el antihorario. Resulta así que un signo negativo que afecta a cualquiera de estas cantidades indicará que la misma tiene un sentido horario. Las definiciones 2.1 y 2.2, relativas al movimiento lineal, y las 5.1, 5.2 y 5.3, relativas a la rotación, se aplican aquí repetidamente, por lo que deben dominarse a fondo.

Para resolver problemas de cinemática de cuerpos rígidos, el método del movimiento absoluto resulta muy sencillo y eficaz con tal que la configuración geométrica se preste a una descripción matemática que no sea excesivamente complicada. Si la configuración es complicada o incómoda de manejar, puede que sea preferible el análisis por movimiento relativo. Este se trata en este capítulo a partir del apartado 5.4. La elección de uno u otro procedimiento no podrá realizarse adecuadamente hasta disponer de una experiencia suficiente en ambos.

Los tres problemas tipo que siguen ilustran la aplicación del análisis por movimiento absoluto a tres situaciones muy corrientes y conviene que se estudien a conciencia. Especialmente importante es la cinemática del movimiento de rodadura que se expone en el problema tipo 5.4 y, dada la frecuente presencia de la rueda en los sistemas mecánicos más diversos, se incluye repetidamente en los problemas propuestos.

PROBLEMA TIPO 5.4

Un disco de radio r rueda sin deslizamiento por una superficie plana. Determinar su movimiento angular en función del movimiento lineal de su centro O. Determinar asimismo la aceleración de un punto de la periferia del disco en el instante en que se halla en contacto con la superficie sobre la que rueda.



Solución. La figura muestra el disco rodando sin deslizamiento hacia la derecha desde la posición indicada con trazos hasta la indicada con trazo continuo. El desplazamiento del centro O es s, que es también el arco de longitud $C'A$ de su borde, sobre el que ha girado el disco. El radio CO gira un ángulo θ, hasta su nueva posición $C'O'$, donde θ se mide desde la vertical. Si el disco no se desliza, el arco $C'A$ debe ser igual a la distancia s. Entonces, la relación entre los desplazamientos y sus dos primeras derivadas temporales son

$$s = r\theta$$

(1) $$v_O = r\omega \qquad \textit{Resp.}$$

$$a_O = r\alpha$$

(1) En este punto, estas tres relaciones ya no deben resultarnos poco familiares y su aplicación al movimiento del disco debe dominarse a fondo.

http://gratislibrospdf.com/

donde $v_O = \dot{s}$, $a_O = \dot{v}_O = \ddot{s}$, $\omega = \dot{\theta}$ y $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$. Por supuesto, el ángulo θ debe estar expresado en radianes. La aceleración a_O tendrá un sentido opuesto al de v_O si el disco aminora de velocidad. En este caso, la aceleración angular α tendrá un sentido opuesto al de ω.

El origen del sistema de coordenadas fijo lo colocamos arbitrariamente, pero por comodidad, en el punto del suelo inicialmente en contacto con el punto C de la periferia del disco. Cuando C se ha movido a lo largo de su trayectoria cicloidal hasta la posición C', sus nuevas coordenadas y sus derivadas temporales son

$$x = s - r \operatorname{sen}\theta = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

$$\dot{x} = r\dot{\theta}(1 - \cos\theta) = v_O(1 - \cos\theta) \qquad \dot{y} = r\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta = v_O \operatorname{sen}\theta$$

$$\ddot{x} = \dot{v}_O(1 - \cos\theta) + v_O\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta \qquad \ddot{y} = \dot{v}_O \operatorname{sen}\theta + \dot{v}_O\cos\theta$$

$$= a_O(1 - \cos\theta) + r\omega^2 \operatorname{sen}\theta \qquad = a_O \operatorname{sen}\theta + r\omega^2\cos\theta$$

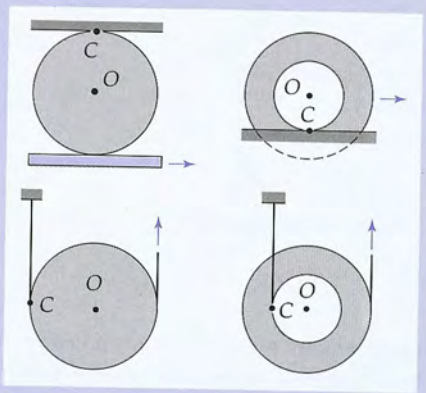
Para el instante de contacto deseado $\theta = 0$, y

(2) $$\ddot{x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \ddot{y} = r\omega^2$$ *Resp.*

Por tanto, la aceleración del punto C de la periferia en el instante de contacto con el suelo depende sólo de r y ω y está dirigida hacia el centro del disco. Si se desea, la velocidad y la aceleración de C en cualquier posición θ pueden obtenerse con la expresiones $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$ y $\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$.

La aplicabilidad de las fórmulas cinemáticas referentes a un disco o rueda, que ruede sin deslizamiento conviene que se analice en distintas configuraciones de rodadura, tales como las que se ilustran en la figura. Cuando una rueda se desliza a la vez que rueda, las fórmulas anteriores ya no son válidas.

(2) **Es evidente que cuando $\theta = 0$ el punto de contacto tiene velocidad nula, por lo que $\dot{x} = \dot{y} = 0$. La aceleración del punto de contacto del disco puede también obtenerse aplicando las fórmulas del movimiento relativo del apartado 5.6**



PROBLEMA TIPO 5.5

El dispositivo de cables y poleas representado se emplea para izar la carga L. Todos los cables están arrollados y sujetos a sus poleas de modo que no pueden resbalar. Las dos poleas a las que L está unida son solidarias y forman un cuerpo rígido único. Calcular la aceleración y la velocidad de L y las correspondientes velocidad y aceleración angulares ω y α de la polea doble bajo las condiciones siguientes:

Caso (a)

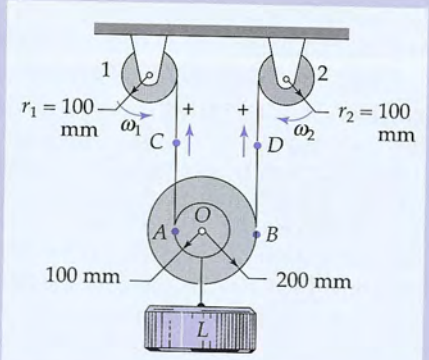
Polea 1: $\omega_1 = \dot{\omega}_1 = 0$ *(polea en reposo)*

Polea 2: $\omega_2 = 2$ *rad/s,*
$\alpha_2 = \dot{\omega}_2 = -3$ *rad/s*^{2}

Caso (b)

Polea 1: $\omega_1 = 1$ *rad/s,*
$\alpha_1 = \dot{\omega}_1 = 4$ *rad/s*^{2}

Polea 2: $\omega_2 = 2$ *rad/s,*
$\alpha_2 = \dot{\omega}_2 = -2$ *rad/s*^{2}



http://gratislibrospdf.com/

Solución. El desplazamiento tangencial, la velocidad y la aceleración de un punto del borde de las poleas 1 ó2 son iguales a los movimientos verticales correspondientes de los puntos A o B puesto que por hipótesis los cables son inextensibles.

Caso (a). Con A en reposo instantáneo, la recta AB pasa a la posición AB' girando un ángulo $d\theta$ durante el intervalo dt. En el diagrama podemos ver que los desplazamientos y sus derivadas temporales dan

(1)
$$ds_B = \overline{AB}\, d\theta \qquad v_B = \overline{AB}\omega \qquad (a_B)_t = \overline{AB}\alpha$$
$$ds_O = \overline{AO}\, d\theta \qquad v_O = \overline{AO}\,\omega \qquad a_O = \overline{AO}\,\alpha$$

Siendo $v_D = r_2\omega_2 = 0{,}1(2) = 0{,}2$ m/s, $a_D = r_2\alpha_2 = 0{,}1(-3) = -0{,}3$ m/s^2, el movimiento angular de la polea doble es

(2)
$$\omega = v_B/\overline{AB} = v_D/\overline{AB} = 0{,}2/0{,}3 = 2/3 \text{ rad/s (AH)} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\alpha = (a_B)_t/\overline{AB} = a_D/\overline{AB} = -0{,}3/0{,}3 = -1 \text{ rad/s}^2 \text{ (H)} \qquad \textit{Resp.}$$

El correspondiente movimiento de O y la carga L es

$$v_O = \overline{AO}\omega = 0{,}1(2/3) = 0{,}0667 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

(3)
$$a_0 = \overline{AO}\alpha = 0{,}1(-1) = -0{,}1 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Caso (b). Al moverse el punto C, y por tanto el A, la recta AB se desplaza a $A'B'$ durante el tiempo dt. El diagrama para este caso muestra que los desplazamientos y sus derivadas temporales dan

$$ds_B - ds_A = \overline{AB}\, d\theta \qquad v_B - v_A = \overline{AB}\,\omega \qquad (a_B)_t - (a_A)_t = \overline{AB}\alpha$$
$$ds_O - ds_A = \overline{AO}\, d\theta \qquad v_O - v_A = \overline{AO}\omega \qquad a_O - (a_A)_t = \overline{AO}\alpha$$

Siendo $v_C = r_1\omega_1 = 0{,}1(1) = 0{,}1$ m/s, $v_D = r_2\omega_2 = 0{,}1(2) = 0{,}2$ m/s

$$a_C = r_1\alpha_1 = 0{,}1(4) = 0{,}4 \text{ m/s}^2 \qquad a_D = r_2\alpha_2 = 0{,}1(-2) = -0{,}2 \text{ m/s}^2$$

para el movimiento angular de la polea doble tenemos

$$\omega = \frac{v_B - v_A}{\overline{AB}} = \frac{v_D - v_C}{\overline{AB}} = \frac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}3} = 1/3 \text{ rad/s (AH)} \qquad \textit{Resp.}$$

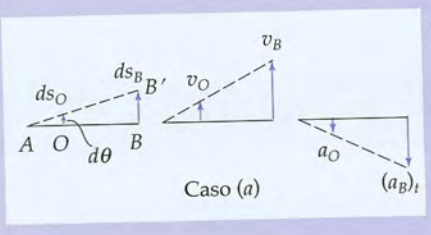
(4)
$$\alpha = \frac{(a_B)_t - (a_A)_t}{\overline{AB}} = \frac{a_D - a_C}{\overline{AB}} = \frac{-0{,}2 - 0{,}4}{0{,}3} = -2 \text{ rad/s}^2 \text{ (H)} \qquad \textit{Resp.}$$

El correspondiente movimiento de O y la carga L es

$$v_O = v_A + \overline{AO}\omega = v_C\overline{AO}\omega = 0{,}1 + 0{,}1(0{,}333) = 0{,}1333 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

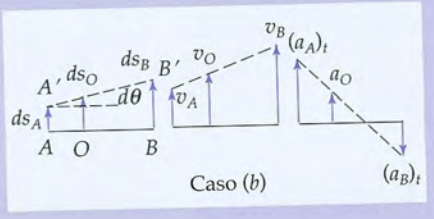
$$a_O = (a_A)_t + \overline{AO}\alpha = a_C + \overline{AO}\alpha = 0{,}4 + 0{,}1(-2) = 0{,}2 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

(1) Véase que la polea interior es una rueda que rueda a lo largo de la recta fija definida por el cable de la izquierda. Por ello son válidas las expresiones utilizadas en el problema tipo 5.4.



(2) Como B describe una trayectoria curvilínea, su aceleración tendrá una componente tangencial $(a_B)_t$ y además una componente normal dirigida hacia O que no afecta a la aceleración angular de la polea.

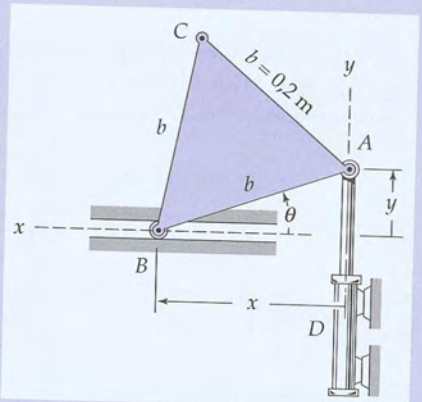
(3) En los diagramas pueden verse estas cantidades y la sencillez de las relaciones lineales entre las mismas. La representación visual de O y B mientras AB gira el ángulo $d\theta$ debe aclarar el análisis.



(4) De nuevo, como en el caso (a), la rotación infinitesimal de la recta AB, tal como se ve en la figura, establece la relación entre la velocidad angular de la polea y las velocidades de los puntos A, O y B. El signo negativo de $(a_B)_t = a_D$ da el diagrama de aceleraciones representado pero no destruye la linealidad de las relaciones.

http://gratislibrospdf.com/

El movimiento en su plano de la placa ABC, en forma de triángulo equilátero, se controla mediante el cilindro hidráulico D. Si el vástago del pistón del cilindro se mueve hacia arriba con celeridad constante de 0,3 m/s durante un intervalo de su movimiento, calcular para el instante en que $\theta = 30°$ la velocidad y la aceleración del centro del rodillo B en la guía horizontal y la velocidad y aceleración angulares del borde CB.



Solución. Con las coordenadas x-y elegidas tal como se indica en la figura, el movimiento de A es $v_A = \dot{y} = 0{,}3$ m/s y $a_A = \ddot{y} = 0$. El correspondiente movimiento de B viene dado por x y sus derivadas respecto al tiempo, que pueden obtenerse de $x^2 + y^2 = b^2$. Derivando tenemos

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \qquad \dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y}$$

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 + y\ddot{y} + \dot{y}^2 = 0 \qquad \ddot{x} = -\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x} - \frac{y}{x}\ddot{y}$$

① **Obsérvese que es más fácil derivar un producto que un cociente. Por ello derivamos $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ y no $\dot{x} = -y\dot{y}/x$.**

Con $y = b \operatorname{sen}\theta$, $x = b\cos\theta$ e $\ddot{y} = 0$, las expresiones se convierten en

$$v_B = \dot{x} - v_A \operatorname{tg}\theta$$

$$a_B = \ddot{x} = -\frac{v_A^2}{b}\sec^3\theta$$

Sustituyendo por los valores numéricos $v_A = 0{,}3$ m/s y $\theta = 30°$ resulta

$$v_B = -0{,}3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -0{,}1732 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$a_B = -\frac{(0{,}3)^2(2/\sqrt{3})^3}{0{,}2} = -0{,}693 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Los signos negativos indican que la velocidad y la aceleración de B están dirigidas hacia la derecha, ya que el sentido positivo de x es hacia la izquierda.

El movimiento angular de CB es el mismo que el de cualquier recta de la placa y, por ello, el mismo que el de AB. Derivando $y = b \operatorname{sen}\theta$ obtenemos

$$\dot{y} = b\dot{\theta}\cos\theta \qquad \omega = \dot{\theta} = \frac{v_A^2}{b^2}\sec\theta$$

La aceleración angular es

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{v_A}{b}\dot{\theta}\sec\theta\operatorname{tg}\theta = \frac{v_A^2}{b^2}\sec^2\operatorname{tg}\theta$$

http://gratislibrospdf.com/

Al aplicar los valores numéricos resulta

$$\omega = \frac{0{,}3}{0{,}2}\frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}732 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\alpha = \frac{(0{,}3)^2}{(0{,}2)^2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\frac{1}{\sqrt{3}} = 1{,}732 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Tanto ω como α son de sentido antihorario, puesto que sus signos son positivos en el sentido de la medición positiva de θ.

PROBLEMAS

Problemas introductorios

5.23 El disco rueda por la plancha plana sin deslizamiento. Si su centro O se desplaza 100 mm hacia la derecha mientras la plancha se desplaza 75 mm hacia la izquierda, calcular el desplazamiento angular $\Delta\theta$ del disco.

Resp. $\Delta\theta = 1{,}167$ rad

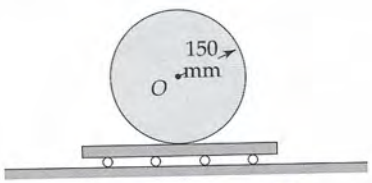


Figura problema 5.23

5.24 La rueda gira sin deslizamiento con una velocidad angular constante ω. Si la recta POC rota un ángulo infinitesimal $d\theta$ durante un tiempo dt, demostrar que la velocidad del punto P es igual a su distancia al punto de contacto C multiplicada por la velocidad angular de la rueda. Además, expresar la velocidad de P en función de la velocidad del centro O.

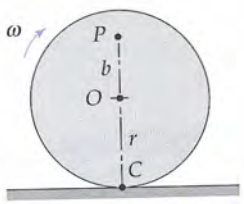


Figura problema 5.24

5.25 El carrete de cable telefónico rueda sin deslizamiento por la superficie horizontal. Si el punto A del cable lleva una velocidad $v_A = 0{,}8$ m/s hacia la derecha, calcular la velocidad del centro O y la velocidad angular ω de la rueda. (Atención a no cometer el error de suponer que el carrete rueda hacia la izquierda.)

Resp. $v_O = 1{,}2$ m/s, $\omega = 1{,}333$ rad/s H

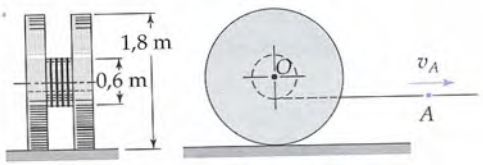


Figura problema 5.25

5.26 El pequeño vehículo corre sobre raíles impulsado por la rueda de fricción de 400 mm de diámetro a la cual hace girar un motor eléctrico. Hallar la velocidad v del vehículo si la rueda de fricción gira a 300 rpm y no hay resbalamientos de ninguna clase.

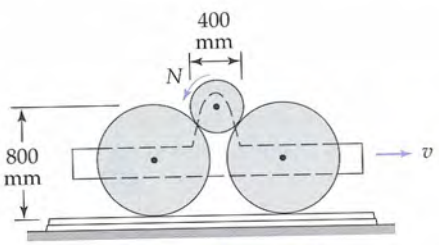


Figura problema 5.26

5.27 El carrete de cable telefónico rueda rampa abajo merced al cable guía que se alimenta desde el tambor superior y arrollado en torno al cubo interno del carrete. Si el tambor superior

http://gratislibrospdf.com/

se hace girar a la velocidad constante $\omega_1 = 2$ rad/s, calcular el tiempo que tarda el centro del carrete en desplazarse 30 m rampa abajo. No hay deslizamientos.

Resp. $t = 66{,}7$ s

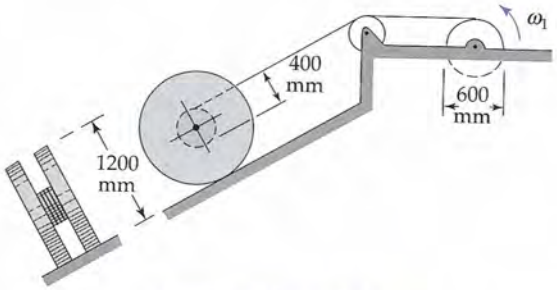


Figura problema 5.27

5.28 En la figura se representan los elementos de un integrador mecánico. La rueda integradora A gira alrededor de su eje fijo y es arrastrada, por rozamiento sin deslizamiento, por el disco B tangente a su periferia. La distancia y es una variable que puede controlarse a voluntad. Demostrar que el desplazamiento angular de la rueda integradora viene dado por $z = (1/b) \int y\, dx$, donde x es el desplazamiento angular del disco B.

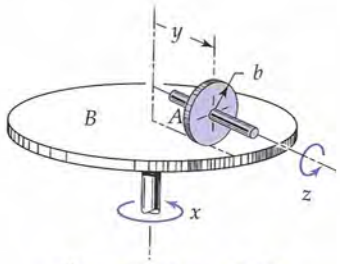


Figura problema 5.28

5.29 Los cables A y B están arrollados firmemente alrededor de la periferia y la garganta de la polea, tal como se muestra. Si a los cables A y B se les comunican unas velocidades ascendentes de 0,3 m/s y 0,4 m/s, respectivamente, calcular la velocidad del centro O y la velocidad angular de la polea.

Resp. $v_O = 0{,}34$ m/s, $\omega = 0{,}4$ rad/s

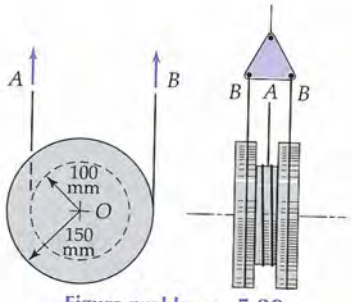


Figura problema 5.29

5.30 El disco central es fijo y no rota. El brazo AOB arrastra los dos discos pequeños, que ruedan sin deslizar sobre el grande. Si AOB recibe una velocidad angular antihoraria ω_0, hallar la velocidad angular ω de cada uno de los discos pequeños.

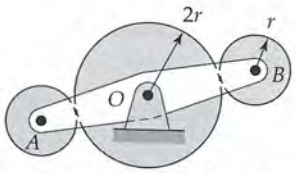


Figura problema 5.30

Problemas representativos

5.31 Del extremo A de la barra delgada se tira hacia la derecha con una velocidad v con lo cual se desliza por la superficie del semicilindro inmóvil. Hallar, en función de x, la velocidad angular $\omega = \dot{\theta}$.

Resp. $\omega = -\dfrac{v}{x}\dfrac{r}{\sqrt{x^2 - r^2}}$

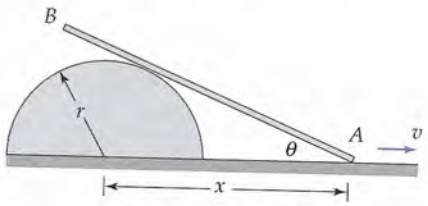


Figura problema 5.31

5.32 Calcular la velocidad angular ω de la varilla AB en función de la distancia x y de la velocidad angular constante ω_0 del tambor.

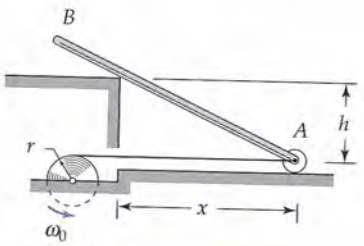


Figura problema 5.32

http://gratislibrospdf.com/

5.33 El cilindro hidráulico D hace que la distancia OA aumente a razón de 50 mm/s. Calcular la velocidad del pasador C en la guía horizontal en el momento en que $\theta = 50°$.

Resp. $v_C = 59{,}6$ mm/s

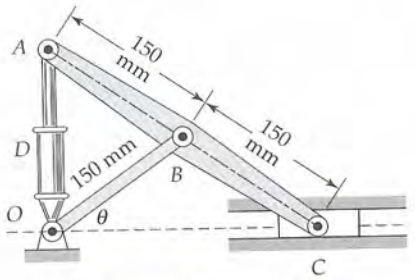


Figura problema 5.33

5.34 El movimiento vertical de la plataforma de taller lo controla el movimiento horizontal del pasador A. Si éste tiene una velocidad v_0 hacia la izquierda, hallar la velocidad vertical v de la plataforma en función de θ.

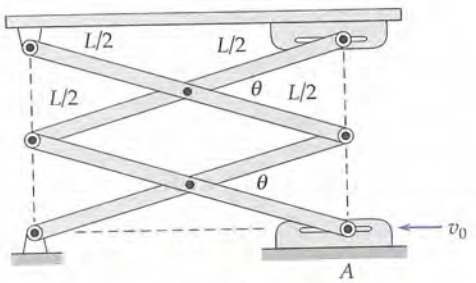


Figura problema 5.34

5.35 La leva circular se monta excéntricamente respecto al cojinete fijo en O y gira con velocidad angular constante ω en sentido antihorario. La leva hace que la horquilla A y la barra de mando unida a ella oscilen en la dirección horizontal x. Escribir las expresiones de la velocidad v_x y la aceleración a_x de la barra de mando en función del ángulo θ, medido éste desde la vertical. Las superficies de contacto de la horquilla son verticales.

Resp. $v_x = e\omega \cos\theta$, $a_x = -e\omega^2 \operatorname{sen}\theta$

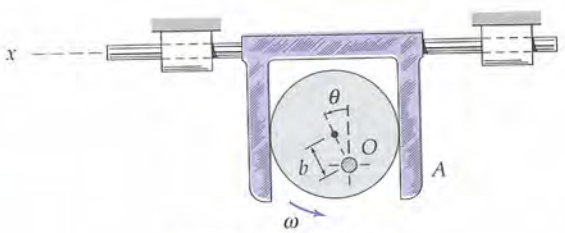


Figura problema 5.35

5.36 La rotación de la palanca OA la gobierna el movimiento del disco circular en contacto con ella, a cuyo centro se comunica una velocidad horizontal v. Hallar la expresión de la velocidad angular ω de OA en función de x.

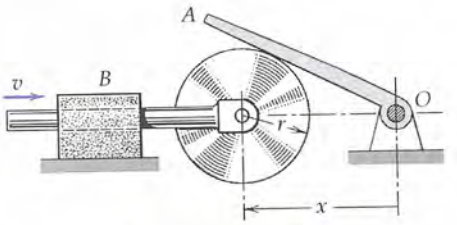


Figura problema 5.36

5.37 El cable del tambor A pone en movimiento a la rueda doble B, la cual gira sin deslizamiento sobre el cubo. Hallar la velocidad angular ω y la aceleración angular α del tambor C en el instante en que la velocidad y la aceleración angulares de A sean 4 rad/s y 3 rad/s^2, respectivamente, ambas en sentido antihorario.

Resp. $\omega = \frac{4}{3}$ rad/s AH, $\alpha = 1$ rad/s^2 AH

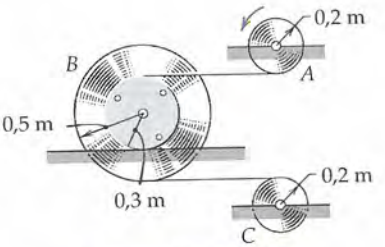


Figura problema 5.37

5.38 La rueda de la figura gira sin deslizamiento y su centro O posee una velocidad constante v_O dirigida hacia la derecha. Tras elegir adecuadamente un sistema de referencia fijo en el que expresar las coordenadas del punto A, deducir las expresiones de la velocidad v_A y la aceleración a_A del punto A en función de r, θ y v_O

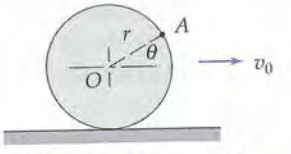


Figura problema 5.38

http://gratislibrospdf.com/

5.39 La biela telescópica está articulada en O y su extremo A recibe una velocidad ascendente constante de 200 mm/s del émbolo del cilindro hidráulico B. Calcular la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la aceleración angular $\ddot{\theta}$ de la biela OA en el instante en que $y = 600$ mm.

Resp. $\dot{\theta} = 0{,}1639$ rad/s, $\ddot{\theta} = -0{,}0645$ rad/s^2

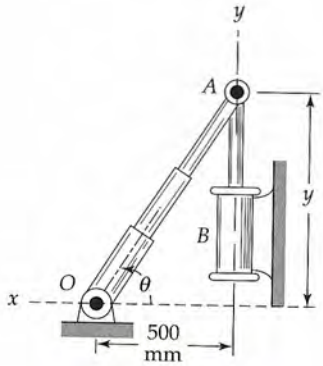


Figura problema 5.39

5.40 Deducir la expresión de la velocidad ascendente v del elevador de automóviles en función de θ. La velocidad con que se extiende el émbolo del cilindro hidráulico es $\dot{s}$.

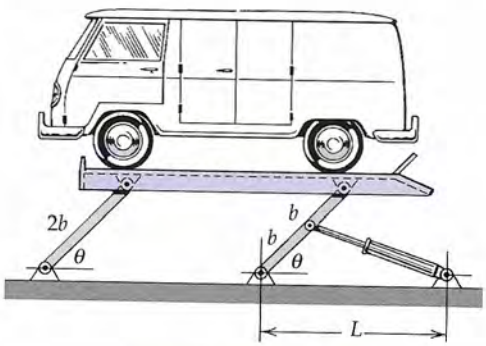


Figura problema 5.40

5.41 El film pasa por los rodillos de guía indicados y está siendo enrollado en la bobina, la cual gira a la velocidad angular constante ω. Hallar la aceleración $a = \dot{v}$ del film al pasar por los rodillos. El espesor del film es t y s es lo bastante grande para suponer despreciable la variación del ángulo que forma el film con la horizontal.

Resp. $a = \dfrac{tv^2}{2\pi r^2}$

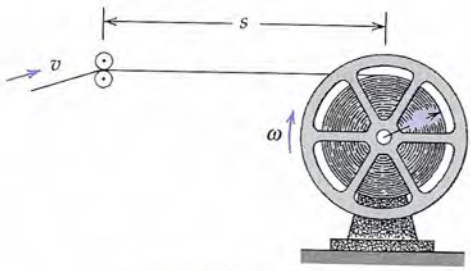


Figura problema 5.41

5.42 Hallar la aceleración del vástago B para $\theta = 60°$ si la manivela OA tiene una aceleración angular $\ddot{\theta} = 8$ rad/s^2 y una velocidad angular $\dot{\theta} = 4$ rad/s en esa posición. El resorte hace que no se pierda el contacto entre el rodillo y la cara del émbolo.

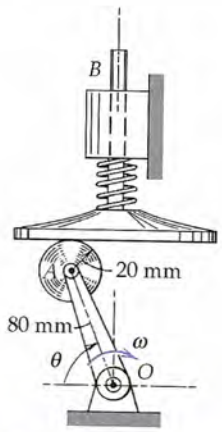


Figura problema 5.42

5.43 El cilindro hidráulico C comunica al extremo A de la biela AB una velocidad constante v_O en el sentido x negativo.

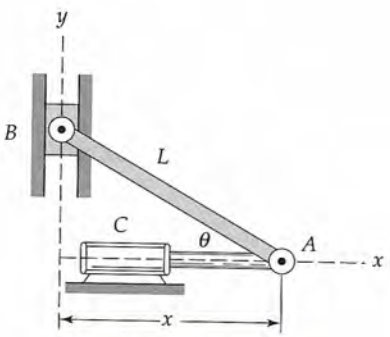


Figura problema 5.43

http://gratislibrospdf.com/

Determinar, en función de x, las expresiones de la velocidad angular $\omega = \dot{\theta}$ y de la aceleración angular $\alpha = \ddot{\theta}$ de la biela.

$$Resp.\ \omega = \frac{v_0}{\sqrt{L^2 - x^2}},\ \alpha = \frac{-xv_0^2}{(L^2 - x^2)^{3/2}}$$

5.44 El volante gira en sentido horario a 600 rpm. La biela de enlace AB se desliza por la guía oscilante C. Calcular la velocidad angular ω de AB en el instante en que $\theta = 60°$.

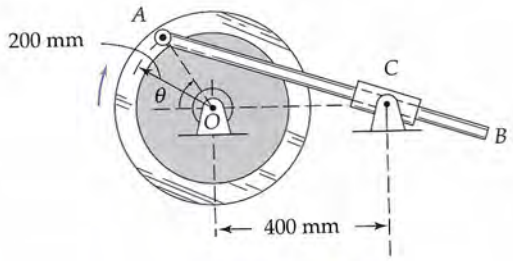


Figura problema 5.44

5.45 La barra OB se desliza por el interior del cursor articulado en A a la manivela giratoria. Si OA posee una velocidad angular $\omega = 3$ rad/s durante un intervalo de su movimiento, calcular la velocidad angular de OB cuando $\theta = 45°$.

Resp. $\omega_{OB} = 0{,}572$ rad/s AH

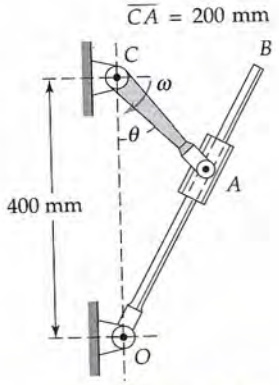


Figura problema 5.45

5.46 Cuando se activa el cilindro hidráulico, OB se alarga a razón de 0,260 m/s. Calcular la aceleración normal del punto A en su trayectoria circular en torno a C en el instante en que $\theta = 60°$.

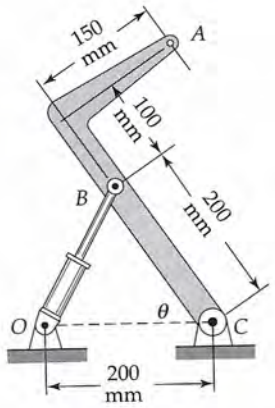


Figura problema 5.46

5.47 La rotación de la biela AO está gobernada por el émbolo del cilindro hidráulico BC, el cual se extiende a la velocidad constante $\dot{s} = k$ durante un intervalo del movimiento. Obtener la expresión vectorial de la aceleración del extremo A para un valor de θ dado empleando los vectores unitarios $\mathbf{e}_n$ y $\mathbf{e}_t$ de las coordenadas n y t.

$$Resp.\ \mathbf{a}_A = \frac{k^2 l}{b^2 \cos^2\frac{\theta}{2}}\left(\mathbf{e}_n + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\mathbf{e}_t\right)$$

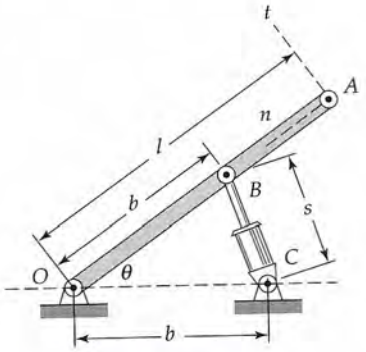


Figura problema 5.47

5.48 Una transmisión por correa de velocidad variable se compone de dos poleas cada una de las cuales está formada por dos conos que giran solidariamente, pero cuya distancia mutua puede variarse a voluntad para variar así el radio efectivo de la polea. Si la velocidad angular ω_1 de la polea 1 es constante, hallar la expresión de la aceleración angular $\alpha_2 = \dot{\omega}_2$ de la polea 2 en función de las variaciones por unidad de tiempo $\dot{r}_1$ y $\dot{r}_2$ de los radios efectivos.

http://gratislibrospdf.com/

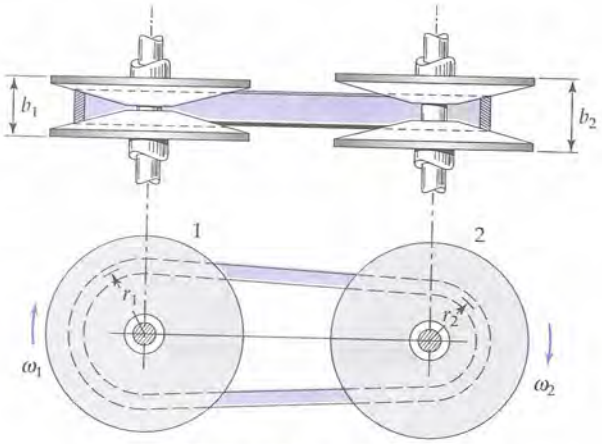


Figura problema 5.48

5.49 En el instante en que $y = 200$ mm, el émbolo del cilindro hidráulico C comunica al pasador A un movimiento vertical definido por $\dot{y} = 400$ mm/s e $\ddot{y} = -100$ mm/s^2. Determinar, para ese instante, la velocidad angular ω y la aceleración angular α de la biela AB.

Resp. $\omega = 1{,}155$ rad/s AH, $\alpha = 0{,}481$ rad/s^2 AH

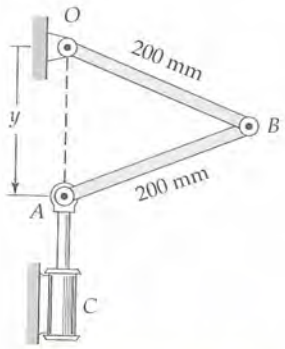


Figura problema 5.49

5.50 El brazo ranurado oscila en torno a O y mantiene la relación entre los movimientos de los cursores A y B y sus varillas de mando. Cada uno de los pequeños bloques puede girar en torno al pasador que lo une a su respectivo cursor y está limitado a moverse por su ranura correspondiente. Demostrar que el desplazamiento x es inversamente proporcional a y. Establecer seguidamente la relación entre las velocidades v_A y v_B. Además, si v_A es constante durante un corto intervalo del movimiento, hallar la aceleración de B.

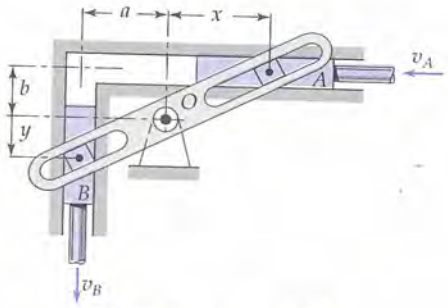


Figura problema 5.50

5.51 Para las condiciones del problema 5.46, hallar la componente tangencial de la aceleración del punto A en su trayectoria circular alrededor de C en el instante en que $\theta = 60°$.

Resp. $(a_A)_t = 0{,}218$ m/s^2

5.52 Demostrar que las expresiones $v = r\omega$ y $a_t = r\alpha$ son válidas para el movimiento del centro O de la rueda cuando va rodando sobre el arco de circunferencia, donde ω y α son la velocidad y aceleración angulares absolutas, respectivamente, de la rueda. (*Indicación*: Siguiendo el ejemplo presentado en el problema tipo 5.4, hacer que la rueda se desplace una pequeña distancia. Poner atención para establecer correctamente el ángulo *absoluto* girado por la rueda al determinar la velocidad y la aceleración angulares de ésta.)

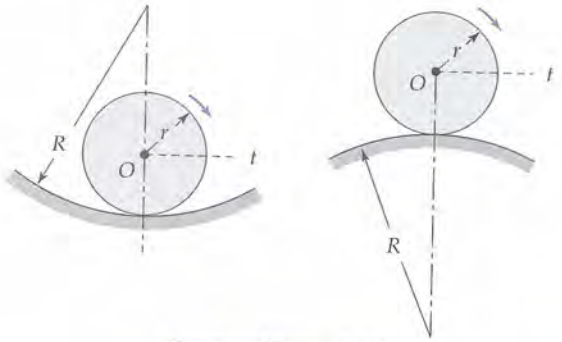


Figura problema 5.52

▶ **5.53** La Cruz de Malta es un mecanismo destinado a producir una rotación intermitente. La clavija P montada en el plato motor A, del que es solidaria la placa B, penetra en las ranuras radiales de la cruz C y hace que ésta dé un cuarto de vuelta por cada vuelta de la clavija. En la posición representada es $\theta = 45°$. Para una velocidad angular horaria constante $\omega_1 = 2$ rad/s del plato motor A, hallar la correspondiente velocidad angular antihoraria $\omega_2 =$ de la cruz C en $\theta = 20°$. (Obsérvese que durante cada acoplo el movimiento está regido por la geometría del triángulo O_1O_2P de ángulo θ variable.)

Resp. $\omega_2 = 1{,}923$ rad/s

http://gratislibrospdf.com/

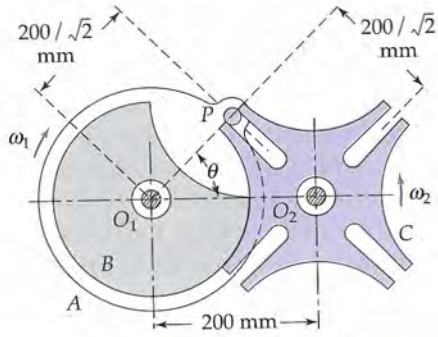


Figura problema 5.53

▶ 5.54 La varilla AB se desliza por la guía oscilante a la vez que su extremo A se desplaza por la ranura. Si A parte del reposo en $x = 0$ y se mueve hacia la derecha con una aceleración constante de 0,1 m/s^2, calcular la aceleración angular de AB en el instante en que $x = 150$ mm.

Resp. $\alpha = 0{,}1408$ rad/s^2 AH

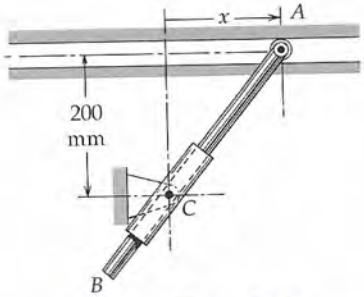


Figura problema 5.54

▶ 5.55 El punzón es accionado por la placa en forma de sector circular que ejecuta un movimiento armónico simple dado por $\theta = \theta_0$ sen $2\pi t$, donde la amplitud es $\theta_0 = \pi/12$ rad (15°) y una oscilación completa dura un segundo. Hallar la aceleración del punzón cuando (*a*) $\theta = 0$ y (*b*) $\theta = \pi/12$.

Resp. (*a*) $a = 0{,}909$ m/s^2 (hacia arriba),
(*b*) $a = 0{,}918$ m/s^2 (hacia abajo)

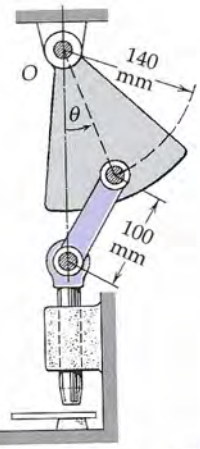


Figura problema 5.55

▶ 5.56 El conjunto biela-manivela es una de los mecanismos más comunes. Expresar la velocidad angular ω_{AB} y la aceleración angular ω_{AB} de la biela AB en función del ángulo de manivela θ para una celeridad de manivela constante ω_0. Tómense ω_{AB} y α_{AB} positivos en sentido antihorario.

$$\textit{Resp. } \omega_{AB} = \frac{r\omega_0}{l}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{r\omega_0^2}{l}\operatorname{sen}\theta\frac{\frac{r^2}{l^2}-1}{\left(1-\frac{r^2}{l^2}\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}}$$

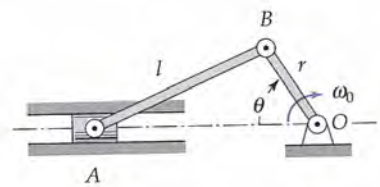


Figura problema 5.56

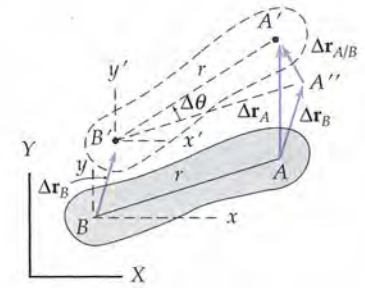
5.4 VELOCIDAD RELATIVA

Otro procedimiento para abordar la cinemática de los cuerpos rígidos se basa en las fórmulas del movimiento relativo. Éstas se desarrollaron en el apartado 2.8 para observaciones realizadas desde ejes en traslación y la ecuación de las velocidades relativas

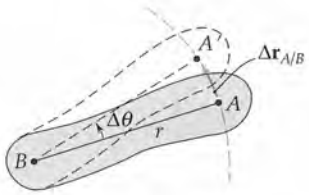
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \qquad (2.20)$$

se aplicó a los movimientos de dos puntos materiales.

http://gratislibrospdf.com/

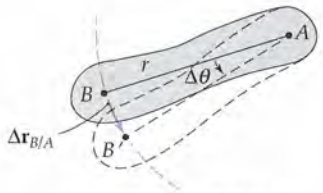


(a)



Movimiento relativo a B

(b)



Movimiento relativo a A

(c)

Figura 5.5

Ahora vamos a tomar dos puntos pertenecientes al *mismo* cuerpo rígido. La consecuencia de ello será que el movimiento de uno de los puntos, visto por un observador que se mueva solidariamente con el otro punto, deberá ser circular, puesto que la distancia radial entre ambos puntos no varía. Esta observación es la *clave* para hacerse con una gran mayoría de los problemas relacionados con el movimiento plano de cuerpos rígidos. La idea se ilustra en la figura 5.5*a* y en ésta se representa un cuerpo rígido que se mueve en el plano de la figura cambiando su posición de AB a $A'B'$ en un tiempo Δt. Este movimiento podemos imaginarlo como si se desarrollara en dos fases. En la primera de éstas el cuerpo sufriría un desplazamiento $\Delta\mathbf{r}_B$ que lo trasladaría, paralelamente a sí mismo, hasta la posición $A''B'$; en la segunda, el cuerpo rotaría un ángulo $\Delta\theta$ en torno a B'. Este segundo movimiento, observado desde los ejes de referencia no giratorios x'-y' fijos en el punto de referencia B', se vería como una rotación simple alrededor de B'que daría lugar al desplazamiento $\Delta\mathbf{r}_{A/B}$ de A respecto a B. Para el observador no giratorio vinculado a B, el cuerpo parecería sufrir una rotación alrededor de un eje fijo que pasase por B, ejecutando A un movimiento circular tal como se resalta en la figura 5.5*b*. Por tanto, las relaciones del movimiento circular obtenidas en los apartados 2.5 y 5.2 y mencionadas como ecuaciones 2.11 y 5.2 (o 5.3) describen la parte relativa del movimiento de A.

Arbitrariamente hemos fijado en B los ejes no giratorios. Del mismo modo podríamos haberlos fijado en A, en cuyo caso se habría observado a B ejecutando un movimiento circular alrededor de A, el cual se consideraría fijo tal como se ilustra en la figura 5.5*c*. Vemos que el sentido de giro, antihorario en este caso, es el mismo se tome A o B como referencia y que $\Delta\mathbf{r}_{B/A} = -\Delta\mathbf{r}_{A/B}$.

Si es B el punto de referencia, en la figura 5.5*a* se ve que el desplazamiento total de A es

$$\Delta\mathbf{r}_A = \Delta\mathbf{r}_B + \Delta\mathbf{r}_{A/B}$$

donde el módulo de $\Delta\mathbf{r}_{A/B}$ tiende a $r\Delta\theta$ cuando $\Delta\theta$ tiende a cero. Obsérvese que el *movimiento lineal relativo* $\Delta\mathbf{r}_{A/B}$ está acompañado por el *movimiento angular relativo* $\Delta\theta$, observado desde los ejes en traslación x'-y'. Dividiendo la expresión de $\Delta\mathbf{r}_A$ por el correspondiente intervalo de tiempo Δt y pasando al límite, resulta la ecuación de la velocidad relativa

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \tag{5.4}$$

que es la misma que la 2.20, con la salvedad de que la distancia entre A y B permanece constante. Por ello, vemos que el módulo de la velocidad relativa es $v_{A/B} = \lim_{\Delta t \to 0}(|\Delta\mathbf{r}_{A/B}|/\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0}(r\Delta\theta/\Delta t)$ que, con $\omega = \dot{\theta}$, se hace

$$v_{A/B} = r\omega \tag{5.5}$$

Si en la primera de las ecuaciones 5.3 representamos por $\mathbf{r}$ al vector $\mathbf{r}_{A/B}$ podemos escribir que la velocidad relativa es el vector

$$\mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{5.6}$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es el vector velocidad angular normal al plano del movimiento, cuyo sentido está dado por la regla de la mano derecha. Una observación de gran trascendencia que puede hacerse a la vista de las figuras 5.5*b* y *c* es que la ve-

http://gratislibrospdf.com/

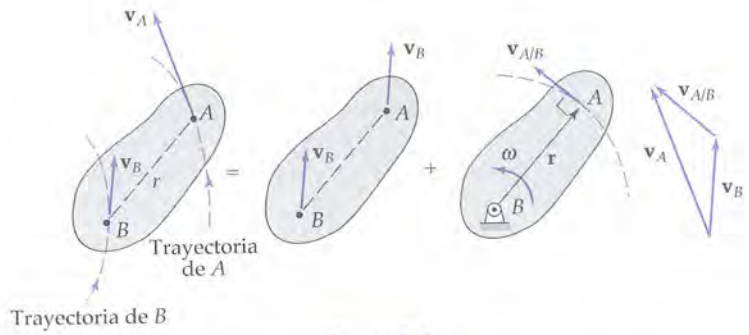


Figura 5.6

locidad lineal relativa es siempre perpendicular a la recta que une los dos puntos en cuestión.

El significado de la ecuación 5.4 puede quedar claro imaginando por separado las componentes de traslación y rotación de la misma. Estas componentes se resaltan en la figura 5.6 que representa a un cuerpo rígido en movimiento plano. Tomando B como punto de referencia, la velocidad de A es la suma vectorial de la parte de traslación $\mathbf{v}_B$ más la parte de rotación $\mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, cuyo módulo es $v_{A/B} = r\omega$ y donde $|\boldsymbol{\omega}| = \dot{\theta}$ es la velocidad angular *absoluta* de AB. El hecho de que la *velocidad lineal absoluta* sea *siempre perpendicular* a la recta que une los dos puntos en cuestión constituye una clave importante para resolver numerosos problemas. El lector deberá dibujar el diagrama equivalente en el que A se emplea en lugar de B como punto de referencia.

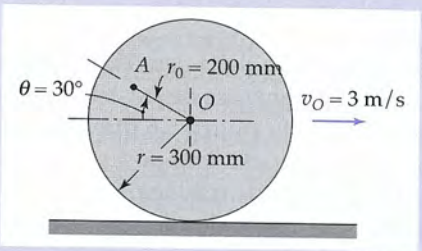
Una segunda aplicación de la ecuación 5.4 a problemas planos de velocidades relativas puede ser para el movimiento deslizante de dos articulaciones de un mecanismo que estén vinculadas entre sí. En estos casos, los puntos A y B se toman uno en una cada articulación y coincidentes en el instante considerado. Al revés que en el ejemplo previo, en este caso los dos puntos están en cuerpos distintos y, por lo tanto, no a una distancia fija. Esta segunda utilización se ilustra en el problema tipo 5.10.

Para resolver la ecuación de la velocidad relativa se puede recurrir al álgebra escalar o al álgebra vectorial, o puede hacerse gráficamente. Cualquiera que sea el caso, debe hacerse un esquema del polígono de vectores, que representa la ecuación vectorial, para poner de manifiesto las relaciones físicas que intervienen en el problema. A partir de este esquema pueden escribirse ecuaciones escalares proyectando los vectores sobre direcciones convenientemente elegidas; generalmente, podrá evitarse la redundancia en la resolución eligiendo con cuidado las proyecciones. Otro procedimiento consiste en escribir todos los términos de la ecuación en función de sus componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, con lo que resultarán dos ecuaciones escalares cuando se imponga la condición de igualdad por separado a los coeficientes de términos en $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Numerosos problemas se prestan a una solución gráfica, especialmente cuando su geometría dé por resultado una expresión matemática poco manejable. En estos casos se construyen primero los vectores conocidos en sus posiciones correctas, utilizando una escala adecuada, y después se miden directamente sobre el dibujo los vectores desconocidos, que completarán el polígono y satisfarán la ecuación vectorial. La elección del procedimiento a seguir depende de cada problema concreto, de la precisión pedida y de las preferencias y experiencia individuales. En los problemas tipo que siguen se ilustran los tres procedimientos.

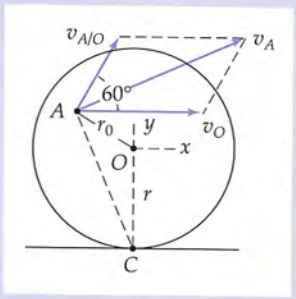
http://gratislibrospdf.com/

Independientemente del procedimiento de resolución que se siga, se tendrá siempre en cuenta que la sencilla ecuación vectorial que se maneja en dos dimensiones equivale a dos ecuaciones escalares, por lo que puede resolverse para hallar dos incógnitas escalares. Estas incógnitas pueden ser, por ejemplo, el módulo de un vector y la dirección de otro. Antes de intentar resolver un problema deben identificarse sistemáticamente todos los datos y todas las incógnitas.

PROBLEMA TIPO 5.7



La rueda de radio $r = 300$ mm gira sin deslizamiento hacia la derecha teniendo su centro O una velocidad $v_0 = 3$ m/s. Calcular la velocidad del punto A de la rueda en el instante representado.



Solución I (geométrico-escalar). Como conocemos su movimiento, tomamos el centro O como punto de referencia de la ecuación de la velocidad relativa. Por tanto, escribimos

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O - \mathbf{v}_{A/O}$$

donde la velocidad relativa se observa desde los ejes en traslación x-y fijos en O. La velocidad angular de AO es la misma que la de la rueda y ésta, según el problema tipo 5.4, es $\omega = v_O/r = 3/0{,}3 = 10$ rad/s. Entonces, según la ecuación 5.5, tenemos

$$[v_{A/O} = r_0\dot{\theta}] \qquad v_{A/O} = 0{,}2(1{,}0) = 2 \text{ m/s}$$

(1) que es normal a AO tal como se indica. En el diagrama se representa el vector suma $\mathbf{v}_A$ cuyo módulo puede calcularse por el teorema del coseno. O sea,

(2) $$v_A^2 = 3^2 + 2^2 + 2(3)(2)\cos 60° = 19 \text{ (m/s)}^2 \qquad v_A = 4{,}36 \text{ m/s} \quad \textit{Resp.}$$

En el instante considerado, la velocidad del punto de contacto C es nula y puede utilizarse también como punto de referencia, en cuyo caso la ecuación de la velocidad relativa pasa a ser $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{A/C}$, donde

$$v_{A/C} = \overline{AC}\,\omega = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}}v_0 = \frac{0{,}436}{0{,}300}(3) = 4{,}36 \text{m/s} \qquad v_A = v_{A/C} = 4{,}36 \text{ m/s}$$

La distancia $\overline{AC} = 436$ mm se calcula por separado. Vemos que $\mathbf{v}_A$ es normal a
(3) AC ya que A gira por un instante alrededor del punto C.

Solución II (vectorial). Aquí empleamos la ecuación 5.6 para escribir

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0$$

(1) **Hay que asegurarse de imaginar bien $v_{A/O}$ como la velocidad que A aparenta tener en su movimiento circular relativo a O.**

(2) **También podrían haberse dibujado a escala los vectores y medido el ángulo y la dirección de v_A directamente sobre el diagrama.**

(3) **Utilizando C como punto de referencia, puede determinarse fácilmente la velocidad de cualquier punto de la rueda. Recomendamos al lector que, como práctica, construya los vectores velocidad de varios puntos de la rueda.**

http://gratislibrospdf.com/

donde

$$\boldsymbol{\omega} = -10\mathbf{k} \text{ rad/s}$$
$$\mathbf{r}_0 = 0{,}2(-\mathbf{i}\cos 30^\circ + \mathbf{j}\,\text{sen}\,30^\circ) = -0{,}173\mathbf{i} + 0{,}1\mathbf{j} \text{ m}$$
$$\mathbf{v}_O = 3\mathbf{i} \text{ m/s}$$

④ El vector ω está dirigido hacia dentro del papel, según la regla de la mano derecha, mientras que la dirección z positiva es hacia fuera del papel y de ahí el signo menos.

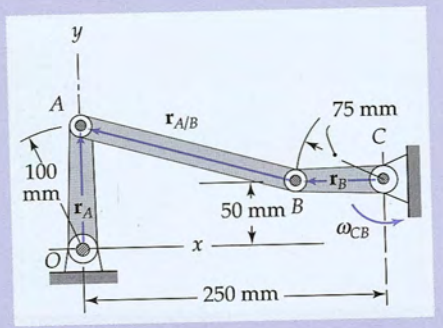
Ahora resolvemos la ecuación vectorial

$$\mathbf{v}_A = 3\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -10 \\ -0{,}173 & 0{,}1 & 0 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 1{,}73\mathbf{j} + 1{,}0\mathbf{i}$$
$$= 4\mathbf{i} + 1{,}73\mathbf{j} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

El módulo de v_A es $v_A = \sqrt{4^2 + (1{,}73)^2} = \sqrt{19} = \sqrt{4{,}36}$ m/s y su dirección concuerda con la solución anterior.

PROBLEMA TIPO 5.8

La manivela CB oscila en torno a C describiendo un arco limitado y haciendo que la manivela OA oscile en torno a O. Cuando la biela pasa por la posición representada, en que CB está horizontal y OA vertical, la velocidad angular de CB es 2 rad/s en sentido antihorario. Hallar las velocidades angulares de OA y AB en ese instante.



Solución I (vectorial). La ecuación de la velocidad relativa $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ volvemos a escribirla como sigue,

$$\boldsymbol{\omega}_{OA} \times \mathbf{r}_A = \boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

① Aquí empleamos la primera de las ecuaciones 5.3 y la ecuación 5.6.

donde $\boldsymbol{\omega}_{OA} = \omega_{OA}\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega}_{CB} = 2\mathbf{k}$ rad/s, $\boldsymbol{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}_A = 100\mathbf{j} \text{ mm} \qquad \mathbf{r}_B = -75\mathbf{i} \text{ mm} \qquad \mathbf{r}_{A/B} = -175\mathbf{i} + 50\mathbf{j} \text{ mm}$$

Sustituyendo resulta

$$\omega_{OA}\mathbf{k} \times 100\mathbf{j} = 2\mathbf{k} \times (-75\mathbf{i}) + \omega_{Ab}\mathbf{k} \times (-175\mathbf{i} + 50\mathbf{j})$$
$$-100\omega_{OA}\mathbf{i} = -150\mathbf{j} - 175\omega_{AB}\mathbf{j} - 50\omega_{AB}\mathbf{i}$$

Igualando los respectivos coeficientes de **i** y **j** resulta

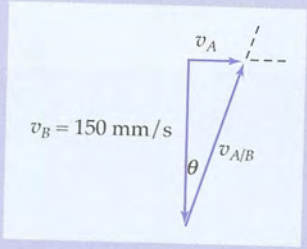
$$-100\omega_{OA} + 50\omega_{AB} = 0 \qquad 25(6 + 7\omega_{AB}) = 0$$

http://gratislibrospdf.com/

cuyas raíces son

② El sino menos de los resultados indica que el sentido de los vectores ω_{AB} y ω_{OA} es el k negativo y, por ello, las velocidades angulares son de sentido horario.

② $$\omega_{AB} = -6/7 \text{ rad/s} \qquad \text{y} \qquad \omega_{OA} = -3/7 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$



Solución II (geométrico-escalar). En este caso, la resolución escalar utilizando la geometría del triángulo de vectores resulta especialmente sencilla, ya que $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ forman un ángulo recto en la posición considerada del sistema. Primero calculamos v_{AB}, que es

$$[v = r\omega] \qquad v_B = 0{,}075(2) = 0{,}150 \text{ m/s}$$

y la representamos, tal como se muestra, en su sentido correcto. El vector $\mathbf{v}_{A/B}$ debe ser perpendicular a AB y el ángulo θ entre $\mathbf{v}_{A/B}$ y $\mathbf{v}_B$ es también el ángulo que forma AB con la horizontal. Este ángulo está dado por

$$\text{tg } \theta = \frac{100 - 50}{250 - 75} = \frac{2}{7}$$

③ Comprobar siempre que el orden en que están los vectores en el triángulo concuerda con la igualdad entre vectores especificada por la ecuación vectorial.

③ El vector horizontal $\mathbf{v}_A$ completa el triángulo, para el que tenemos

$$v_{A/B} = v_B/\cos\theta = 0{,}150/\cos\theta$$
$$v_A = v_B \text{ tg } \theta = 0{,}150(2/7) = 0{,}30/7 \text{ m/s}$$

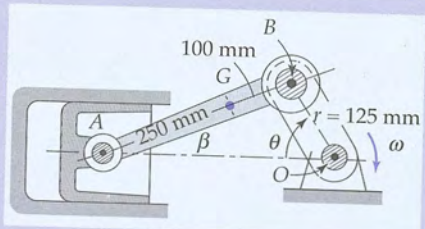
Las velocidades angulares resultan

$$[\omega = v/r] \qquad \omega_{AB} = v_{A/B}/\overline{AB} = \frac{0{,}150}{\cos\theta}\frac{\cos\theta}{0{,}250 - 0{,}075}$$
$$= 6/7 \text{ rad/s H} \qquad \textit{Resp.}$$

$$[\omega = v/r] \qquad \omega_{OA} = v_A/\overline{OA} = \frac{0{,}30}{7}\frac{1}{0{,}100} = 3/7 \text{ rad/s H} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 5.9

La configuración habitual de los motores alternativos es la de biela-cigüeñal representada. Si el cigüeñal OB gira a 1500 rpm en sentido horario, para la posición $\theta = 60°$ hallar la velocidad del pistón A, la velocidad del punto G de la biela y la velocidad angular de ésta



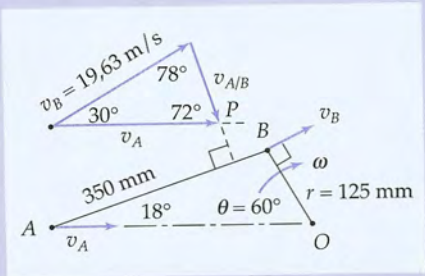
Solución. La velocidad del punto B de la muñequilla considerado como perteneciente a AB se determina fácilmente, por lo cual emplearemos B como punto de referencia para hallar la velocidad de A. Entonces, la ecuación de la velocidad relativa puede escribirse

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

http://gratislibrospdf.com/

La velocidad de la muñequilla es

$$[v = r\omega] \qquad v_B = 0{,}125\,\frac{1500(2\pi)}{60} = 19{,}63\ \text{m/s}$$



normal a OB. La velocidad $\mathbf{v}_A$ está dirigida, desde luego, a lo largo del eje del cilindro horizontal. La dirección de $\mathbf{v}_{A/B}$ debe ser perpendicular a la recta AB, tal como se expuso en este apartado y se muestra en el diagrama, en el cual el punto de referencia B se representa como fijo. Esta dirección la obtenemos calculando el ángulo β mediante el teorema de los senos, lo que nos da

$$\frac{125}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{350}{\operatorname{sen} 60^\circ} \qquad \beta = \operatorname{arcsen} 0{,}3093 = 18{,}0^\circ$$

Ahora ya podemos completar el esquema del triángulo de velocidades en el que $\mathbf{v}_{A/B}$ y $\mathbf{v}_A$ forman un ángulo de $90° - 18{,}0° = 72{,}0°$ y el tercer ángulo es $180° - 30° - 72{,}0° = 78{,}0°$. Los vectores $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_{A/B}$ se representan con sus sentidos correctos de tal modo que $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_{A/B}$ colocados uno tras otro, origen con extremo, dan $\mathbf{v}_A$. Los módulos de los vectores desconocidos se determinan por la trigonometría del triángulo de vectores o simplemente se miden a escala en el dibujo si nos basta la solución gráfica. Aplicando el teorema de los senos y despejando v_A y $v_{A/B}$ resulta

$$\frac{v_A}{\operatorname{sen} 78{,}0^\circ} = \frac{19{,}63}{\operatorname{sen} 72{,}0^\circ} \qquad v_A = 20{,}2\ \text{m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\frac{v_{A/B}}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{19{,}63}{\operatorname{sen} 72{,}0^\circ} \qquad v_{A/B} = 10{,}32\ \text{m/s}$$

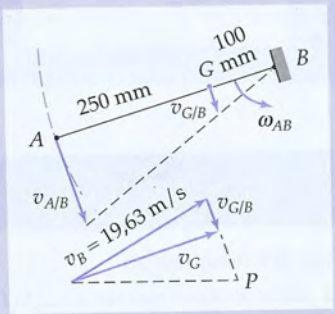
La velocidad angular de AB es antihoraria, tal como revela el sentido de $\mathbf{v}_{A/B}$, y su valor es

$$[\omega = v/r] \qquad \omega_{AB} = \frac{v_{A/B}}{\overline{AB}} = \frac{10{,}32}{0{,}350} = 29{,}5\ \text{rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Ahora la velocidad de G podemos determinarla escribiendo

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{G/B}$$

donde $v_{G/B} = \overline{GB}\,\omega_{AB} = \dfrac{\overline{GB}}{\overline{AB}} v_{A/B} = \dfrac{100}{350}(10{,}32) = 2{,}95\ \text{m/s}$



Tal como se ve en el diagrama, $\mathbf{v}_{G/B}$ y $\mathbf{v}_{A/B}$ tienen la misma dirección y sentido. La suma de los vectores puede verse en el último diagrama. Podemos calcular v_G por consideraciones geométricas o simplemente medirlo en el diagrama de velocidades dibujado a escala. Por su sencillez, seguimos este último procedimiento y obtenemos

$$v_G = 19{,}24\ \text{m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

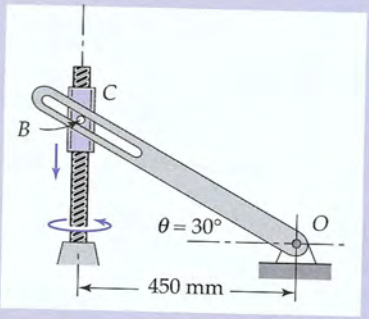
Véase que este diagrama puede superponerse directamente al primer diagrama de velocidades.

(1) Recuérdese que al usar $v = r\omega$ es preciso poner ω en radianes por unidad de tiempo.

(2) Para este problema, el procedimiento más rápido es el gráfico, aunque su precisión sea limitada. Por supuesto, puede aplicarse el álgebra vectorial pero en este problema ello supone más trabajo.

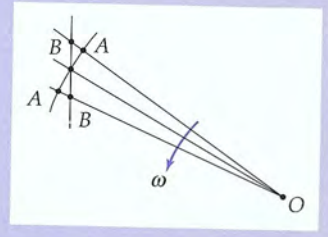
http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMA TIPO 5.10

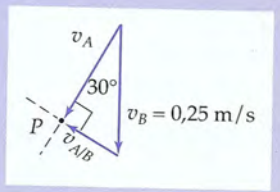


El husillo gira de tal modo que el collarín roscado C se desplaza hacia abajo a 0,25 m/s. Hallar la velocidad angular del brazo ranurado cuando $\theta = 30°$.

① **Desde luego, tal punto no existe físicamente, pero podemos imaginarlo en el centro de la ranura y ligado al brazo.**



② **Identificar siempre los datos y las incógnitas antes de iniciar la resolución de una ecuación vectorial.**



Solución. Si conocemos la velocidad de algún punto del brazo podremos determinar la velocidad angular de éste. Para ello, tomemos un punto A del brazo ① coincidente con el pasador B del collarín. Si utilizamos B como punto de referencia y escribimos $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$, en un diagrama que represente al brazo y a los puntos A y B un instante antes y un instante después de la coincidencia, veremos que $\mathbf{v}_{A/B}$ está dirigida a lo largo de la ranura alejándose de O.

② Como las únicas incógnitas de la ecuación son los módulos de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_{A/B}$, esta ecuación puede resolverse. Entonces, dibujamos el vector conocido $\mathbf{v}_B$ y obtenemos seguidamente el punto P de intersección de la direcciones conocidas de $\mathbf{v}_{A/B}$ y $\mathbf{v}_A$. La solución es

$$v_A = v_B \cos\theta = 0{,}25 \cos 30° = 0{,}217 \text{ m/s}$$

$$[\omega = v/r] \qquad \omega = v_A/\overline{OA} = \frac{0{,}217}{0{,}450/\cos 30°}$$

$$= 0{,}417 \text{ rad/s AH} \qquad \textit{Resp.}$$

Obsérvese la diferencia entre este problema, en que existe un contacto deslizante entre los dos elementos del sistema, y los tres problemas tipo precedentes en los que no había contacto deslizante alguno y donde, en todos los casos, los puntos A y B estaban situados en el mismo cuerpo rígido.

PROBLEMAS

Problemas introductorios

5.57 La plataforma se mueve a 1,2 m/s hacia la derecha. Determinar la velocidad de rotación N del disco para que el punto más alto A de la periferia tenga una velocidad (*a*) de 1,2 m/s hacia la izquierda, (*b*) nula y (*c*) de 2,4 m/s hacia la derecha.

Resp. (*a*) $N = 91{,}7$ rpm AH
(*b*) $N = 45{,}8$ rpm AH
(*c*) $N = 45{,}8$ rpm H

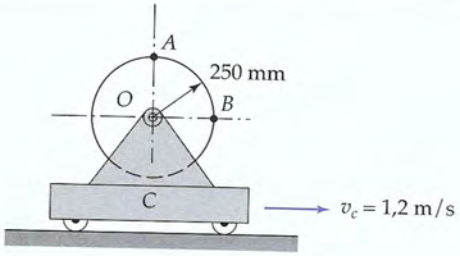


Figura problema 5.57

5.58 Cuando el punto A del neumático de un automóvil se encuentra en la posición indicada, el módulo de su velocidad

http://gratislibrospdf.com/

absoluta es 2 m/s. ¿Cuál es la velocidad correspondiente v_0 del automóvil y la velocidad angular ω de la rueda? (La rueda gira sin resbalamiento.)

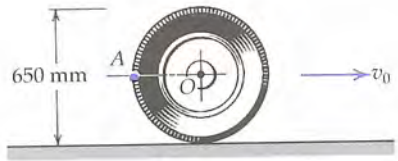


Figura problema 5.58

5.59 Un elemento de control de un mecanismo especial se mueve en el plano de la figura. Si, en cierto instante, la velocidad de B respecto a A tiene un módulo de 0,926 m/s, ¿cuál será el módulo de la correspondiente velocidad de C respecto a D?

Resp. $v_{C/D} = 0{,}579$ m/s

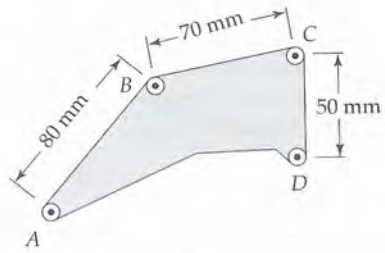


Figura problema 5.59

5.60 Si v_A y v_B son las velocidades instantáneas de los respectivos extremos de la barra rígida, demostrar que la velocidad angular de la misma está dado por $(v_A \operatorname{sen}\theta + v_B \operatorname{sen}\beta)/L$ y que $v_A \cos\theta = v_B \cos\beta$.

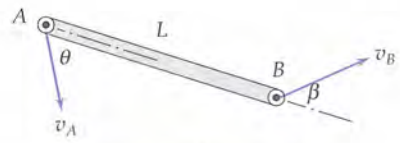


Figura problema 5.60

5.61 En el instante representado, el extremo B de la barra de 0,5 m tiene una velocidad de 3 m/s en la dirección indicada. Hallar la velocidad mínima posible del extremo A y la correspondiente velocidad angular de la barra.

Resp. $(v_A)_{\min} = 1{,}5$ m/s, $\omega_{AB} = 5{,}20$ rad/s AH

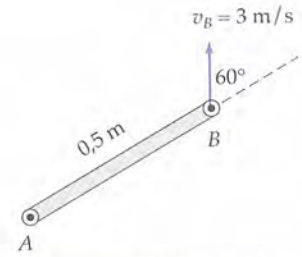


Figura problema 5.61

5.62 En el instante representado, la barra curva tiene una velocidad angular antihoraria de 4 rad/s y el rodillo B tiene una velocidad de 40 mm/s paralela a la superficie de apoyo tal como se muestra. Hallar el módulo v_A de la velocidad de A.

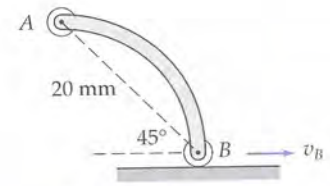


Figura problema 5.62

5.63 Si el punto B del disco del problema 5.57 tiene una velocidad de módulo 1,52 m/s, hallar la correspondiente velocidad de rotación N del disco. ¿Que puede afirmarse acerca del sentido de la rotación?

Resp. $N = 34{,}4$ rpm; H o AH

5.64 En el instante en que $\theta = 60°$, la barra acodada en ángulo recto posee una velocidad angular horaria de 3 rad/s. Expresar vectorialmente, para ese instante, la velocidad de A respecto a B.

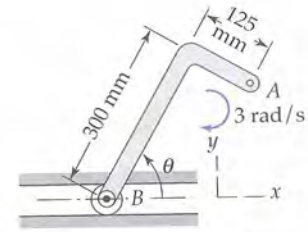


Figura problema 5.64

5.65 El disco rueda sin deslizar con la velocidad angular horaria $\omega = 4$ rad/s. Para el instante representado, escribir las ex-

http://gratislibrospdf.com/

presiones vectoriales de la velocidad de A respecto a B y de la velocidad de P.

Resp. $\mathbf{v}_{A/B} = 1{,}2(\mathbf{i} + \mathbf{j})\,\text{m/s}$

$\mathbf{v}_P = 4(0{,}3\mathbf{i} + 0{,}2\mathbf{j})\,\text{m/s}$

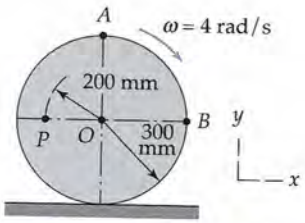


Figura problema 5.65

5.66 En el instante representado, la barra acodada en ángulo recto tiene una velocidad angular antihoraria de 3 rad/s y la velocidad del punto B es $\mathbf{v}_B = 2\mathbf{i} - 0{,}3\mathbf{j}$ m/s. Hallar la velocidad de A empleando la notación vectorial. Dibujar el polígono vectorial correspondiente a los términos que figuran en la ecuación de la velocidad relativa y estimar o medir el módulo de $\mathbf{v}_A$.

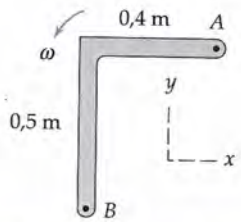


Figura problema 5.66

Problemas representativos

5.67 En el instante representado la placa triangular ABD posee una velocidad angular horaria de 3 rad/s. Determinar, para ese instante, la velocidad angular ω_{BC} de la barra BC.

Resp. $\omega_{BC} = 3$ rad/s H

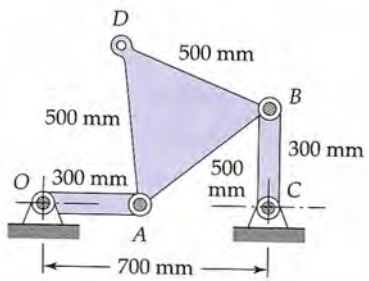


Figura problema 5.67

5.68 Hallar la velocidad angular del enlace telescópico AB en la posición representada en que las bielas de arrastre tienen las velocidades angulares que se indican.

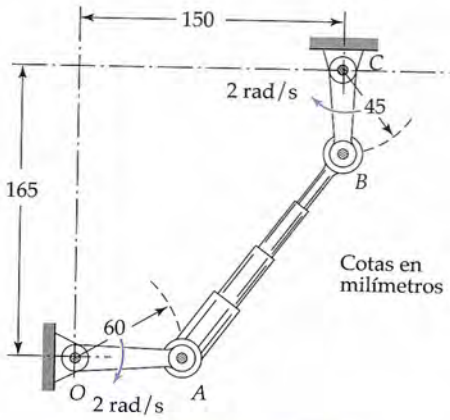


Figura problema 5.68

5.69 El ciclista pedalea a ritmo uniforme para mantener una celeridad constante de 16 km/h contra un viento frontal suave. Calcular los módulos máximo y mínimo de la velocidad absoluta del pedal A.

Resp. $(v_A)_{\max} = 5{,}33$ m/s, $(v_A)_{\min} = 3{,}56$ m/s

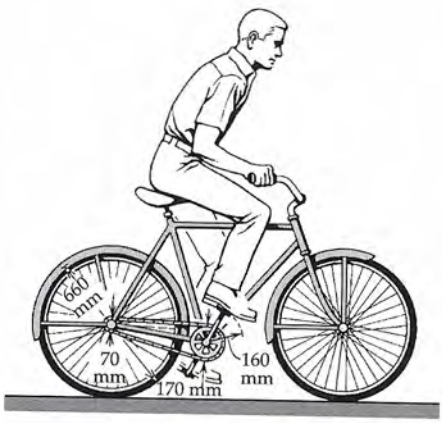


Figura problema 5.69

5.70 Durante un intervalo del movimiento el émbolo del cilindro hidráulico tiene la velocidad $v_A = 1{,}2$ m/s que se indica. En cierto instante es $\omega = \beta = 60°$. Determinar para ese instante la velocidad angular ω_{BC} de la barra BC.

http://gratislibrospdf.com/

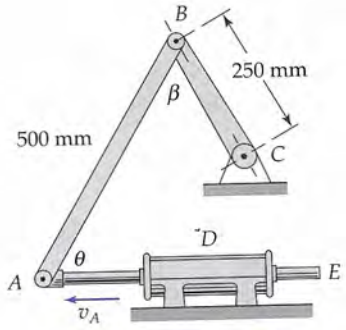


Figura problema 5.70

5.71 La rotación de la rueda dentada se controla por el movimiento del extremo A de la cremallera. Si el vástago del pistón tiene una celeridad constante $\dot{x} = 300$ mm/s durante un corto intervalo del movimiento, determinar la velocidad angular ω_0 de la rueda y la velocidad angular ω_{AB} de AB en el instante en que $x = 800$ mm.

Resp. $\omega_{AB} = 0{,}0968$ rad/s AH, $\omega_0 = 1{,}452$ rad/s H

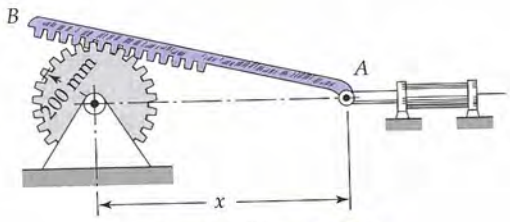


Figura problema 5.71

5.72 En el instante representado, la manivela OB tiene una velocidad angular horaria $\omega = 0{,}8$ rad/s y se encuentra en posición horizontal. Hallar la correspondiente velocidad del rodillo guía A en su ranura a 20° y la velocidad del punto C equidistante de A y B.

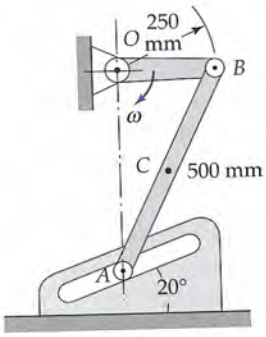


Figura problema 5.72

5.73 Las barras O_1A y O_2B controlan el movimiento de la placa triangular ABD. Hallar la velocidad angular ω de la placa y el módulo de la velocidad del punto D. El dibujo está hecho a escala y puede servir para medir longitudes y ángulos dentro de la precisión que ofrece.

Resp. $\omega \cong 1{,}03$ rad/s AH, $v_D = 315$ mm/s

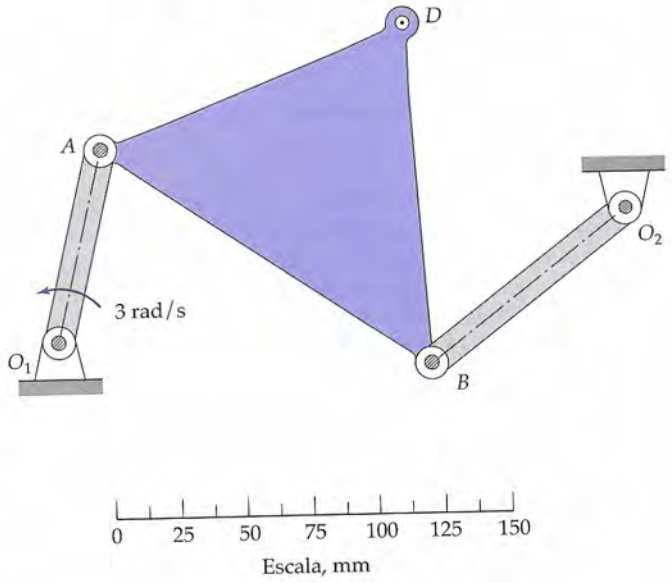


Figura problema 5.73

5.74 En la posición $x = 75$ mm la barra OA posee una velocidad angular de 2 rad/s. Hallar la velocidad del cursor B.

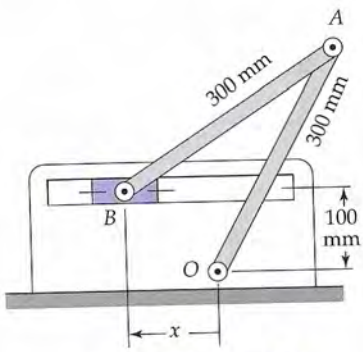


Figura problema 5.74

5.75 La barra CD se desliza por la guía articulada unida a la biela OA. Si CB posee una velocidad angular horaria de 2 rad/s, hallar la velocidad angular ω_{OA} de la biela OA cuando $\theta = 60°$.

Resp. $\omega_{OA} = 4$ rad/s H

http://gratislibrospdf.com/

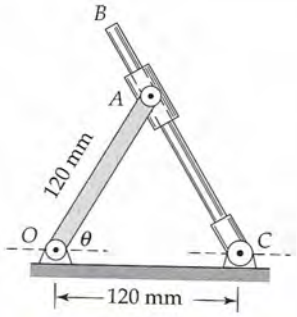


Figura problema 5.75

5.76 Se repite aquí el mecanismo del problema 5.44. El volante gira en sentido horario a 600 rpm y la biela de enlace se desliza por el interior de la guía oscilante C. Para la posición $\theta = 45°$, hallar la velocidad angular ω de AB aplicando las fórmulas de la velocidad relativa. (*Sugerencia*: Como punto de referencia del cual se conozca el sentido de su velocidad, tómese un punto D de AB coincidente con C.)

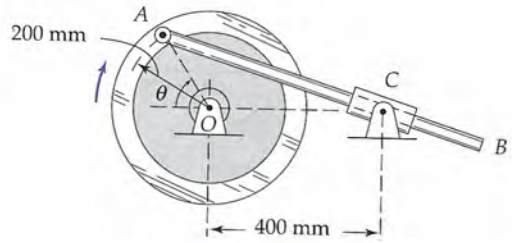


Figura problema 5.76

5.77 Para la posición indicada del sistema articulado de cuatro barras, hallar la velocidad que debe tener el punto D para que la biela AB tenga una velocidad angular antihoraria de 40 rad/s.

Resp. $v_D = 9$ m/s

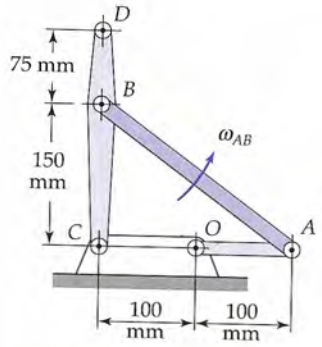


Figura problema 5.77

5.78 Los railes deslizantes A y B están en contacto sin resbalamiento con las llantas de la rueda doble. Para las velocidades indicadas de A y B, hallar la velocidad angular ω de la rueda y el módulo de la velocidad del punto P.

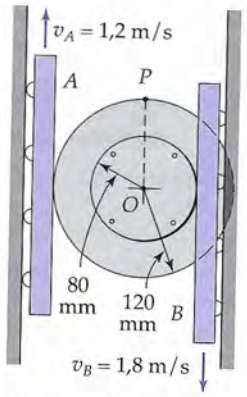


Figura problema 5.78

5.79 Se representan simplificadamente los componentes de un cucharón de draga de quijada. El cable que lo abre y lo cierra pasa por el taco-guía montado en O. Suponiendo que este punto sea fijo, hallar la velocidad angular ω de las quijadas cuando éstas están cerrándose y pasando por la posición $\theta = 45°$. La velocidad ascendente del cable es de 0,5 m/s a su paso por el taco.

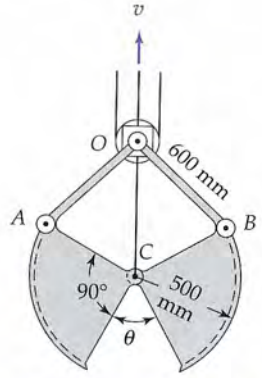


Figura problema 5.79

5.80 Se representan los elementos de un dispositivo de maniobra. Si la varilla de mando vertical tiene una velocidad descendente v de 0,9 m/s cuando $\theta = 60°$ y si el rodillo A está en contacto continuo con la superficie, hallar el módulo de la velocidad de C en ese instante.

http://gratislibrospdf.com/

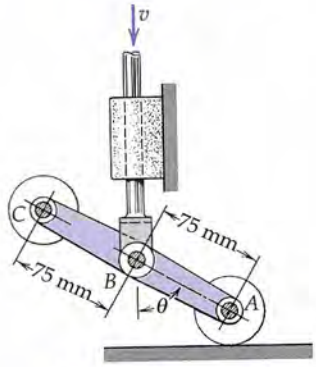


Figura problema 5.80

5.81 El movimiento de la placa rectangular P lo controlan las dos bielas que se cruzan sin tocarse. En el instante representado, en que las bielas están perpendiculares entre sí, la placa posee una velocidad angular antihoraria $\omega_P = 2$ rad/s. Hallar las correspondientes velocidades angulares de las dos bielas.

Resp. $\boldsymbol{\omega}_{AO} = 1{,}333\mathbf{k}$ rad/s, $\boldsymbol{\omega}_{BD} = 1{,}20\mathbf{k}$ rad/s

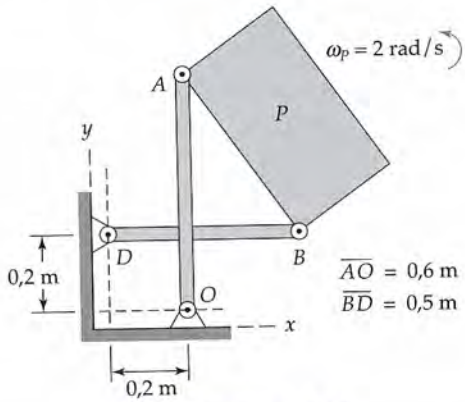


Figura problema 5.81

5.82 El mecanismo forma parte de un cerrojo en que la rotación de la barra AOB está controlado por la rotación de la pieza ranurada D en torno a C. Si la pieza D tiene una velocidad angular horaria de 1,5 rad/s cuando la ranura está paralela a OC, hallar la correspondiente velocidad angular de AOB. Resolver gráfica o geométricamente.

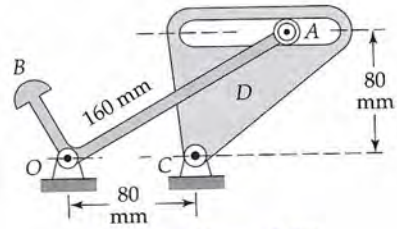


Figura problema 5.82

5.83 Se representan los elementos integrantes del mecanismo de despliegue de un brazo magnetométrico de nave espacial. Hallar la velocidad angular del brazo cuando la manivela de arrastre OB cruza el eje y con una velocidad angular $\omega_{OB} = 0{,}5$ rad/s si en ese instante tg $\theta = 4/3$.

Resp. $\boldsymbol{\omega}_{CA} = 0{,}429\mathbf{k}$ rad/s

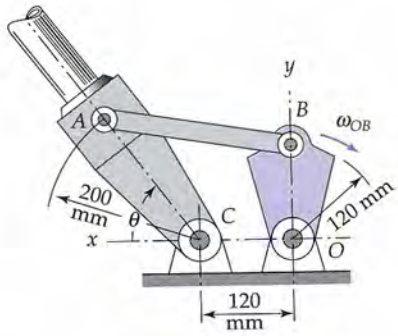


Figura problema 5.83

5.84 En el sistema articulado de tres barras, la barra de mando OA lleva una velocidad angular antihoraria $\omega_0 = 10$ rad/s durante un corto intervalo de su movimiento. Cuando la barra CB pasa por la posición vertical representada, las coordenadas del punto A son $x = -60$ mm e $y = 80$ mm. Utilizando álgebra vectorial, determinar la velocidad angular de AB y BC.

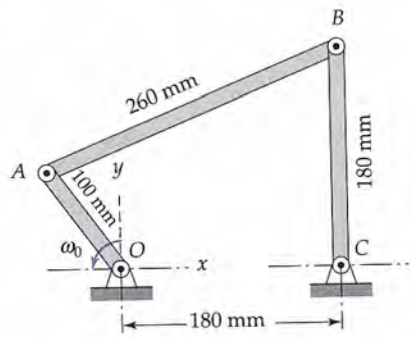


Figura problema 5.84

5.85 Se repite aquí el mecanismo de Cruz de Malta del problema 5.53. Por el método del movimiento relativo hallar la velocidad angular ω_2 de la cruz C para $\theta = 20°$. El plato A tiene una velocidad angular horaria constante $\omega_1 = 2$ rad/s.

Resp. $\omega_2 = 1{,}923$ rad/s

http://gratislibrospdf.com/

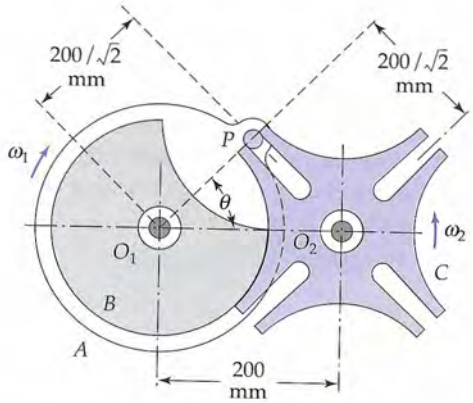


Figura problema 5.85

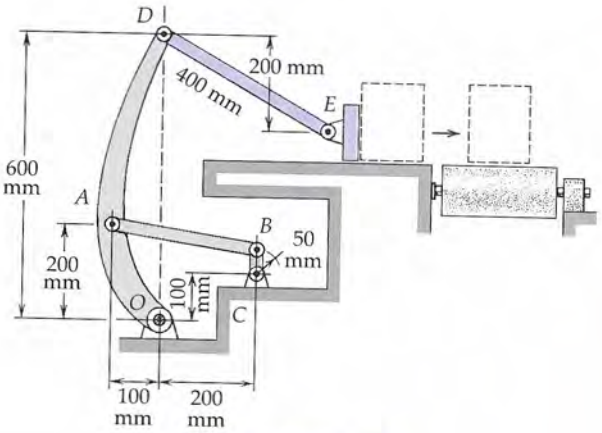


Figura problema 5.87

5.86 El movimiento de los collarines roscados A y B está gobernado por la rotación de sus respectivos husillos. Si A tiene una velocidad hacia la derecha de 75 mm/s y B tiene una velocidad hacia la izquierda de 50 mm/s cuando $x = 150$ mm, hallar la velocidad angular ω de ACD en ese instante.

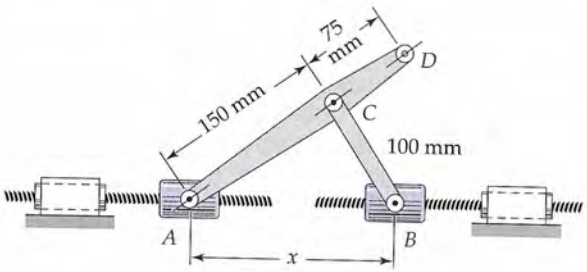


Figura problema 5.86

5.87 En la figura se ilustra un mecanismo que empuja cajas de pequeño tamaño desde una línea de montaje a una cinta transportadora en la posición en que están verticales el brazo OD y la manivela CB. Ésta gira en sentido horario a la velocidad constante de una vuelta cada dos segundos. Para la posición de la figura, hallar con qué celeridad está siendo empujada la caja hacia la cinta transportadora.

Resp. $v_E = 0{,}514$ m/s

5.88 Los extremos A y B de las barras articuladas están controlados por el movimiento vertical de los vástagos de los émbolos de los cilindros hidráulicos. Durante un corto intervalo del movimiento, A posee una velocidad ascendente de 3 m/s y C una descendente de 2 m/s. Hallar la velocidad de B en el instante en que $y = 150$ mm.

Resp. $v_B = 3{,}97$ m/s

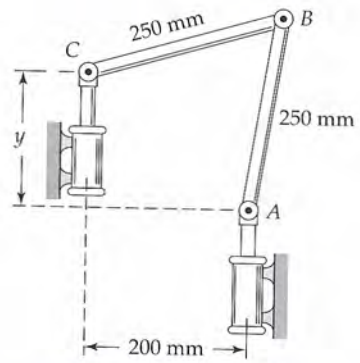


Figura problema 5.88

5.89 En el instante representado, $a = 150$ mm y $b = 125$ mm y la distancia $a + b$ entre A y B disminuye a razón de 0,2 m/s. Hallar la velocidad común v de los puntos B y D en ese instante.

Resp. $v = 0{,}0536$ m/s

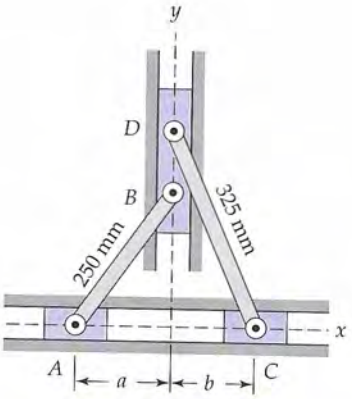


Figura problema 5.89

http://gratislibrospdf.com/

▶ **5.90** El disco rueda sin deslizamiento. Para el instante representado, en que O está en la vertical de C, la barra OA tiene una velocidad $v = 1{,}5$ m/s hacia la derecha y $\omega = 30°$. Hallar la velocidad angular ω de la biela ranurada.

Resp. $\omega = 18{,}22$ rad/s AH

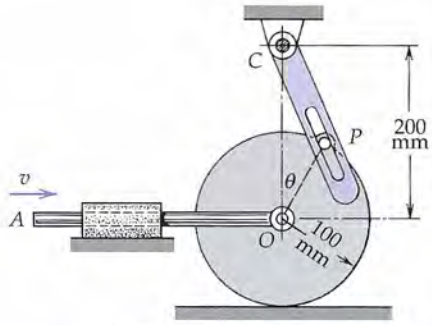


Figura problema 5.90

5.5 CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN

En el apartado anterior hemos visto que la velocidad de un punto de un cuerpo rígido en movimiento plano puede determinarse sumando la velocidad relativa debida a la rotación alrededor de un punto de referencia conveniente a la velocidad de ese punto de referencia. En este apartado vamos a ver cómo se resuelve ese problema utilizando un punto que es el único que en el instante considerado tiene velocidad nula. En este caso, en lo que a las velocidades concierne, el cuerpo puede considerarse como si estuviera en rotación pura alrededor de un eje, normal al plano del movimiento, que pasa por el punto mencionado. Este eje se conoce como *eje instantáneo de rotación* y su intersección con el plano del movimiento como *centro instantáneo de rotación*. Este procedimiento proporciona un medio de gran valor para analizar físicamente y estudiar las velocidades en los movimientos planos.

La existencia del centro instantáneo de rotación se demuestra fácilmente. Supongamos que conocemos las direcciones de las velocidades absolutas de dos puntos cualesquiera A y B del cuerpo rígido de la figura 5.7*a* y que esas velocidades no son paralelas. Si existe un punto alrededor del cual A esté animado de un movimiento circular absoluto en el instante considerado, dicho punto debe encontrarse en la normal a $\mathbf{v}_A$ que pasa por A. Un razonamiento similar es válido para B, y la intersecciónC de ambas perpendiculares cumple las condiciones para ser un centro absoluto de rotación *en el instante considerado*. Ese punto C es el *centro instantáneo de rotación* y puede encontrarse dentro o fuera del cuerpo. Si se encuentra fuera del cuerpo, puede imaginarse como si estuviera dentro del cuerpo prolongado. El centro instantáneo de rotación no es un punto fijo respecto al cuerpo ni respecto al plano.

Si también se conoce el módulo de la velocidad de uno de los puntos, v_A por ejemplo, pueden conocerse inmediatamente la velocidad angular ω del cuerpo y las velocidades lineales de todos los puntos de éste. Entonces (fig. 5.7*a*), la velocidad angular del cuerpo es

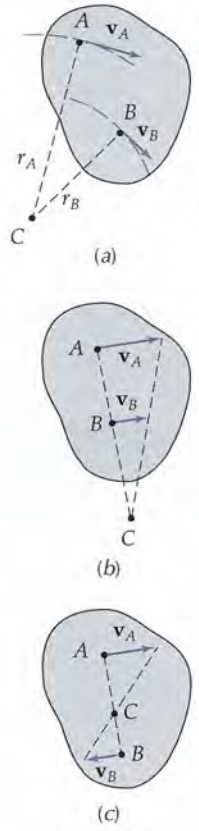


Figura 5.7

$$\omega = \frac{v_A}{r_A}$$

que, por supuesto, es también la velocidad angular de *todas* las rectas del cuerpo. Por tanto, la velocidad de B es $v_B = r_B\omega = (r_B/r_A)v_A$. Una vez situado el cen-

http://gratislibrospdf.com/

tro instantáneo de rotación, la dirección de la velocidad instantánea de todos los puntos del cuerpo se encuentra de inmediato puesto que debe ser normal a la recta que une el punto en cuestión con C.

Si las velocidades de dos puntos de un cuerpo en movimiento plano son paralelas, como en las figuras 5.7*b* o 5.7*c*, la recta que pasa por ambos puntos es perpendicular a la dirección de las velocidades y el centro instantáneo de rotación C podrá hallarse, como se indica, mediante una proporción directa. En la figura 5.7*b* se ve fácilmente que a medida que los módulos de las velocidades paralelas tienden a hacerse iguales, el centro instantáneo de rotación C se desplaza alejándose del cuerpo, tendiendo al infinito en el límite donde el cuerpo pierde su velocidad angular y sólo se traslada.

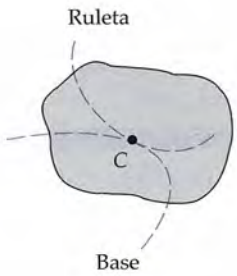


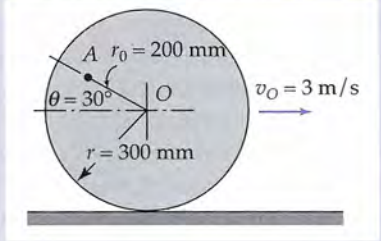
Figura 5.8

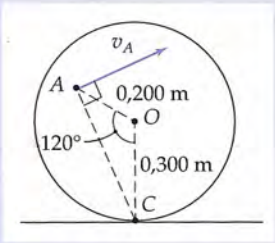
A la vez que el cuerpo cambia de posición, también el centro instantáneo C cambia de posición, tanto respecto al espacio como respecto al cuerpo. El lugar geométrico de los centros instantáneos de rotación respecto al espacio es una curva conocida como *base* y el lugar geométrico de los centros instantáneos de rotación respecto al cuerpo es una curva conocida como *ruleta*. En cada instante considerado ambas curvas son tangentes en el punto donde se encuentra C. Puede demostrarse que la ruleta rueda sobre la base durante el movimiento del cuerpo, tal como se representa esquemáticamente en la figura 5.8.

Si bien el centro instantáneo de rotación considerado como punto perteneciente al cuerpo se encuentra en reposo en cada instante, en general su aceleración *no* será nula. Así pues, ese punto *no* puede emplearse como centro instantáneo de aceleración nula, o centro de aceleraciones, de forma más o menos análoga a como se emplea para calcular velocidades. Realmente existe un centro de aceleraciones para todos los cuerpos en movimiento plano general, pero su localización y utilización práctica constituye un tema muy particular de la cinemática de mecanismos y no lo trataremos aquí.

PROBLEMA TIPO 5.11

Se representa otra vez la rueda del problema tipo 5.7 rodando sin deslizamiento hacia la izquierda y cuyo centro O lleva una velocidad $v_O = 3$ m/s. Localizar el centro instantáneo de rotación y utilizarlo para hallar la velocidad del punto A en la posición representada.





Solución. Si la rueda no resbala, el punto de su perímetro en contacto con el suelo carece de velocidad; éste será, por tanto, el centro instantáneo de rotación C. La velocidad angular de la rueda es

$$[\omega = v/r] \qquad \omega = v_O/\overline{OC} = 3/0{,}300 = 10 \text{ rad/s}$$

http://gratislibrospdf.com/

La distancia entre A y C es

$$\overline{AC} = \sqrt{(0{,}300)^2 + (0{,}200)^2 - 2(0{,}300)(0{,}200)\cos 120^\circ} = 0{,}436 \text{ m}$$ (1)

La velocidad de A será, pues,

$$[v = r\omega] \qquad v_A = \overline{AC}\,\omega = 0{,}436(10) = 4{,}36 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$ (2)

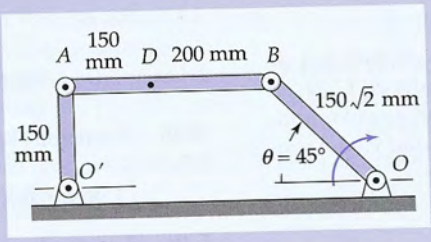
La dirección de $\mathbf{v}_A$ es perpendicular a AC, tal como se indica.

(1) **Recuérdese que cos 120° es negativo.**

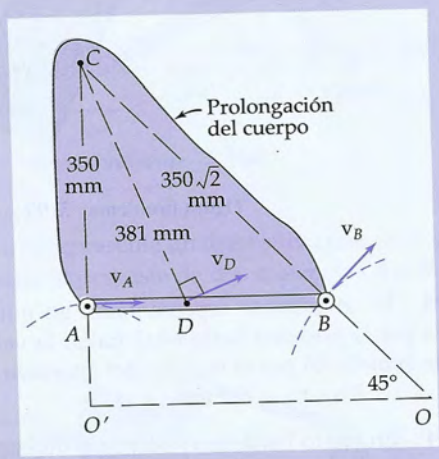
(2) **Con los resultados de este problema, el lector debe ser capaz de imaginar y trazar un esquema de las velocidades de todos los puntos de la rueda.**

PROBLEMA TIPO 5.12

Para la posición indicada en que $\theta = 45°$, la barra OB del sistema articulado gira en sentido horario a 10 rad/s. Hallar la velocidad de A, la velocidad de D y la velocidad angular de la barra AB en el instante representado.



Solución. Tal como se representa, las direcciones de las velocidades de A y B son tangentes a sus trayectorias circulares en torno a los puntos fijos O y O'. La intersección de las perpendiculares a las velocidades trazadas por A y B sitúa el centro instantáneo de rotación de la barra AB. Las distancias $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ que aparecen acotadas en el diagrama se calculan o se miden a escala en el dibujo. La velocidad angular de BC, considerada como una recta de la prolongación del cuerpo, es igual a la velocidad angular de AC, DC y AB y es (1)



$$[\omega = v/r] \qquad \omega_{BC} = \frac{v_B}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OB}\,\omega_{OB}}{\overline{BC}} = \frac{150\sqrt{2}(10)}{350\sqrt{2}} = 4{,}29 \text{ rad/s AH} \qquad \textit{Resp.}$$

Entonces, las velocidades de A y D son

$$[v = r\omega] \qquad v_A = 0{,}350(4{,}29) = 1{,}500 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$
$$v_D = 0{,}381(4{,}29) = 1{,}632 \text{ m/s}$$

en las direcciones que se indican.

(1) **Para el instante representado, debe imaginarse la barra AB con su prolongación de cuerpo girando como un todo rígido único en torno al punto C.**

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMAS

Problemas introductorios

5.91 La barra AB está animada de una velocidad angular horaria de 5 rad/s. Construir y determinar el vector velocidad de ambos extremos si el centro instantáneo de rotación se encuentra (*a*) en C_1 y (*b*) en C_2.

Resp. (*a*) $\mathbf{v}_A = -0{,}5\mathbf{j}$ m/s, $\mathbf{v}_B = 1{,}0\mathbf{j}$ m/s

(*b*) $\mathbf{v}_A = 0{,}375\mathbf{j}$ m/s, $\mathbf{v}_B = 1{,}875\mathbf{j}$ m/s

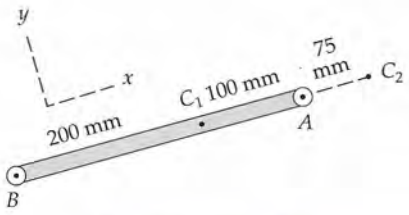


Figura problema 5.91

5.92 En cierto instante, el centro instantáneo de rotación de la placa rectangular en movimiento plano se halla en C. Si, en ese mismo instante, la placa posee una velocidad angular antihoraria de 4 rad/s, hallar el módulo de la velocidad $\mathbf{v}_G$ del centro O de la placa.

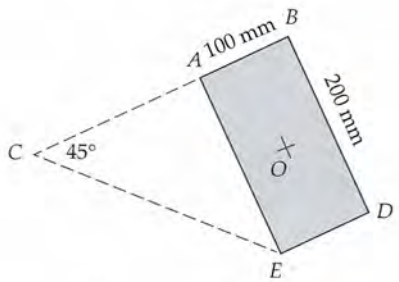


Figura problema 5.92

5.93 En el instante representado, en que la manivela OA pasa por la posición horizontal, hallar la velocidad del centro G de la biela AB por el método del apartado 5.5.

Resp. $v_G = 277$ mm/s

5.94 En cierto instante el vértice B de la placa en forma de triángulo rectángulo tiene una velocidad de 200 mm/s en la dirección que se señala. Si el centro instantáneo de rotación se encuentra a 40 mm del punto B y si la velocidad angular es de sentido horario, hallar la velocidad del punto D.

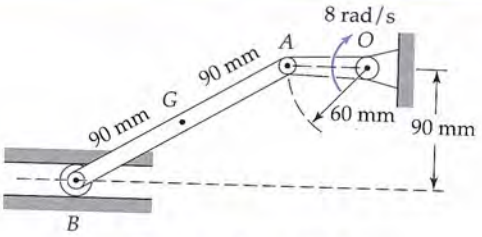


Figura problema 5.93

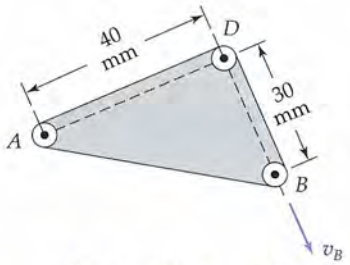


Figura problema 5.94

5.95 Resolver el problema 5,81 por el método del apartado 5.5.

Resp. $\omega_{BD} = 1{,}2$ rad/s AH, $\omega_{AO} = 1{,}333$ rad/s AH

5.96 Las ruedas traseras de un camión de reparto tienen un diámetro de 660 mm y resbalan en una calzada con hielo cuando se les aplica el par motor a través del diferencial. Sabiendo que la ruleta de cada rueda es una circunferencia de 50 mm y que ambas ruedas giran a 400 rpm, hallar la velocidad del camión. Hallar también la velocidad v_r con que las cubiertas resbalan en la superficie helada.

5.97 El movimiento de la barra está controlado por las trayectorias vinculadas de A y B. Si la velocidad angular de la ba-

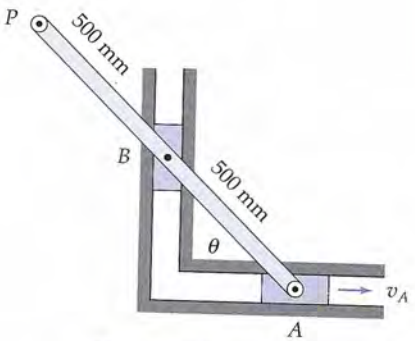


Figura problema 5.97

http://gratislibrospdf.com/

rra es de 2 rad/s (AH) al pasar por la posición $\theta = 45°$, hallar la velocidad v_A y el módulo de la velocidad de P.

Resp. $v_A = 0{,}707$ m/s, $v_P = 1{,}581$ m/s

Problemas representativos

5.98 Resolver el problema 5.72 por el método del apartado 5.5.

5.99 En el problema tipo 5.9, hallar la velocidad del pistón para un ángulo de cigüeñal $\theta = 135°$.

Resp. $v_A = 10{,}26$ m/s

5.100 Resolver el problema 5.79 por el método del apartado 5.5.

5.101 Resolver el problema 5.80 por el método del apartado 5.5.

Resp. $v_C = 1{,}873$ m/s

5.102 Resolver el problema 5.83 por el método del apartado 5.5.

5.103 Resolver el problema 5.70 por el método del apartado 5.5.

Resp. $\omega_{BC} = 2{,}77$ rad/s AH

5.104 Se repite aquí el dibujo a escala del sistema articulado del problema 5.73. Ubicar directamente en el mismo el centro instantáneo de rotación y emplear la escala del dibujo para hallar, con la aproximación posible, la velocidad del punto D en el instante representado. Hallar también la velocidad angular ω de la placa. Una vez resuelto el problema, comparar los resultados obtenidos con los dados en el problema 5.73.

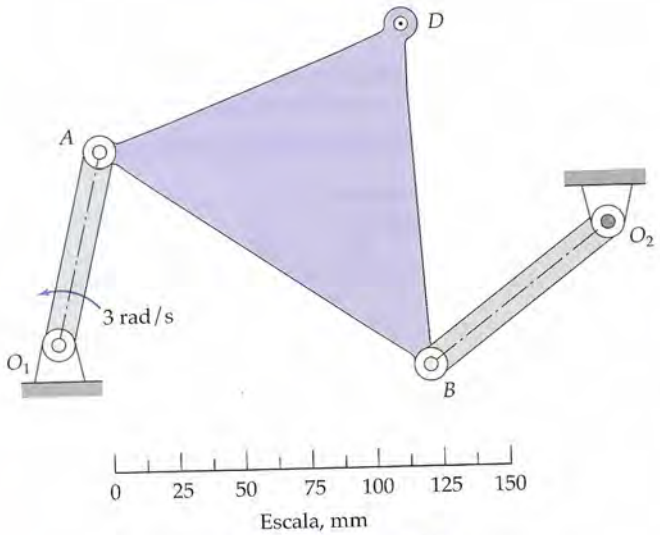


Figura problema 5.104

5.105 Resolver el problema 5.78 por el método del apartado 5.5.

Resp. $\omega = 15$ rad/s, $v_P = 1{,}897$ m/s

5.106 El engranaje D (no se representa el dentado) gira en torno a O en sentido horario a 4 rad/s. El sector de 90° AOB está montado en O sobre un eje independiente y las pequeñas ruedas dentadas A y B engranan con D. Si en el instante representado el sector gira en sentido antihorario a 3 rad/s, hallar la correspondiente velocidad angular de las ruedas dentadas pequeñas.

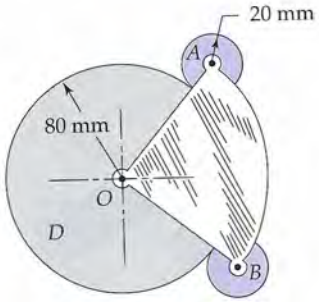


Figura problema 5.106

5.107 Resolver el problema 5.76 por el método del apartado 5.5.

Resp. $\omega_{AB} = 19{,}38$ rad/s H

5.108 El cilindro hidráulico produce un movimiento horizontal limitado del punto A. Si $v_A = 4$ m/s cuando $\theta = 45°$, hallar el módulo de la velocidad de D y la velocidad angular ω de ABD para esa posición.

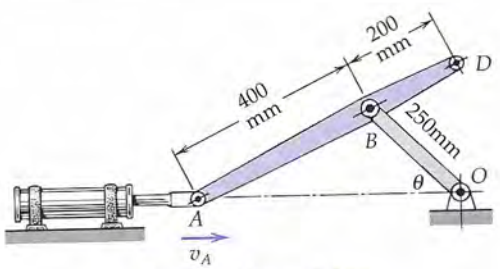


Figura problema 5.108

5.109 En la figura se representa un dispositivo que sirve para ensayar la resistencia al desgaste de dos materiales A y B. Sa-

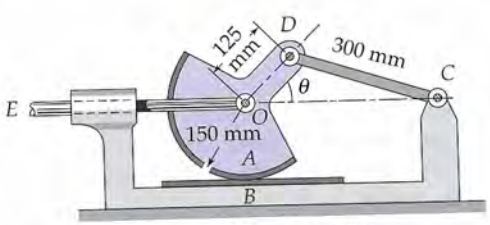


Figura problema 5.109

http://gratislibrospdf.com/

biendo que cuando $\theta = 45°$ el vástago EO lleva una velocidad de 1,2 m/s hacia la derecha, hallar la velocidad de frotamiento v_A.

Resp. $v_A = 2{,}76$ m/s

5.110 El cuerpo rectangular B está articulado en A a la manivela OA y se apoya en D en el disco. Si OA posee una velocidad angular antihoraria de 2 rad/s, hallar la velocidad del punto E y la velocidad angular del cuerpo B cuando la manivela OA pasa por la posición vertical indicada.

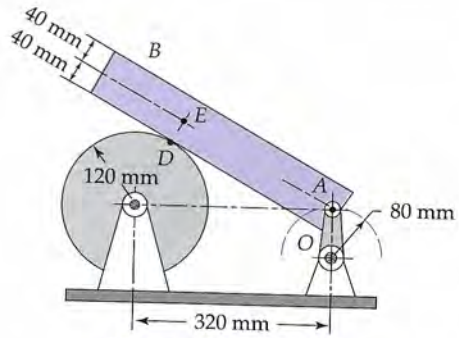


Figura problema 5.110

5.111 Resolver el problema 5.74 por el método del apartado 5.5.

Resp. $v_B = 269$ mm/s

5.112 La oscilación horizontal del empujador E con resorte se gobierna variando la presión del aire dentro del cilindro neumático horizontal F. Si el empujador tiene una velocidad de 2 m/s hacia la derecha cuando $\theta = 30°$, hallar la velocidad descendente v_D del rodillo D en su guía vertical y la velocidad angular ω de ABD en esa posición.

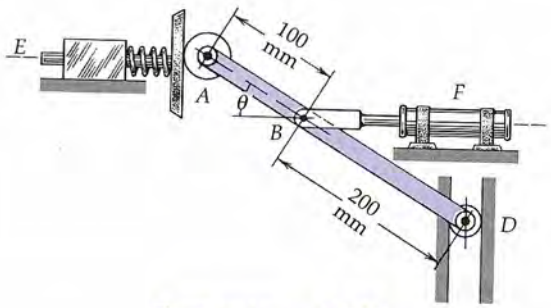


Figura problema 5.112

5.113 La banda flexible F está sujeta en E al sector giratorio y pasa por la polea de guía. Hallar las velocidades angulares de AD y BD para la posición representada si la banda tiene una velocidad de 4 m/s.

Resp. $\omega_{AD} = 12{,}5$ rad/s, $\omega_{BD} = 7{,}5$ rad/s

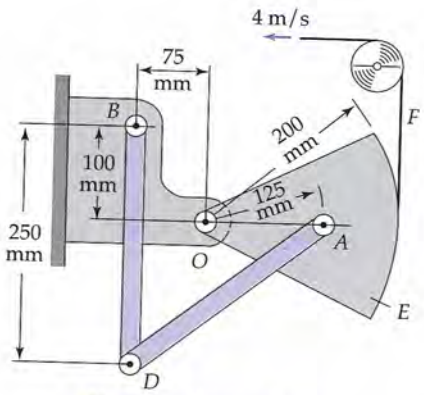


Figura problema 5.113

5.114 Construir la base y la ruleta de la barra AB dentro de los límites de su movimiento vinculado. Demostrar que el movimiento puede describirse haciendo que la ruleta ruede sobre la base.

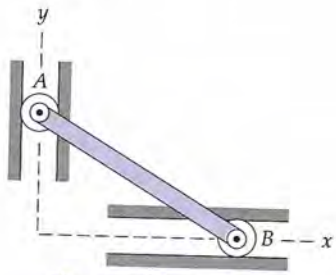


Figura problema 5.114

5.115 La oscilación vertical del vástago F con resorte está gobernada por el cambio periódico de la presión en el cilindro

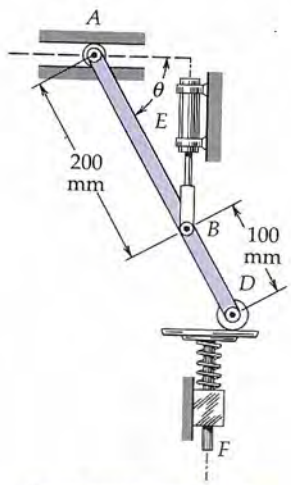


Figura problema 5.115

http://gratislibrospdf.com/

vertical hidráulico E. Para la posición $\theta = 60°$, hallar la velocidad angular de AD y la velocidad del rodillo A en su guía horizontal si el vástago F lleva una velocidad descendente de 2 m/s.

Resp. $\omega_{AD} = 13{,}33$ rad/s H, $v_A = 2{,}31$ m/s

▶ **5.116** Hallar la velocidad angular ω del ariete de la trituradora AE en la posición en que $\theta = 60°$. La manivela OB gira a 60 rpm. Cuando B se encuentra en su posición más baja, D y E se encuentran en la horizontal de F y las rectas BD y AE están verticales. Las cotas son $\overline{OB} = 100$ mm, $\overline{BD} = 750$ mm y $\overline{AE} = \overline{ED} = \overline{DF} = 375$ mm. Dibujar cuidadosamente la configuración y aplicar el método del apartado 5.5.

Resp. $\omega = 1{,}11$ rad/s H

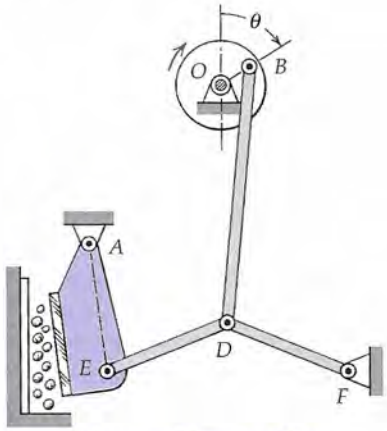


Figura problema 5.116

▶ **5.117** El eje O hace girar el brazo OA, en sentido horario, a 90 rpm. Aplicar el método del centro instantáneo de rotación para determinar la velocidad de rotación del engranaje B (no se representa el dentado) si (*a*) la corona D está inmóvil y (*b*) si la corona D rota en torno a O en sentido antihorario a 80 rpm.

Resp. (*a*) $\omega_B = 360$ rpm, (*b*) $\omega_B = 600$ rpm

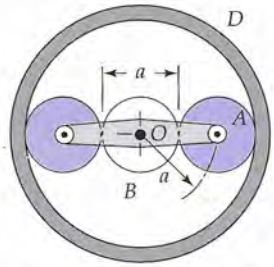


Figura problema 5.117

▶ **5.118** El rodamiento de gran tamaño rueda hacia la izquierda sobre su pista exterior y su centro O lleva una velocidad de 0,9 m/s. A la vez, el eje central y la pista interior rotan en sentido antihorario a 240 rpm. Hallar la velocidad angular ω que lleva cada rodillo.

Resp. $\omega = 10{,}73$ rad/s H

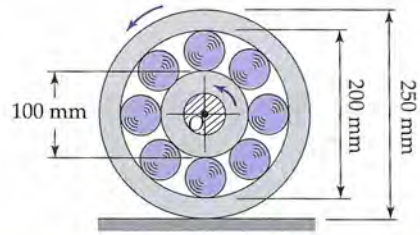


Figura problema 5.118

5.6 ACELERACIÓN RELATIVA

Para obtener la expresión de la aceleración relativa podemos derivar respecto al tiempo la relación $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ entre las velocidades de dos puntos A y B en movimiento plano referido a ejes no giratorios; con ello, obtenemos $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$, o sea

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} \qquad (5.7)$$

Expresándolo en palabras, la ecuación 5.7 dice que la aceleración del punto A es igual a la aceleración del punto B más (vectorialmente) la aceleración aparente de A respecto a un observador no giratorio que se mueva con B. Si los puntos A y B están situados en el mismo plano de movimiento del cuerpo rígido, la distancia r entre ambos permanece constante, por lo que el observador solidario de B verá a A moviéndose circularmente alrededor de B, tal como ya

http://gratislibrospdf.com/

dijimos en el apartado 5.4 respecto a la ecuación de la velocidad relativa. Dado que el movimiento relativo es circular, resulta que el término de la aceleración relativa contendrá a la vez una componente normal dirigida de A a B, debida al cambio de dirección de $\mathbf{v}_{A/B}$, y una componente tangencial perpendicular a AB, debida al cambio de módulo de $\mathbf{v}_{A/B}$. De estas componentes de la aceleración, citadas en las ecuaciones 5.2, ya hablamos en el apartado 2.5 y ya deben sernos del todo familiares. Así pues, podemos escribir

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{A/B})_n + (\mathbf{a}_{A/B})_t \tag{5.8}$$

donde los módulos de las componentes de la aceleración relativa son

$$\begin{aligned} (a_{A/B})_n &= v_{A/B}{}^2/r = r\omega^2 \\ (a_{A/B})_t &= \dot{v}_{A/B} = r\alpha \end{aligned} \tag{5.9}$$

En notación vectorial, estas componentes se expresan

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{A/B})_n &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ (\mathbf{a}_{A/B})_t &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \end{aligned} \tag{5.9a}$$

En estas relaciones, $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular y $\boldsymbol{\alpha}$ es la velocidad angular del cuerpo, mientras que $\mathbf{r}$ es el vector de posición de A respecto a B. Es importante tener en cuenta que los términos de la aceleración *relativa* dependen de la velocidad angular *absoluta* y de la aceleración angular *absoluta* respectivas.

En la figura 5.9 se ilustra el significado de las ecuaciones 5.8 y 5.9 y en ella se representa un cuerpo rígido en movimiento plano con dos puntos A y B que describen trayectorias curvilíneas separadas animados de aceleraciones absolutas $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_B$. Contrariamente al caso de las velocidades, las aceleraciones $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_B$ no son en general tangentes a las trayectorias descritas por A y B cuando tales trayectorias son curvilíneas. En la figura, la aceleración de A se representa compuesta de dos partes: la aceleración de B y la aceleración de A respecto a B. Un esquema que representa como fijo al punto de referencia resulta muy útil para poner de manifiesto el sentido correcto de cada una de las componentes del término de la aceleración relativa.

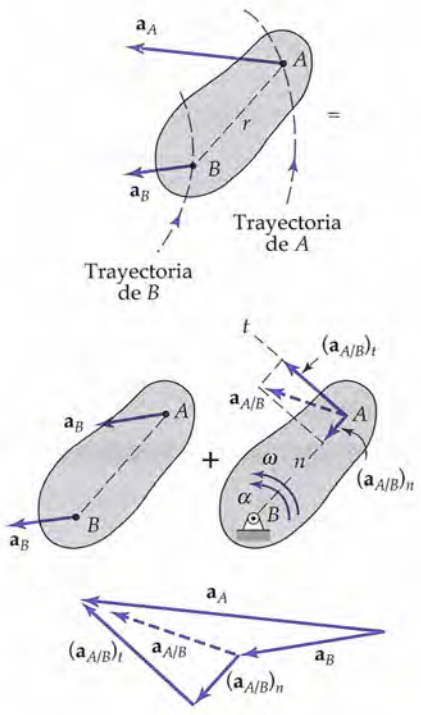


Figura 5.9

También podríamos haber escrito la ecuación de la aceleración en orden inverso o sea, colocando los ejes de referencia no giratorios en A y no en B. Entonces, tendríamos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

Aquí $\mathbf{a}_{B/A}$ y sus componentes n y t serán opuestas a $\mathbf{a}_{A/B}$ y sus componentes n y t. El lector deberá dibujar un esquema como el de la figura 5.9 correspondiente a esta ordenación inversa de los términos.

Como en el caso de la ecuación de la velocidad relativa, la solución de la ecuación 5.8 puede extraerse por tres procedimientos diferentes o sea, empleando la geometría y el álgebra de escalares, por álgebra vectorial o por construcción gráfica. Se aconseja al lector que se familiarice con estas tres técnicas de resolución. En todos los casos conviene trazar un esquema del polígono de vectores que representa gráficamente la ecuación vectorial, prestando estrecha

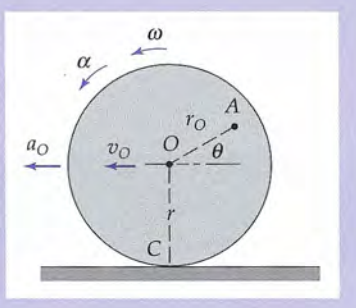
http://gratislibrospdf.com/

atención a la colocación de los vectores de origen sobre extremo para que esa combinación concuerde con la ecuación. Así, primero deben sumarse los vectores conocidos, de forma que los vectores desconocidos sean los lados que cierran el polígono. Es vital imaginar los vectores con su sentido geométrico, pues sólo así puede percibirse por completo la importancia de la ecuación de las aceleraciones. Antes de iniciar un proceso de resolución es muy acertado identificar datos e incógnitas y tener presente que para resolver una ecuación vectorial en dos dimensiones, las incógnitas deben reducirse a dos ecuaciones escalares. Estas cantidades pueden ser el módulo o la dirección de cualquiera de los términos de la ecuación. Obsérvese que cuando los dos puntos describen trayectorias curvilíneas, en general en la ecuación 5.8 intervendrán seis cantidades escalares.

Teniendo en cuenta que las componentes normales de las aceleraciones dependen de las velocidades respectivas, generalmente será necesario resolver la ecuación de las velocidades antes de que pueda hacerse cálculo alguno. El punto de referencia para la ecuación de la aceleración relativa se elige de modo que coincida con algún punto del cuerpo en cuestión cuya aceleración se conozca o pueda determinarse fácilmente. Se debe poner cuidado para *no* utilizar como punto de referencia el centro instantáneo de rotación, salvo que se conozca su aceleración y ésta sea tenida en cuenta. Tal como se dijo, para todo cuerpo rígido en movimiento plano general, existe un centro de aceleraciones del que no tratamos aquí puesto que se trata de un tema más o menos especializado.

PROBLEMA TIPO 5.13

La rueda de radio r gira hacia la izquierda sin deslizamiento y, en el instante considerado, su centro O está animado de una velocidad v_O y una aceleración a_O hacia la izquierda. Determinar la aceleración de los puntos A y C de la rueda en el instante considerado.

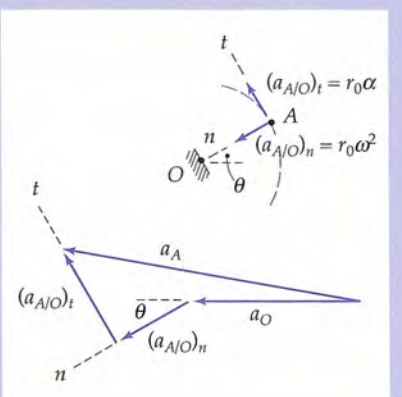


Solución. Según hemos visto ya en el problema tipo 5.4, sabemos que la velocidad y la aceleración angulares de una rueda son

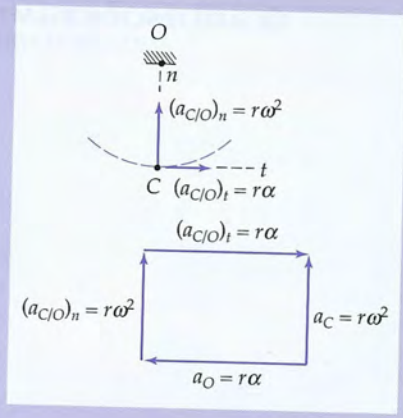
$$[\omega = v_O/r] \qquad \text{y} \qquad \alpha = a_O/r$$

La aceleración de *A* la escribimos en función de la aceleración de *O*, que es conocida; o sea,

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{A/O} = \mathbf{a}_O + (\mathbf{a}_{A/O})_n + (\mathbf{a}_{A/O})_t$$



http://gratislibrospdf.com/



Los términos que representan la aceleración relativa resultan de suponer que O esté fijo, y en el caso de este movimiento circular relativo sus módulos son

$$(a_{A/O})_n = r_0\omega^2 = r_0\left(\frac{v_O}{r}\right)^2$$

$$(a_{A/O})_t = r_0\alpha = r_0\left(\frac{a_O}{r}\right)$$

(1) y sus direcciones las indicadas.

Sumando los vectores origen sobre extremo, resulta $\mathbf{a}_A$ tal como se representa. Numéricamente, la combinación puede obtenerse gráfica o algebraicamente. La expresión algebraica del módulo de $\mathbf{a}_A$ es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes; utilizando las componentes en las direcciones n y t, tenemos

(2)
$$\begin{aligned} a_A &= \sqrt{(a_A)_n^2 + (a_A)_t^2} \\ &= \sqrt{[a_O \cos\theta + (a_{A/O})_n]^2 + [a_O \operatorname{sen}\theta + (a_{A/O})_t]^2} \\ &= \sqrt{(r\alpha\cos\theta + r_0\omega^2)^2 + (r\alpha \operatorname{sen}\theta + r_0\alpha)^2} \end{aligned}$$ *Resp.*

Si se desea, puede calcularse la dirección de $\mathbf{a}_A$.

La aceleración del centro instantáneo de rotación C, considerado como punto de la rueda, se obtiene de la expresión

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{C/O}$$

donde el término de la aceleración relativa se compone de $(a_{C/O})_n = r\omega^2$, dirigida de C a O, y de $(a_{C/O})_t = r\alpha$, dirigida hacia la derecha, habida cuenta de que la aceleración angular de la recta CO en torno a O es antihoraria. En el diagrama inferior aparece la suma de los términos y en él se ve que

(3)
$$a_C = r\omega^2$$ *Resp.*

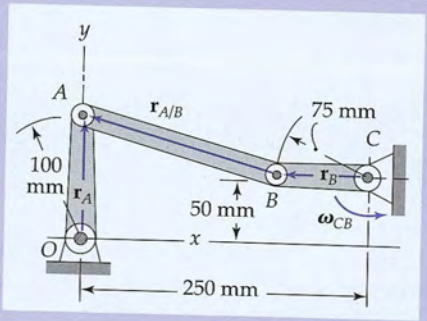
(1) **La aceleración angular antihoraria de OA determina la dirección positiva de $(a_{A/O})_t$. La componente normal $(a_{A/O})_n$ está, por supuesto, dirigida hacia el centro de referencia O.**

(2) **Obsérvese que si la rueda rodase hacia la derecha con la misma velocidad, pero su aceleración siguiese siendo a_O hacia la izquierda, el valor de a_A no variaría.**

(3) **Obsérvese que la aceleración del centro instantáneo de rotación es independiente de α y que está dirigida hacia el centro de la rueda. Será de gran utilidad recordar bien esta conclusión.**

PROBLEMA TIPO 5.14

Repetimos aquí sistema articulado del problema tipo 5.8. Durante un corto intervalo de su movimiento, y para la posición indicada, la manivela CB tiene una velocidad angular antihoraria constante de 2 rad/s. Hallar la aceleración angular de las barras AB y OA en esa posición. Utilizar el álgebra vectorial.



http://gratislibrospdf.com/

Solución. Primero hay que calcular las velocidades que ya se determinaron en el problema tipo 5.8 y que son

$$\omega_{AB} = -6/7 \text{ rad/s} \qquad \text{y} \qquad \omega_{OA} = -3/7 \text{ rad/s}$$

tomando como positivo el sentido antihorario $+\mathbf{k}$. La ecuación de las aceleraciones es

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{A/B})_n + (\mathbf{a}_{A/B})_t$$

donde, según las ecuaciones 5.3 y 5.9*a*, podemos escribir

① $$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \boldsymbol{\alpha}_{OA} \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega}_{OA} \times (\boldsymbol{\omega}_{OA} \times \mathbf{r}_A) \\ &= \alpha_{OA}\mathbf{k} \times 100\mathbf{j} + (-\tfrac{3}{7}\mathbf{k}) \times (-\tfrac{3}{7}\mathbf{k} \times 100\mathbf{j}) \\ &= -100\alpha_{OA}\mathbf{i} - 100(\tfrac{3}{7})^2\mathbf{j} \text{ mm/s}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \boldsymbol{\alpha}_{CB} \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_{CB} \times (\boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_B) \\ &= \mathbf{0} + 2\mathbf{k} \times (2\mathbf{k} \times [-75\mathbf{i}]) \\ &= 300\mathbf{i} \text{ mm/s}^2\end{aligned}$$

② $$\begin{aligned}(\mathbf{a}_{A/B})_n &= \boldsymbol{\omega}_{AB} \times (\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B}) \\ &= -\tfrac{6}{7}\mathbf{k} \times [(-\tfrac{6}{7}\mathbf{k}) \times (-175\mathbf{i} + 50\mathbf{j})] \\ &= (\tfrac{6}{7})^2(175\mathbf{i} - 50\mathbf{j}) \text{ mm/s}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}_{A/B})_t &= \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B} \\ &= \alpha_{AB}\mathbf{k} \times (-175\mathbf{i} + 50\mathbf{j}) \\ &= -50\alpha_{AB}\mathbf{i} - 175\alpha_{AB}\mathbf{j} \text{ mm/s}^2\end{aligned}$$

Aplicando ahora estos valores en la ecuación de la aceleración relativa e igualando por separado los coeficientes de los términos en $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ resulta

$$\begin{aligned}-100\alpha_{OA} &= 428{,}6 - 50\alpha_{AB} \\ -18{,}37 &= -36{,}73 - 175\alpha_{AB}\end{aligned}$$

cuyas raíces son

$$\alpha_{AB} = -0{,}105 \text{ rad/s}^2 \qquad \text{y} \qquad \alpha_{OA} = -4.34 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Como el vector unitario $\mathbf{k}$ está dirigido hacia fuera del papel en el sentido z positivo, vemos que las aceleraciones de AB y OA tienen ambas sentido horario (negativo).

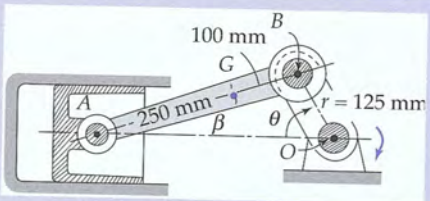
Para dejar más clara la solución del problema recomendamos al lector que dibuje un esquema de los vectores aceleración en el que aparezcan representados según la relación geométrica señalada por la ecuación de la aceleración relativa.

① **Recuérdese conservar el orden de los factores en el producto vectorial.**

② **Al expresar $\mathbf{a}_{A/B}$ compruébese bien que $\mathbf{r}_{A/B}$ es el vector que va de B a A y no al revés.**

http://gratislibrospdf.com/

Repetimos aquí el mecanismo biela-cigüeñal del problema tipo 5.9. El cigüeñal OB gira en sentido horario a 1500 rpm. Hallar la aceleración del pistón A y la aceleración angular de la biela AB en el instante en que el ángulo θ que forma el cigüeñal es de 60°.



Solución. La aceleración de A podemos expresarla en función de la aceleración de la muñequilla B; o sea,

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{A/B})_n + (\mathbf{a}_{A/B})_t$$

El punto B describe una circunferencia de 125 mm de radio a celeridad constante, por lo que su aceleración tendrá sólo una componente normal dirigida de B a O.

① Si el cigüeñal *OB* tuviera aceleración angular, su aceleración a_B tendría además una componente tangencial.

①

$$[a_n = r\omega^2] \qquad a_B = 0{,}125\left(\frac{1500[2\pi]}{60}\right)^2 = 3084 \text{ m/s}^2$$

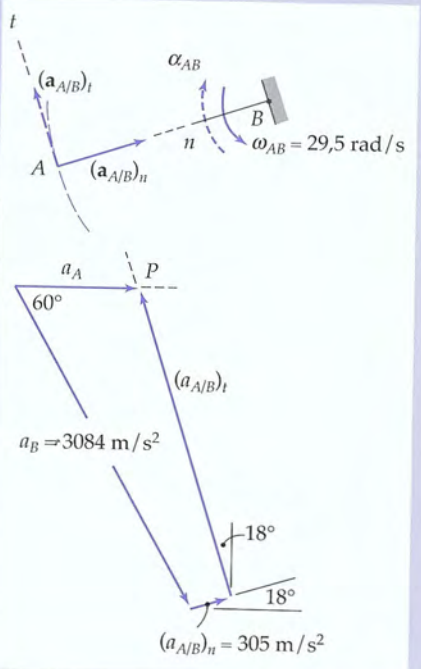
Los términos correspondientes a la aceleración relativa los imaginamos como si A describiera una circunferencia de centro en B y éste lo suponemos fijo, tal como se representa. Del problema tipo 5.9 sabemos que, en las condiciones consideradas, la aceleración angular de AB es $\omega_{AB} = 29{,}5$ rad/s y, entonces,

② Para calcular $(a_{A/B})_n$ también podría utilizarse la relación $a_n = v^2/r$, con tal que en el lugar de v se ponga la velocidad relativa $v_{A/B}$. La equivalencia es obvia recordando que $v_{A/B} = r\omega$.

②

$$[a_n = r\omega^2] \qquad (a_{A/B})_n = 0{,}350(29{,}5)^2 = 305 \text{ m/s}^2$$

en sentido de A a B. De la componente tangencial $(\mathbf{a}_{A/B})_t$ conocemos sólo la dirección, pues su módulo depende de la aceleración angular de AB y ésta no la conocemos. Conocemos también la dirección de $\mathbf{a}_A$, puesto que el pistón está obligado a moverse a lo largo del eje horizontal del cilindro. En la ecuación ya quedan únicamente dos incógnitas, que son los módulos de $\mathbf{a}_A$ y $(\mathbf{a}_{A/B})_t$, y es posible resolverla.



Si optamos por la solución algebraica apoyándonos en la geometría del polígono de aceleraciones, calcularemos primero el ángulo de AB con la horizontal. Según el teorema de los senos, ese ángulo es 18,0°. Igualando por separado las componentes verticales y horizontales de los términos que figuran en la ecuación de las aceleraciones, tal como aparecen en el polígono de las aceleraciones, resulta

$$a_A = 3084 \cos 60° + 305 \cos 18{,}0° - (a_{A/B})_t \operatorname{sen} 18{,}0°$$
$$0 = 3084 \operatorname{sen} 60° - 305 \operatorname{sen} 18{,}0° - (a_{A/B})_t \cos 18{,}0°$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones obtenemos los módulos

$$(a_{A/B})_t = 2710 \text{ m/s}^2 \qquad \text{y} \qquad a_A = 994 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Como el sentido de $(\mathbf{a}_{A/B})_t$ lo determina también el diagrama, la aceleración angular de AB, que representa la rotación relativa a B, se ve en la figura que es

$$[\alpha = a_t/r] \qquad \alpha_{AB} = 2710/0{,}350 = 7740 \text{ rad/s H} \qquad \textit{Resp.}$$

http://gratislibrospdf.com/

Si optamos por el procedimiento gráfico, empezaremos por sumar los vectores $\mathbf{a}_B$ y $(\mathbf{a}_{A/B})_n$ origen sobre extremo, empleando la escala conveniente. Seguidamente obtendremos la dirección de $(\mathbf{a}_{A/B})_t$ trazándola por el extremo del último vector. La solución a la ecuación se obtiene mediante el punto de corte P de esta última recta con la horizontal que pasa por el punto inicial que representa la dirección conocida del vector suma $\mathbf{a}_A$. Midiendo a escala sobre el diagrama se obtienen unos valores que concuerdan con los calculados numéricamente:

$$a_A = 994 \text{ m/s}^2 \quad \text{y} \quad (a_{A/B})_t = 2710 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

③ **Salvo que se pida una gran precisión, no hay que vacilar en seguir un procedimiento gráfico, pues es rápido y revelador de la relación física entre los vectores. Los vectores conocidos pueden, por supuesto, sumarse en cualquier orden mientras se respete la ecuación fundamental.**

PROBLEMAS

Problemas introductorios

5.119 Las dos paletas de 800 mm de radio giran en sentido antihorario, en torno al eje O montado en el bloque deslizante, con la velocidad angular constante $\omega = \dot{\theta} = 2$ rad/s. La aceleración del bloque es $a_O = 3$ m/s^2. Hallar el módulo de la aceleración de la punta A de la paleta cuando (*a*) $\theta = 0$, (*b*) $\theta = 90°$ y (*c*) $\theta = 180°$. ¿Intervienen en el cálculo la velocidad de O o el sentido de ω?

Resp. (*a*) $a_A = 0{,}2$ m/s^2, (*b*) $a_A = 4{,}39$ m/s^2, (*c*) $a_A = 6{,}2$ m/s^2

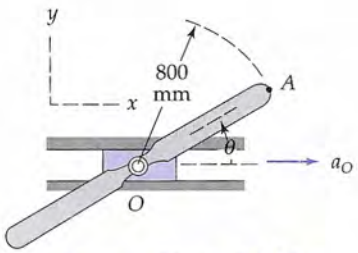


Figura problema 5.119

5.120 Para el dispositivo del problema 5.119, si $a_O = 3$ m/s^2, con $\ddot{\theta} = 5$ rad/s^2 y $\dot{\theta} = 0$ cuando $\theta = 0$, determinar la aceleración del punto A en ese instante.

5.121 El disco rueda sin deslizamiento hacia la derecha. Si $\mathbf{a}_{B/A} = 800\mathbf{i}$ mm/s^2, hallar la velocidad y aceleración del centro O del disco.

Resp. $\mathbf{v}_O = 0\,30\mathbf{i}$ m/s, $\mathbf{a}_O = -0{,}60\mathbf{i}$ m/s^2

5.122 Se representa el sistema articulado de vuelco de un recipiente de materiales de desecho. Si el vástago del émbolo del cilindro hidráulico parte del reposo en la posición indicada y está animado de una aceleración de 0,5 m/s^2 en la dirección indicada, calcular la aceleración angular inicial del recipiente.

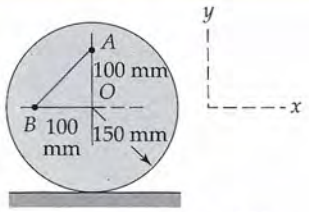


Figura problema 5.121

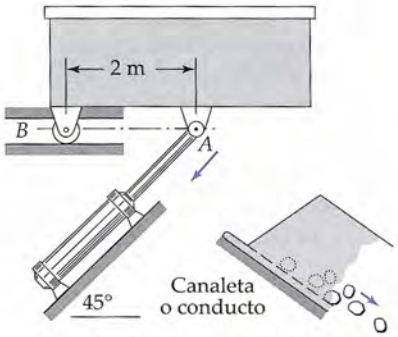


Figura problema 5.122

5.123 El centro O del disco está montado en el bloque deslizante que lleva la aceleración $a_O = 8$ m/s^2 hacia la derecha. En

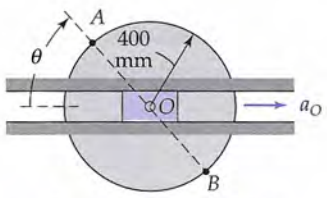


Figura problema 5.123

http://gratislibrospdf.com/

el instante en que $\theta = 45°$, es $\dot{\theta} = 3$ rad/s y $\ddot{\theta} = -8$ rad/s^2. Determinar los módulos de las aceleraciones de los puntos A y B en ese instante.

Resp. $a_A = 9{,}58$ m/s^2, $a_B = 9{,}09$ m/s^2

5.124 En el instante representado, el punto B de la placa tiene una aceleración de 0,3 m/s^2 y una velocidad de 4 m/s en las direcciones que se indican. Por su parte, la placa posee una aceleración angular antihoraria de 1,5 rad/s^2. ¿Qué más información hace falta para determinar la aceleración del punto A? Atribúyase un valor razonable a ese dato no conocido y calcúlese un valor para a_A.

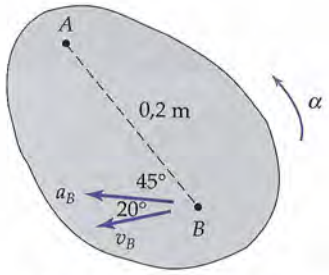


Figura problema 5.124

5.125 En cierto instante, la esquina C de la placa rectangular tiene una aceleración de 5 m/s^2 en el sentido y negativo, mientras que la placa tiene una velocidad angular horaria de 4 rad/s que disminuye a razón de 12 rad/s cada segundo. Hallar la aceleración de A en ese instante. Encontrar la solución por el método geométrico-escalar y por álgebra vectorial.

Resp. $a_A = 11{,}18$ m/s^2

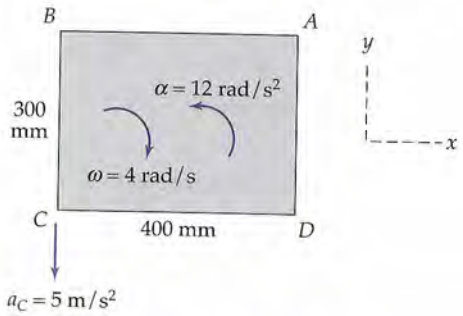


Figura problema 5.125

5.126 La rueda, de radio R, rueda sin deslizamiento y su centro O lleva una aceleración a_O. El punto P de la rueda está a la distancia r de O. Para unos valores dados de a_O, R y r, hallar el ángulo θ y la velocidad v_O. de la rueda para los que el punto P carece de aceleración.

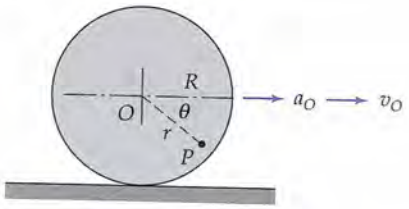


Figura problema 5.126

Problemas representativos

5.127 Hallar la aceleración del pistón del problema tipo 5.15 para (*a*) $\theta = 0°$, (*b*) $\theta = 90°$ y (*c*) $\theta = 180°$. Tómese hacia la derecha el sentido x positivo.

Resp. (*a*) $\mathbf{a}_A = 4186\mathbf{i}$ m/s^2

(*b*) $\mathbf{a}_A = -1179\mathbf{i}$ m/s^2

(*c*) $a_A = -1983\mathbf{i}$ m/s^2

5.128 Se repite aquí el punzón del problema 5.55 con el sector oscilando según $\theta = \theta_0$ sen $2\pi t$. Calcular la aceleración del punzón cuando $\theta = 0$ si $\theta_0 = \pi/12$ rad.

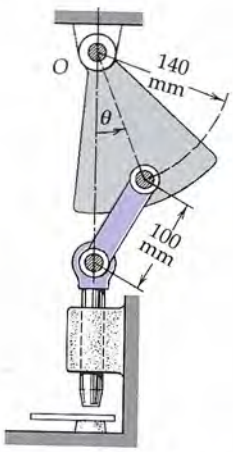


Figura problema 5.128

5.129 Hallar la aceleración angular de la barra AB y la aceleración lineal de A para $\theta = 90°$ si son $\dot{\theta} = 0$ y $\ddot{\theta} = 4$ rad/s^2 en el instante considerado. Resolver por álgebra vectorial.

Resp. $\boldsymbol{\alpha}_{AB} = -4\mathbf{k}$ rad/s^2, $\mathbf{a}_A = 1{,}6\mathbf{i}$ m/s^2

http://gratislibrospdf.com/

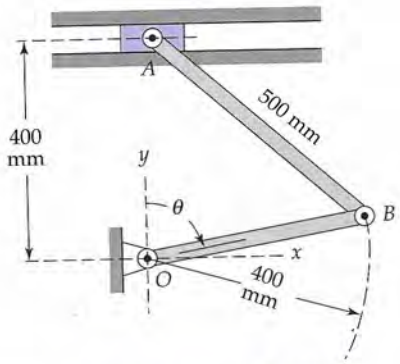


Figura problema 5.129

5.130 En el dispositivo articulado del problema 5.129, hallar la aceleración angular de AB y la aceleración lineal de A cuando $\theta = 90°$, siendo $\dot{\theta} = 4$ rad/s y $\ddot{\theta} = 0$ en esa posición. Resolver por álgebra vectorial.

5.131 Resolver el problema 5.130 por el procedimiento geométrico-escalar aplicado al polígono de las aceleraciones.

Resp. $\alpha_{AB} = 37{,}9$ rad/s^2 H, $a_A = 17{,}30$ m/s^2

5.132 La carga L desciende merced a las dos poleas solidarias. En el instante representado, el tambor A tiene una velocidad angular antihoraria de 4 rad/s que disminuye a razón de 4 rad/s cada segundo. A la vez, el tambor B tiene una velocidad angular horaria de 6 rad/s que aumenta a razón de 2 rad/s cada segundo. Calcular las aceleraciones de los puntos C y D y de la carga L.

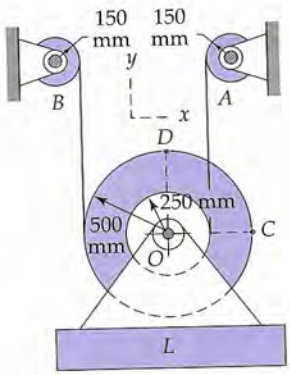


Figura problema 5.132

5.133 La manivela OA oscila entre las dos posiciones indicadas con líneas de trazos y hace que la manivela BC ejecute un pequeño movimiento angular por intermedio de la barra de enlace AB. Cuando OA pasa por la horizontal, estando AB horizontal y BC vertical, la primera tiene una velocidad angular ω y una aceleración angular nula. Hallar la aceleración angular de BC en esa posición.

Resp. $\alpha = 2l\omega^2/r$ H

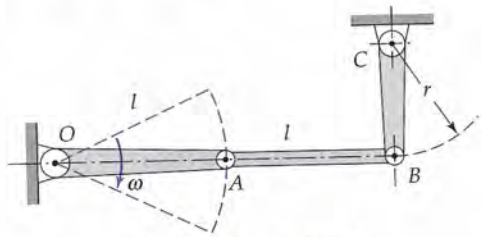


Figura problema 5.133

5.134 Se repite aquí la bicicleta del problema 5.69. Si el ciclista parte del reposo y adquiere una velocidad de 2 m/s, bajo una aceleración constante, en una distancia de 3 m, calcular el módulo de la aceleración del pedal A cuando éste se encuentra en su posición superior.

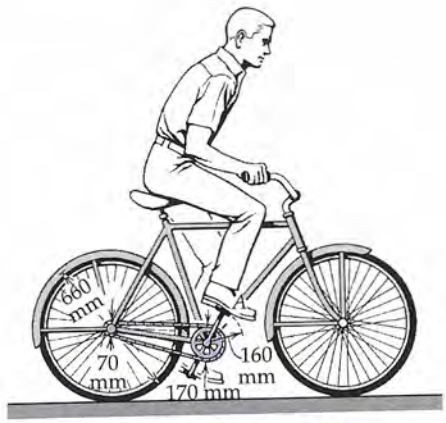


Figura problema 5.134

5.135 Para la posición indicada, hallar la aceleración angular de la placa si la barra de accionamiento AO tiene una velocidad angular constante $\omega_{OA} = 4$ rad/s y es $\theta = 60°$ para las dos barras.

Resp. $\alpha_{AB} = 15{,}40$ rad/s^2 H

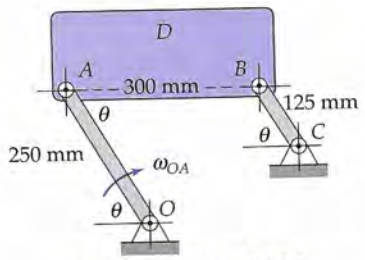


Figura problema 5.135

http://gratislibrospdf.com/

5.136 En el instante considerado es $\theta = 45°$ y la placa triangular ABC posee una velocidad angular antihoraria de 20 rad/s y una aceleración angular horaria de 100 rad/s^2. Hallar los módulos de las correspondientes velocidad **v** y aceleración **a** del vástago del pistón del cilindro hidráulico unido a C.

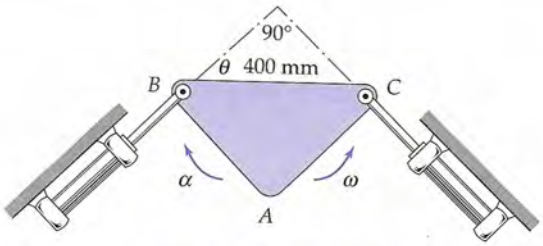


Figura problema 5.136

5.137 Se representa otra vez el sistema articulado del problema 5.70. En el instante en que $\theta = \beta = 60°$, el cilindro hidráulico comunica a A una velocidad $v_A = 1{,}2$ m/s que aumenta a razón de 0,9 m/s cada segundo. Hallar la aceleración angular de la barra BC en ese instante.

Resp. $\alpha_{BC} = 2{,}08$ rad/s^2 AH

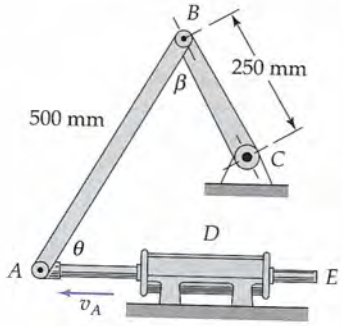


Figura problema 5.137

5.138 Si en ambos casos el disco rueda sin deslizamiento por la superficie circular, hallar la aceleración del punto C del disco instantáneamente en contacto con la superficie circular. La velocidad y aceleración angulares del disco son ω y α, respectivamente.

5.139 Se repite aquí la figura del problema 5.77, con la adición de unos ejes de referencia. Si AB tiene una velocidad angular antihoraria constante de 40 rad/s durante un intervalo que comprende el instante representado, hallar la aceleración angular de AO y la aceleración del punto D. Expresar los resultados en notación vectorial.

Resp. $\mathbf{a}_D = -120(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ m/s^2, $\boldsymbol{\alpha}_{AO} = 0$

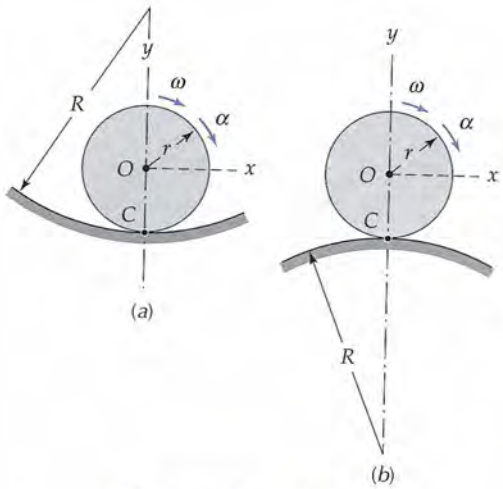


Figura problema 5.138

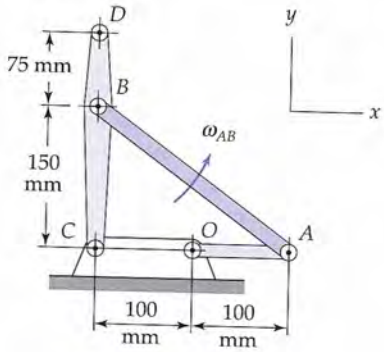


Figura problema 5.139

5.140 Se repite aquí el mecanismo del problema 5.67. En el instante considerado, la placa triangular tiene una velocidad angular horaria de 3 rad/s y OA tiene una aceleración angular nula. Hallar las aceleraciones de AD y BC en ese instante.

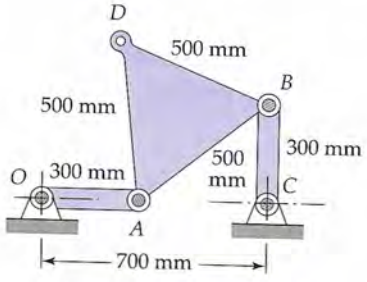


Figura problema 5.140

http://gratislibrospdf.com/

5.141 Se repite aquí el mecanismo de despliegue del brazo magnetométrico de nave espacial del problema 5.83. La manivela de arrastre OB lleva una velocidad angular horaria constante ω_{OB} de 0,5 rad/s al cruzar la vertical. Hallar la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_{CA}$ del brazo en la posición representada, para la que tg $\theta = 4/3$.

Resp. $\boldsymbol{\alpha}_{CA} = -0{,}0758\mathbf{k}$ rad/s^2

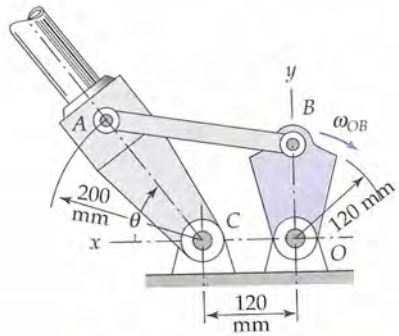


Figura problema 5.141

5.142 Se repite aquí el sistema articulado del problema 5.84. Si OA posee una velocidad angular antihoraria constante $\omega_0 = 10$ rad/s, calcular la aceleración angular de la barra AB para la posición en que las coordenadas de A son $x = -60$ mm e $y = 80$ mm. Para esa posición, la barra BC se halla vertical. Resolver por álgebra vectorial. (Aprovechar los resultados del problema 5.84 en que las velocidades angulares de AB y BC son $\boldsymbol{\omega}_{BC} = 5{,}83\mathbf{k}$ rad/s y $\boldsymbol{\omega}_{AB} = 2{,}5\mathbf{k}$ rad/s.)

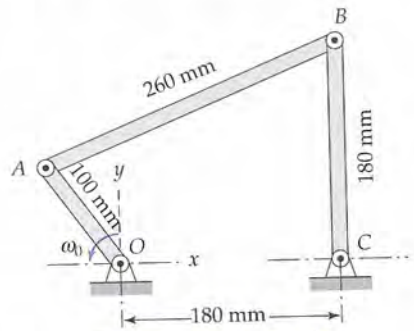


Figura problema 5.142

5.143 Se representan los órganos de una sierra de arco. La hoja está montada en un bastidor en forma de arco que se desliza por la guía horizontal. Si el motor hace que el volante gire constantemente a 60 rpm en sentido antihorario, hallar la aceleración de la hoja para la posición en que $\theta = 90°$ y la correspondiente aceleración angular de la biela AB.

Resp. $a_A = 4{,}89$ m/s^2, $\alpha_{AB} = 0{,}467$ rad/s^2 AH

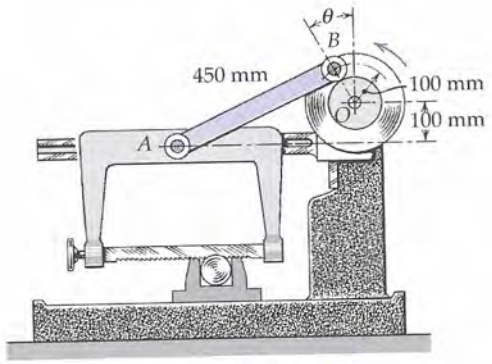


Figura problema 5.143

5.144 Se representa otra vez el cucharón de quijadas simplificado del problema 5.79. Suponiendo que el taco guía O permanezca fijo y que la velocidad del cable de accionamiento sea constante e igual a 0,5 m/s en C, hallar la aceleración angular α de la quijada derecha cuando $\theta = 45°$ y el mecanismo está cerrándose.

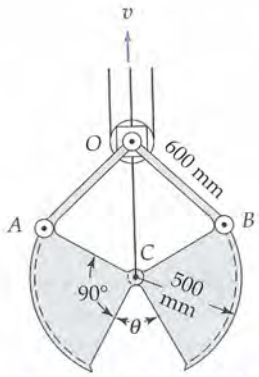


Figura problema 5.144

5.145 Si el extremo A de la barra vinculada posee una velocidad descendente constante v_A de 2 m/s cuando la barra pasa

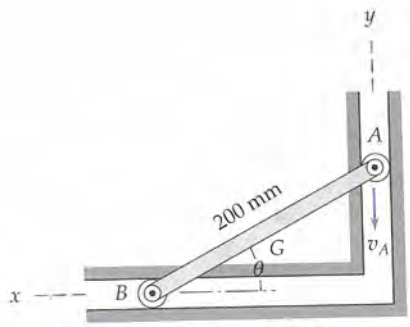


Figura problema 5.145

http://gratislibrospdf.com/

por la posición $\theta = 30°$, hallar la aceleración del centro de masa G de la barra que se encuentra en el centro de la misma. Comparar la solución obtenida gráficamente con la obtenida por álgebra vectorial.

Resp. $a_G = 15{,}40 \text{ m/s}^2$

5.146 El movimiento de la barra ABC está gobernado por el desplazamiento del vástago del émbolo del cilindro hidráulico D y por la guía vertical del cursor articulado en B. En el instante en que $\theta = 45°$, el vástago está retrocediendo a la velocidad constante $v_C = 180$ mm/s. Hallar la velocidad del punto A en ese instante.

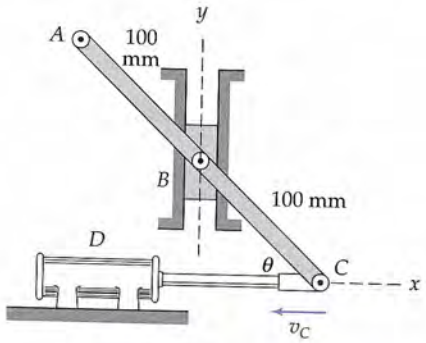


Figura problema 5.146

5.147 Se repite aquí el mecanismo del problema 5.113. La banda flexible F sujeta al sector en E recibe una velocidad constante de 4 m/s, tal como se muestra. Hallar la aceleración angular de BD en el instante en que BD está perpendicular a OA.

Resp. $\alpha_{BD} = 46{,}9 \text{ rad/s}^2$ H

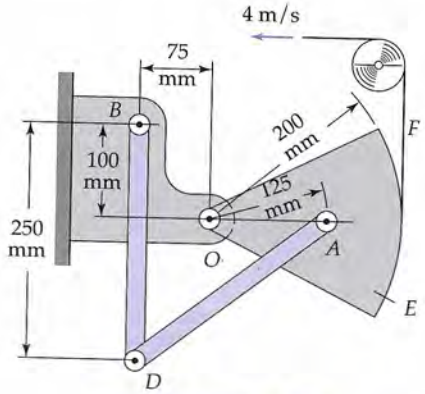


Figura problema 5.147

5.148 Se repite aquí el dispositivo de maniobra del problema 5.80. Si la varilla de mando tiene una velocidad de 0,9 m/s y una desaceleración de 6 m/s^2 cuando $\theta = 60°$, hallar el módulo de la aceleración de C.

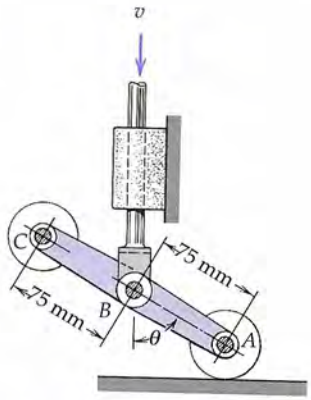


Figura problema 5.148

▶ **5.149** En la figura se representa una instalación de bombeo para la extracción de petróleo. La varilla flexible D de la bomba está sujeta al sector en E y penetra siempre vertical por el canal guía situado bajo D. La biela AB hace que oscile la viga BCE cuando rota el cigüeñal OA descompensado. Si éste gira en sentido horario dando una vuelta cada tres segundos, hallar la aceleración de la varilla D de la bomba cuando la viga y el cigüeñal se encuentran ambos en posición horizontal como se muestra en la figura.

Resp. $a_D = 0{,}568 \text{ m/s}^2$

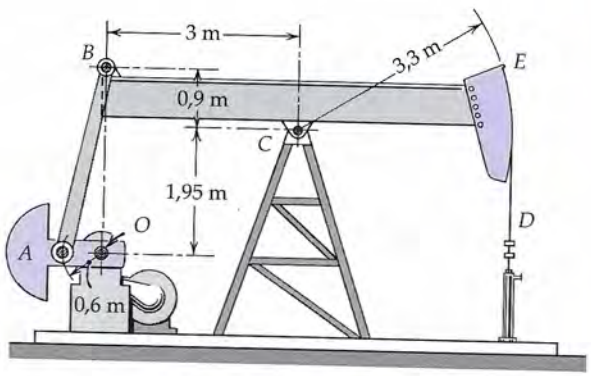


Figura problema 5.149

http://gratislibrospdf.com/

▶ **5.150** Un mecanismo intermitente para arrastre de cinta perforada consiste en la pieza *DAB* accionada por la manivela *OB*. La línea de trazos representa la trayectoria de la uña *D*. Hallar la aceleración de ésta en el instante representado, en que *OB* y *CA* están ambas horizontales, si *OB* tiene una velocidad de rotación horaria constante de 120 rpm.

Resp. $a_D = 1997 \text{ mm/s}^2$

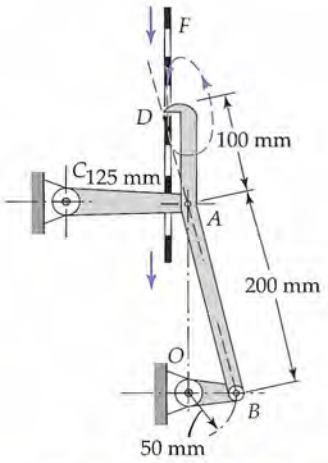


Figura problema 5.150

5.7 MOVIMIENTO RELATIVO A EJES EN ROTACIÓN

Cuando en el apartado 2.9 tratamos del movimiento de los puntos materiales y al aplicar en este capítulo las ecuaciones del movimiento relativo al movimiento plano de los cuerpos rígidos, todas las velocidades relativas y todas las aceleraciones relativas se medían respecto a ejes de referencia *no giratorios*. Sin embargo, la solución a muchos problemas de Cinemática en los que el movimiento se genera dentro de un sistema que es por sí mismo rotatorio, o bien se observa desde uno de éstos, dicha solución se facilita notablemente si se emplean ejes de referencia en rotación. Como ejemplo de este tipo de movimientos puede citarse la trayectoria descrita por una partícula de fluido a lo largo de uno de los álabes curvos de una bomba centrífuga, en el que la trayectoria relativa a los álabes del impulsor se convierte en un dato de diseño de gran importancia.

Comenzaremos la descripción del movimiento con ejes giratorios considerando el movimiento plano ejecutado por dos puntos *A* y *B* en el plano fijo *X*-*Y* (fig. 5.10*a*). A efectos de generalidad, por el momento supondremos que *A* y *B* se mueven independientemente uno del otro. Ahora observaremos el movimiento de *A* desde un sistema de referencia *x*-*y* móvil, con su origen fijo en *B*, que gira con una velocidad angular constante $\omega = \dot{\theta}$ que podemos escribirla en forma vectorial como $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = \dot{\theta}\,\mathbf{k}$, siendo el vector normal al plano del movimiento, cuyo sentido positivo es el *z* positivo (saliendo del plano de la figura) tal como impone la regla de la mano derecha. El vector de posición absoluta de *A* es

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r} = \mathbf{r}_B + (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \qquad (5.10)$$

donde **i** y **j** son vectores unitarios del sistema *x*-*y* y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ representa a $\mathbf{r}_{A/B}$, vector de posición de *A* respecto a *B*. El cálculo de velocidades y aceleraciones requiere derivaciones sucesivas respecto al tiempo de la expresión del vector de posición. Contrariamente a lo que ocurría en el caso de ejes en traslación tratado en el apartado 2.8, aquí los vectores unitarios **i** y **j** giran acompañando a los ejes *x*-*y*, por lo que sus derivadas temporales no son nulas y deben calcularse. Estas derivarse pueden verse en la figura 5.10*b*, en la que se representa la

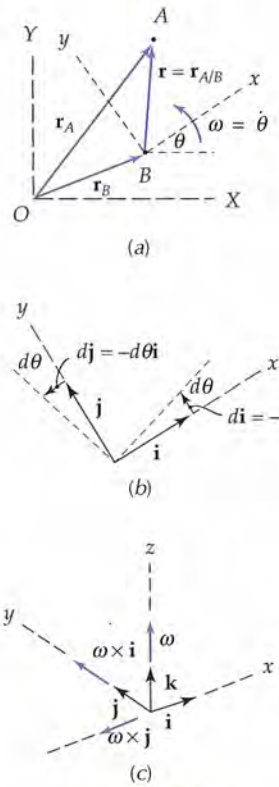


Figura 5.10

http://gratislibrospdf.com/

variación infinitesimal de cada uno de los vectores unitarios durante el intervalo dt en que los ejes de referencia rotan un ángulo $d\theta = \omega\, dt$. La variación infinitesimal de $\mathbf{i}$ es $d\mathbf{i}$, cuya dirección es la de $\mathbf{j}$ y cuyo módulo es igual al ángulo $d\theta$ multiplicado por el módulo de $\mathbf{i}$, que es uno; así pues, $d\mathbf{i} = d\theta\mathbf{j}$. Análogamente, el vector unitario $\mathbf{j}$ tiene una variación infinitesimal $d\mathbf{j}$ dirigida en el sentido x positivo, por lo que $d\mathbf{j} = -\,d\theta\mathbf{i}$. Dividiendo por dt y sustituyendo $d\mathbf{i}/dt$ por $\mathbf{i}$, $d\mathbf{j}/dt$ por $\mathbf{j}$, y $d\theta/dt$ por $\dot{\theta} = \omega$, resulta

$$\dot{\mathbf{i}} = \omega\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \dot{\mathbf{j}} = -\,\omega\mathbf{i}$$

Introduciendo el producto vectorial, podemos escribir $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} = \omega\mathbf{j}$ y $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} = -\,\omega\,\mathbf{i}$, según se ve en la figura 5.10*c*. Por tanto, las derivadas temporales de los vectores unitarios pueden escribirse

$$\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \qquad \text{y} \qquad \dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \tag{5.11}$$

(a) Velocidad relativa. Estas expresiones 5.11 vamos ahora a emplearlas al derivar respecto al tiempo la relación entre los vectores de posición de A y B y obtener así la ecuación de la velocidad relativa. Derivando 5.10 resulta

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_A &= \dot{\mathbf{r}}_B + \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \\ &= \dot{\mathbf{r}}_B + (\dot{x}\mathbf{i} + y\dot{\mathbf{j}}) + (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j})\end{aligned}$$

Ahora bien, $\dot{x}\mathbf{i} + y\dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\omega} \times x\mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} \times y\mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Además, como el observador situado en x-y mide una velocidad de componentes $\dot{x}$ e $\dot{y}$, vemos que $\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = \mathbf{v}_{\text{rel}}$ que es la velocidad relativa al sistema de referencia x-y. Así pues, la ecuación de la velocidad relativa queda

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \tag{5.12}$$

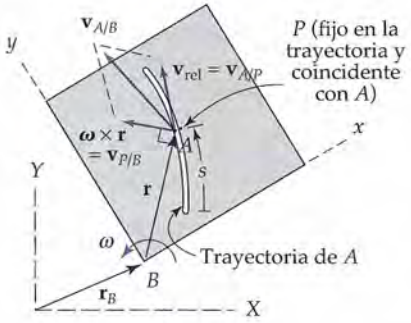


Figura 5.11

Comparando esta expresión 5.12 con la 2.20 para ejes no giratorios se ve que $\mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$, de lo que podemos concluir que el término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ representa la diferencia entre medir la velocidad relativa respecto a ejes no giratorios y respecto a ejes giratorios.

Para ilustrar aún más el significado de los dos últimos términos de 5.12, en la figura 5.11 se representa el movimiento del punto A como si tuviera lugar a lo largo de una ranura curva practicada en una placa que representa el sistema giratorio x-y. La velocidad $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ de A medida respecto a la placa sería tangente a la trayectoria fija en el plano x-y y su módulo sería $\dot{s}$, medido s a lo largo de la trayectoria. Esta velocidad relativa puede contemplarse también como la velocidad $\mathbf{v}_{A/P}$ de A respecto a un punto P fijo a la placa y que coincide con A en el instante considerado. El término $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ tiene un módulo $r\dot{\theta}$ y una dirección normal a $\mathbf{r}$ y representa la velocidad del punto P respecto a B, tal como se vería desde unos ejes no giratorios fijos a B.

Las comparaciones siguientes servirán como ayuda para establecer la equivalencia y aclarar la diferencia entre las ecuaciones de la velocidad relativa para ejes de referencia giratorios y no giratorios

http://gratislibrospdf.com/

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \\ \mathbf{v}_A &= \underbrace{\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{P/B}}\ + \mathbf{v}_{A/P} \\ \mathbf{v}_A &= \quad \mathbf{v}_P \quad\ \underbrace{+ \mathbf{v}_{A/P}} \\ \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B \quad + \quad \mathbf{v}_{A/B} \end{aligned} \qquad (5.12a)$$

En la segunda ecuación, el término $\mathbf{v}_{P/B}$ debe medirse desde una posición no giratoria, pues si no, será nulo. El término $\mathbf{v}_{A/P}$ es el mismo que $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ y es la velocidad de A medida en el sistema x-y. En la tercera ecuación $\mathbf{v}_P$ es la velocidad absoluta de P y representa el efecto del movimiento a la vez de traslación y de rotación del sistema de coordenadas. La cuarta ecuación es igual a la desarrollada para ejes no giratorios (ec. 2.20) y se ve que $\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_{P/B} + \mathbf{v}_{A/P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$.

(b) Transformación de derivadas temporales. La ecuación 5.12 representa la transformación de la derivada temporal del vector de posición de A al pasar de los ejes giratorios a los no giratorios. Este resultado podemos generalizarlo sin dificultad y hacerlo válido para la derivada temporal de toda cantidad vectorial $\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j}$. Para ésta, la derivada total respecto al tiempo tomada en el sistema X-Y es

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{XY} = (\dot{V}_x\mathbf{i} + \dot{V}_y\mathbf{j}) + (V_x\dot{\mathbf{i}} + V_y\dot{\mathbf{j}})$$

Los dos primeros términos representan la parte de la derivada total de $\mathbf{V}$ que se mide con relación al sistema de referencia x-y, y los dos segundos términos representan la parte de la derivada que se debe a la rotación del sistema de referencia. Empleando las expresiones 5.11 de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, podemos escribir

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{XY} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{xy} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \qquad (5.13)$$

Aquí $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$ representa la diferencia entre la derivada del vector respecto al tiempo medida en una referencia fija y la misma derivada medida en una referencia giratoria. Como veremos al presentar el movimiento en tres dimensiones en el apartado 7.2, la ecuación 5.13 es válida también para tres dimensiones.

En la figura 5.12 se ilustra el significado físico de la ecuación 5.13. En esa figura se representa el vector $\mathbf{V}$ en el instante t tal como se observa, a la vez, desde los ejes fijos X-Y y desde los ejes giratorios x-y. Como sólo tratamos de los efectos de la rotación, el vector puede representarse sobre el origen de coordenadas sin pérdida de generalidad. Durante el intervalo de tiempo dt, el vector pasa a $\mathbf{V}'$ y el observador de x-y mide las componentes dV, debida a la variación del módulo, y $V\,d\beta$, debida a la rotación $d\beta$ respecto a x-y. O sea, para el observador en rotación, la derivada $(d\mathbf{V}/dt)_{xy}$, que él mide, tiene las componentes dV/dt y $V\,d\beta/dt = V\dot{\beta}$. La parte de la derivada temporal que el observador en rotación no mide vale $V\,d\theta/dt$ y en forma vectorial es $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$. Así pues, físicamente vemos que, según el diagrama, es

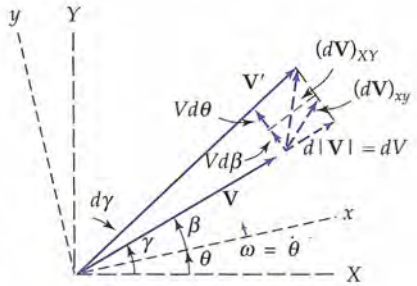


Figura 5.12

$$(\dot{\mathbf{V}})_{XY} = (\dot{\mathbf{V}})_{xy} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$$

que es la ecuación 5.13.

http://gratislibrospdf.com/

(c) Aceleración relativa. La expresión de la aceleración relativa puede obtenerse derivando la ecuación de la velocidad relativa 5.12; o sea,

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}}_{\text{rel}}$$

En la deducción de la ecuación 5.12 vimos que

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) + (x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}})$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

Por tanto, el tercer término del segundo miembro de la expresión de la aceleración queda

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}}) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

Con ayuda de las relaciones 5.11, el último término del segundo miembro de la expresión de $\mathbf{a}_A$ queda

$$\dot{\mathbf{v}}_{\text{rel}} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j})$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j})$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

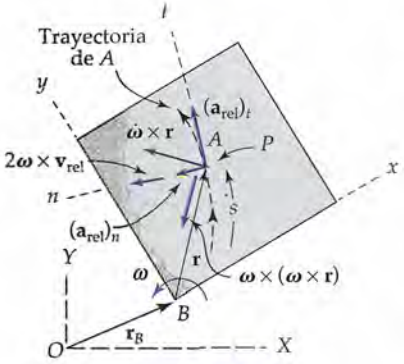


Figura 5.13

Sustituyendo $\dot{\mathbf{r}}$ y $\dot{\mathbf{v}}_{\text{rel}}$ por sus valores en la expresión de $\mathbf{a}_A$ y agrupando términos resulta

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} \qquad (5.14)$$

Esta ecuación 5.14 es la expresión vectorial de la aceleración absoluta de un punto material A en función de su aceleración $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ medida en un sistema de coordenado móvil que gira a velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y tiene una aceleración angular $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. En la figura 5.13 se representan los términos $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$ y $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ que corresponden, respectivamente, a las componentes t y n de la aceleración $\mathbf{a}_{P/B}$ del punto coincidente P en su movimiento circular respecto a B. Este movimiento podría observarse desde unos ejes no giratorios que se muevan con B. El módulo de $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$ es $r\ddot{\theta}$ y su dirección es tangente al círculo. El módulo de $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ es $r\omega^2$ y su dirección va de P a B sobre la normal al círculo. La aceleración $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ de A respecto a la trayectoria puede expresarse en el sistema giratorio utilizando coordenadas rectangulares o polares, o bien las componentes normal y tangencial. Por regla general, estas últimas son las más utilizadas y se representan en la figura 5.13. El módulo de la componente tangencial es $(a_{\text{rel}})_t = \ddot{s}$, siendo s la distancia hasta A medida a lo largo de la trayectoria, y el módulo de la componente normal es $v_{\text{rel}}{}^2/\rho$, donde ρ es el radio de curvatura de la trayectoria medido en x-y. El sentido de este último vector está dirigido siempre hacia el centro de curvatura.

El término $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$, que se representa en la figura 5.13, se conoce como aceleración de *Coriolis*[1] y representa la diferencia entre la aceleración de A respecto a P medida en el sistema no giratorio y la medida en el sistema giratorio.

[1] En honor del ingeniero militar francés G. Coriolis (1792-1843), quien fue el primero en llamar la atención acerca de este término

http://gratislibrospdf.com/

Su dirección es siempre normal a $\mathbf{v}_{rel}$ y su sentido queda fijado por la regla de la mano derecha del producto vectorial.

Imaginar qué es la aceleración de Coriolis resulta difícil, pues se trata de un término compuesto de dos efectos físicos separados. Como ayuda, vamos a considerar el movimiento más sencillo en el que aparezca ese término. En la figura 5.14 se presenta un disco que gira, dotado de una ranura radial por la que una partícula A está limitada a deslizarse. Supongamos que el disco gire con una velocidad angular constante $\omega = \dot{\theta}$ y que la partícula se mueva con una celeridad constante $v_{rel} = \dot{x}$ respecto a la ranura. La velocidad de A tiene una componente $\dot{x}$ debida a su movimiento a lo largo de la ranura y una componente $x\omega$, debida a la rotación de la ranura. Las variaciones de ambas componentes debidas a la rotación del disco se representan en la parte b de la figura para el intervalo de tiempo dt durante el cual los ejes x-y giran con el disco un ángulo $d\theta$ pasando a ocupar la posición x'-y'. Durante ese intervalo, el incremento de velocidad debido al cambio de dirección de $\mathbf{v}_{rel}$ es $\dot{x}\, d\theta$, y el debido a la variación del módulo de $x\omega$ es $\omega\, dx$, ambos en la dirección y normal a la ranura. Dividiendo ambos incrementos por dt y sumando resulta $\omega\dot{x} + \dot{x}\omega = 2\dot{x}w$, que es el módulo de la aceleración de Coriolis $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel}$. Dividiendo por dt el incremento de velocidad restante $x\omega\, d\theta$ debido al cambio de dirección de $x\omega$ resulta $x\omega\dot{\theta}$ o $x\omega^2$, que es la aceleración de un punto P fijo a la ranura y que en el instante considerado coincide con la partícula A. Vemos entonces que la ecuación 5.14 se ajusta a estos resultados. Si tomamos B como origen, es $\mathbf{a}_B = \mathbf{0}$. Además, si la velocidad angular es constante, resulta que $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. Si el módulo de $\mathbf{v}_{rel}$ es constante y la ranura carece de curvatura, es $\mathbf{a}_{rel} = \mathbf{0}$. En tales condiciones, nos queda

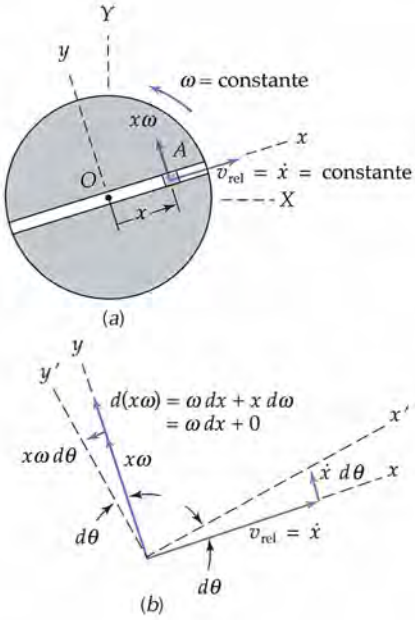


Figura 5.14

$$\mathbf{a}_A = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel}$$

Sustituyendo $\mathbf{r}$ por $x\mathbf{i}$, $\boldsymbol{\omega}$ por $\omega\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_{rel}$ por $\dot{x}\,\mathbf{i}$ resulta

$$\mathbf{a}_A = -x\omega^2\mathbf{i} + 2\dot{x}\omega\mathbf{j}$$

que concuerda con el análisis de la figura 5.14. Observemos además que este mismo resultado aparece en el estudio en coordenadas polares del movimiento curvilíneo plano realizado en el apartado 2.14 cuando se hace $\ddot{r} = 0$ y $\ddot{\theta} = 0$ y se sustituye r por x y $\dot{\theta}$ por ω. Si la ranura del disco de la figura 5.14 hubiera sido curva, la aceleración relativa al disco tendría una componente normal y $\mathbf{a}_{rel}$ no sería nula.

Las comparaciones siguientes servirán como ayuda para establecer la equivalencia y aclarar la diferencia entre las ecuaciones de la aceleración relativa para ejes giratorios y no giratorios:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\mathbf{a}_{P/B}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}}_{\mathbf{a}_{A/P}} \\
\mathbf{a}_A &= \underbrace{\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{P/B}}_{\mathbf{a}_P} + \mathbf{a}_{A/P} \\
\mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_P + \underbrace{\mathbf{a}_{A/P}}_{\mathbf{a}_{A/B}} \\
\mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}
\end{aligned} \qquad (5.14a)$$

La equivalencia entre $\mathbf{a}_{P/B}$ y $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, que muestra la segunda ecuación, ya se ha descrito. En la tercera ecuación, donde se combinan $\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{P/B}$ para dar $\mathbf{a}_P$, puede verse que el término de aceleración relativa $\mathbf{a}_{A/P}$, a diferencia del termino de velocidad relativa correspondiente, no es igual a la ace-

http://gratislibrospdf.com/

leración relativa $\mathbf{a}_{rel}$ medida en el sistema de referencia giratorio x-y. Por consiguiente, el término de Coriolis es la diferencia entre la aceleración $\mathbf{a}_{A/P}$ de A respecto a P medida en un sistema no giratorio y la aceleración $\mathbf{a}_{rel}$ de A respecto a P medida en un sistema giratorio. De la cuarta ecuación resulta que la aceleración $\mathbf{a}_{A/B}$ de A respecto a B medida en un sistema no giratorio (ec. 2.21) es una combinación de los cuatro últimos términos de la primera ecuación que se refiere al sistema giratorio.

El significado de la relación 5.14 acaso pueda interpretarse de manera algo más sencilla escribiendo la aceleración de A en función de la aceleración del punto coincidente P. Como la aceleración de P es $\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, la expresión 5.14 podemos volver a escribirla

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_P + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel} \qquad (5.14b)$$

Si la expresión de $\mathbf{a}_A$ la escribimos de este modo, el punto P ya no podemos tomarlo al azar porque se trata de un punto solidario del sistema de referencia giratorio que coincide con A en el instante considerado. Aquí también debe emplearse la figura 5.13 para aclarar el significado de cada término de la ecuación 5.14 y su equivalente la 5.14*b*.

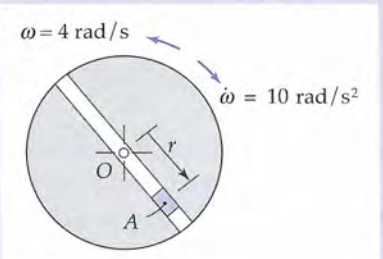
En resumen, una vez establecido el sistema de referencia giratorio, deben identificarse las cantidades siguientes:

$\mathbf{v}_B$ = velocidad absoluta del origen B de los ejes giratorios
$\mathbf{a}_B$ = aceleración absoluta del origen B de los ejes giratorios
$\mathbf{r}$ = vector de posición del punto coincidente P medido desde B
$\boldsymbol{\omega}$ = velocidad angular de los ejes giratorios
$\dot{\boldsymbol{\omega}}$ = aceleración angular de los ejes giratorios
$\mathbf{v}_{rel}$ = velocidad de A medida relativamente a los ejes giratorios
$\mathbf{a}_{rel}$ = aceleración de A medida relativamente a los ejes giratorios

Es aconsejable, además, que recordemos que el análisis por vectores que hemos llevado a cabo depende de la utilización sistemática de sistemas de ejes coordenados a derechas. Señalemos, por último, que las ecuaciones 5.12 y 5.14, que aquí se han desarrollado para el movimiento plano, son asimismo válidas para el movimiento en el espacio y que en el apartado 7.6 se efectuará la correspondiente generalización.

PROBLEMA TIPO 5.16

En el instante considerado, el disco dotado de la ranura radial gira en torno a O con una velocidad angular antihoraria de 4 rad/s que decrece a razón de 10 rad/s². El movimiento del cursor A se controla independientemente y en ese instante es $r = 150$ mm, $\dot{r} = 125$ mm/s y $\ddot{r} = 2025$ mm/s². Hallar la velocidad y aceleración absolutas de A para la posición considerada.



http://gratislibrospdf.com/

Solución. Es este un caso de movimiento relativo a una trayectoria en rotación, por lo que parece indicado utilizar un sistema coordenado con el origen en O. Fijemos los ejes x-y al disco y empleemos los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

Velocidad. Con el origen en O desaparece el término $\mathbf{v}_B$ de la ecuación 5.12 y tenemos

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel} \quad (1)$$

Expresada vectorialmente, la velocidad angular es $\boldsymbol{\omega} = 4\mathbf{k}$ rad/s, siendo $\mathbf{k}$ el vector unitario perpendicular al plano x-y en la dirección $+z$. Entonces, la ecuación de la velocidad relativa queda (2)

$$\mathbf{v}_A = 4\mathbf{k} \times 0{,}150\mathbf{i} + 0{,}125\mathbf{i} = 0{,}600\mathbf{j} + 0{,}125\mathbf{i} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

y $\mathbf{v}_A$ tiene la dirección indicada y su módulo vale

$$v_A = \sqrt{(0{,}600)^2 + (0{,}125)^2} = 0{,}613 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Aceleración. La ecuación 5.14, escrita para el caso en que el origen de coordenadas tenga una aceleración nula, es

$$\mathbf{a}_A = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}$$

cuyos términos son

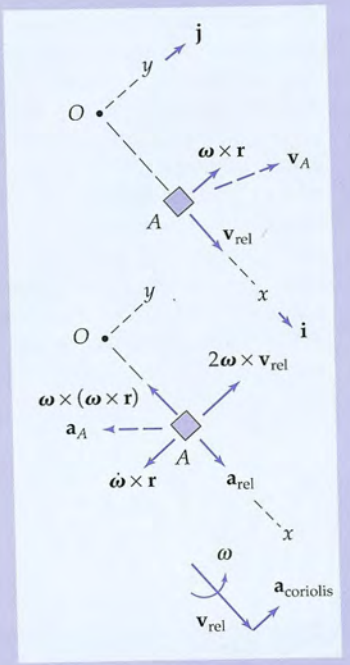
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= 4\mathbf{k} \times (4\mathbf{k} \times 0{,}150\mathbf{i}) = 4\mathbf{k} \times 0{,}6\mathbf{j} = -2{,}4\mathbf{i} \text{ m/s}^2 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} &= -10\mathbf{k} \times 0{,}150\mathbf{i} = -1{,}5\mathbf{j} \text{ m/s}^2 \\ 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} &= 2(4\mathbf{k}) \times 0{,}125\mathbf{i} = 1{,}0\mathbf{j} \text{ m/s}^2 \\ \mathbf{a}_{rel} &= 2{,}025\mathbf{i} \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Por tanto, la aceleración total es

$$\mathbf{a}_A = (2{,}025 - 2{,}4)\mathbf{i} + (1{,}0 - 1{,}5)\mathbf{j} = -0{,}375\mathbf{i} - 0{,}5\mathbf{j} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

cuya dirección se indica y cuyo módulo es

$$a_A = \sqrt{(0{,}375)^2 + (0{,}5)^2} = 0{,}625 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$



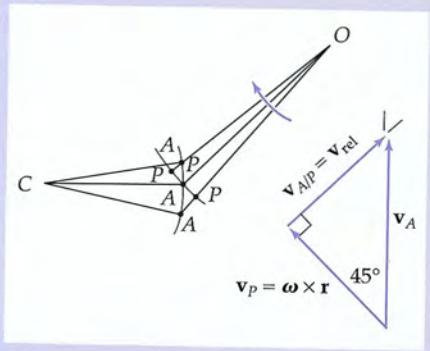
Para resolver este problema no es imprescindible utilizar la notación vectorial y el lector debe ser capaz de efectuar cada paso aplicando la notación escalar con la misma facilidad. El sentido correcto de la aceleración de Coriolis puede siempre determinarse teniendo presente que es el sentido en que se movería el extremo del vector $\mathbf{v}_{rel}$ si se hiciera girar alrededor de su origen, tal como se muestra, en el mismo sentido que indica $\boldsymbol{\omega}$.

(1) **Esta ecuación es la misma que $v_A = v_P + v_{A/P}$, donde P es un punto fijo al disco coincidente con A en el instante considerado.**

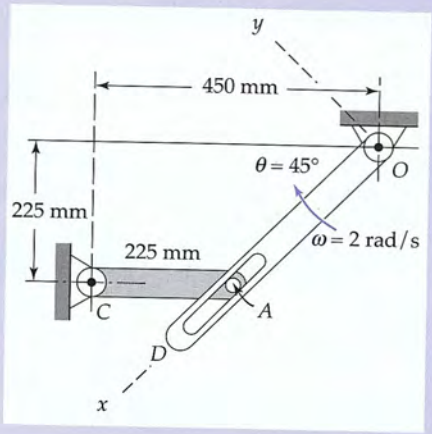
(2) **Recuérdese que el sistema de ejes x-y-z es a derechas.**

(3) **Es importante comprender bien que $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ y $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$ representan las componentes normal y tangencial de la aceleración de un punto P del disco coincidente con A. Esta descripción es la correspondiente a la ecuación 5.14*b*.**

http://gratislibrospdf.com/

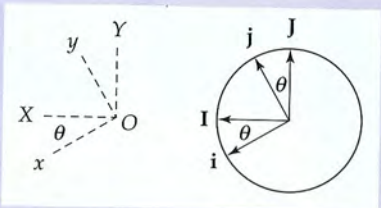


La clavija A de la varilla basculante AC está limitada a moverse en la ranura giratoria de la varilla OD. La velocidad angular de ésta es $\omega = 2$ rad/s, en sentido horario, y se mantiene constante en el intervalo de tiempo que interesa. Para la posición en que $\theta = 45°$ con AC horizontal, hallar la velocidad de la clavija A y la velocidad de ésta relativa a la ranura giratoria de OD.



(1) **Físicamente, está bastante claro que *CA* tendrá una velocidad angular antihoraria para las condiciones especificadas, por lo que prevemos que para ω_{CA} resultará un valor negativo.**

(2) **El procedimiento de resolución de este problema no está limitado en lo que se refiere a los ejes utilizados. Así, otra posibilidad sería colocar el origen de los ejes *x-y*, que seguirían solidarios de *OD*, en el punto coincidente *P* perteneciente a *CD*. Con ello ocurriría simplemente que ω x r sería sustituida por su igual v_P. También podríamos haber expresado todos los vectores en componentes *X-Y*, empleando los vectores unitarios I y J.**



La conversión directa entre los dos sistemas de referencia se obtiene de la geometría de la circunferencia de radio unidad es

$$\mathbf{i} = \mathbf{I}\cos\theta - \mathbf{J}\,\text{sen}\,\theta$$

y

$$\mathbf{j} = \mathbf{I}\,\text{sen}\,\theta + \mathbf{J}\cos\theta$$

Solución. Dado que el punto (la clavija) *A* describe una trayectoria, parece aconsejable emplear unos ejes coordenados giratorios *x-y* solidarios del brazo *OD*. Con el origen en el punto fijo *O*, el término $\mathbf{v}_B$ de la ecuación 5.12 desaparece y nos queda $\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel}$.

La velocidad de *A* en su movimiento circular en torno a *C* es

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_{CA} \times \mathbf{r}_{CA} = \omega_{CA}\mathbf{k} \times (225\sqrt{2})(-\mathbf{i} - \mathbf{j}) = (225\sqrt{2})\omega_{CA}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

(1) donde a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{CA}$ le asignamos arbitrariamente el sentido horario sobre la dirección *z* positiva (+ **k**).

La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de los ejes giratorios es la del brazo *OD* y, según la regla de la mano derecha, es $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = 2\mathbf{k}$ rad/s. El vector que une el origen con el punto *P* de *OD* coincidente con *A* es $\mathbf{r} = \overline{OP}\,\mathbf{i} = \sqrt{(450 - 225)^2 + (225)^2}\,\mathbf{i} = 225\sqrt{2}\,\mathbf{i}$ mm. O sea,

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 2\mathbf{k} \times 225\sqrt{2}\mathbf{i} = 450\sqrt{2}\mathbf{j}\ \text{mm/s}$$

Por último, el término velocidad relativa $\mathbf{v}_{rel}$, es la velocidad medida por un observador solidario del sistema de referencia giratorio y es $\mathbf{v}_{rel} = \dot{x}\,\mathbf{i}$. Sustituyéndola en la expresión de la velocidad relativa queda

$$(225\sqrt{2})\omega_{CA}(\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 450\sqrt{2}\mathbf{j} + \dot{x}\mathbf{i}$$

Igualando por separado los coeficientes de los vectores **i** y **j** resulta

$$(225\sqrt{2})\omega_{CA} = \dot{x} \qquad \text{y} \qquad -(225\sqrt{2})\omega_{CA} = 450\sqrt{2}$$

por lo que da

$$\omega_{CA} = -4\ \text{rad/s} \qquad \text{y} \qquad \dot{x} = v_{rel} = -450\sqrt{2}\ \text{mm/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Como ω_{CA} es negativa, resulta que la velocidad angular de *CA* es en realidad antihoraria y, por tanto, la velocidad de *A* está dirigida hacia arriba y su módulo es

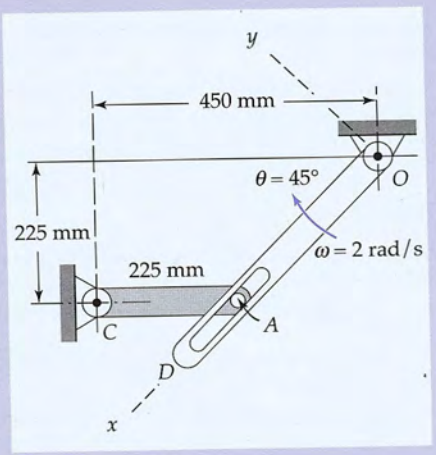
(2) $$v_A = 225(4) = 900\ \text{mm/s} \qquad \textit{Resp.}$$

http://gratislibrospdf.com/

La interpretación geométrica de los términos es útil y se hace fácilmente. Con la equivalencia entre la tercera y la primera de las ecuaciones 5.12*a*, siendo $\mathbf{v}_B = \mathbf{0}$, podemos escribir $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{A/P}$, donde P es el punto del brazo giratorio OD coincidente con A. Evidentemente, $v_P = \overline{OP}\omega = 225\sqrt{2}(2) = 450\sqrt{2}$ mm/s y su dirección es normal a OD. La velocidad relativa $\mathbf{v}_{A/P}$, que es la misma que $\mathbf{v}_{rel}$, se ve en la figura que está dirigida hacia O a lo largo de la ranura. Esta conclusión queda clara cuando se observa que A se aproxima a P a lo largo de la ranura desde abajo antes de coincidir y se aleja de P hacia arriba a lo largo de la ranura después de la coincidencia. La velocidad de A es tangente al arco circular de centro en C. La ecuación vectorial puede resolverse ahora, ya que sólo quedan dos escalares desconocidos, que son los módulos de $\mathbf{v}_{A/P}$ y $\mathbf{v}_A$. Para la posición de 45° de la figura se requiere $\mathbf{v}_{A/P} = 450\sqrt{2}$ mm/s y $\mathbf{v}_A = 900$ mm/s, cada una con la dirección que se muestra. La velocidad angular de AC es

$$[\omega = v/r] \qquad \omega_{AC} = v_A/\overline{AC} = 900/225 = 4 \text{ rad/s en sentido antihorario}$$

PROBLEMA TIPO 5.18



Para las condiciones del problema tipo 5.17, hallar la aceleración angular de AC y la aceleración de A relativa a la ranura del brazo giratorio OD.

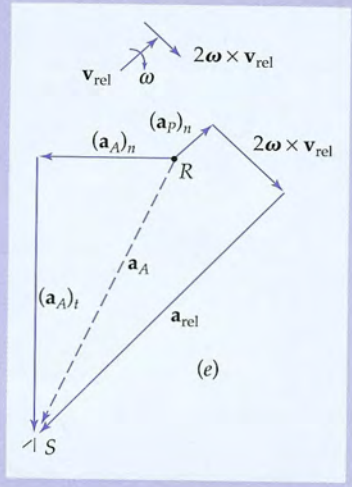
Solución. El sistema de coordenadas giratorio x-y lo fijamos al brazo OD y empleamos la ecuación 5.14. Situando el origen en el punto fijo O, el término $\mathbf{a}_B$ es nulo y, entonces,

$$\mathbf{a}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}$$

Según el proceso de resolución del problema tipo 5.17 tenemos que $\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{k}$ rad/s, $\boldsymbol{\omega}_{CA} = -4\mathbf{k}$ rad/s y $\mathbf{v}_{rel} = -450\sqrt{2}\,\mathbf{i}$ mm/s y podemos escribir

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{CA} \times \mathbf{r}_{CA} + \boldsymbol{\omega}_{CA} \times (\boldsymbol{\omega}_{CA} \times \mathbf{r}_{CA}) \\ &= \dot{\omega}_{CA}\mathbf{k} \times \frac{225}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} - \mathbf{j}) - 4\mathbf{k} \times \left(-4\mathbf{k} \times \frac{225}{\sqrt{2}}[-\mathbf{i} - \mathbf{j}]\right)\end{aligned}$$

http://gratislibrospdf.com/



$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \text{ ya que } \boldsymbol{\omega} = \text{constante}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{k} \times (2\mathbf{k} \times 225\sqrt{2}\mathbf{i}) = -900\sqrt{2}\mathbf{i} \text{ mm/s}^2$$

$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} = 2(2\mathbf{k}) \times (-450\sqrt{2}\mathbf{i}) = -1800\sqrt{2}\mathbf{j} \text{ mm/s}^2$$

$$\mathbf{a}_{rel} = \ddot{x}\mathbf{i} \quad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la velocidad relativa resulta

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(225\dot{\omega}_{CA} + 3600)\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-225\dot{\omega}_{CA} + 3600)\mathbf{j} = -900\sqrt{2}\mathbf{i} - 1800\sqrt{2}\mathbf{j} + \ddot{x}\mathbf{i}$$

Igualando por separado los coeficientes de **i** y **j** tenemos

$$(225\dot{\omega}_{CA} + 3600)/\sqrt{2} = -900\sqrt{2} + \ddot{x}$$

y

$$(-225\dot{\omega}_{CA} + 3600)/\sqrt{2} = -1800\sqrt{2}$$

Despejando las dos incógnitas resulta

$$\dot{\omega}_{CA} = 32 \text{ rad/s}^2 \quad \text{y} \quad \ddot{x} = a_{rel} = 8910 \text{ mm/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Si se desea, la aceleración de A podría también escribirse

$$\mathbf{a}_A = (225\sqrt{2})(32)(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + (3600/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 7637\mathbf{i} - 2546\mathbf{j} \text{ mm/s}^2$$

Para esclarecer aún más el problema vamos a hacer uso de la representación geométrica de la ecuación de la aceleración relativa. Este planteo geométrico puede considerarse como otro procedimiento de resolución. Volvemos a considerar el punto P de OD coincidente con A. Los términos escalares equivalentes son

$$(a_A)_t = |\dot{\boldsymbol{\omega}}_{CA} \times \mathbf{r}_{CA}| = r\dot{\omega}_{CA} = r\alpha_{CA} \text{ normal a } CA, \text{ sentido desconocido}$$

$$(a_A)_n = |\boldsymbol{\omega}_{CA} \times (\boldsymbol{\omega}_{CA} \times \mathbf{r}_{CA})| = r\dot{\omega}_{CA}^2 \text{ de } A \text{ a } C$$

$$(a_P)_n = |\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})| = \overline{OP}\omega^2 \text{ de } P \text{ a } O$$

$$(a_P)_t = |\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}| = r\dot{\omega} = 0 \text{ ya que } \omega = \text{constante}$$

$$|2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel}| = 2\omega v_{rel} \text{ en la dirección que se indica}$$

$$a_{rel} = \ddot{x} \text{ según } OD, \text{ sentido desconocido}$$

A partir de un punto R sumamos los vectores conocidos de cada miembro de la ecuación, dibujándolos uno tras otro origen con extremo, hasta llegar al punto de intersección S de las direcciones conocidas de $(\mathbf{a}_A)_t$ y $\mathbf{a}_{rel}$ que establece la solución. El cierre del polígono determina el sentido de los dos vectores desconocidos y sus módulos se calculan fácilmente por la geometría de la figura. (2)

(1) **Si la ranura fuese curva con radio de curvatura ρ, el término a_{rel} tendría una componente v_{rel}^2/ρ normal a la ranura y dirigida hacia el centro de curvatura, además de la componente tangencial a la ranura.**

(2) **Siempre será posible eludir un sistema de ecuaciones proyectando los vectores sobre la normal a alguna de las incógnitas.**

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMAS

Problemas introductorios

5.151 El automóvil B describe la curva con una celeridad constante de 54 km/h y el automóvil A se le acerca en el cruce con una celeridad constante de 72 km/h. Hallar qué velocidad aparenta llevar el automóvil A para un observador que viaje en el automóvil B y gire con éste. Los ejes x-y indicados son solidarios del automóvil B. ¿Es esa velocidad aparente la opuesta a la que B parece llevar a un observador que viaje en el automóvil A, el cual no gira? La distancia que separa ambos vehículos es de 40 m en el instante considerado.

Resp. $\mathbf{v}_{rel} = 20\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$ m/s; No

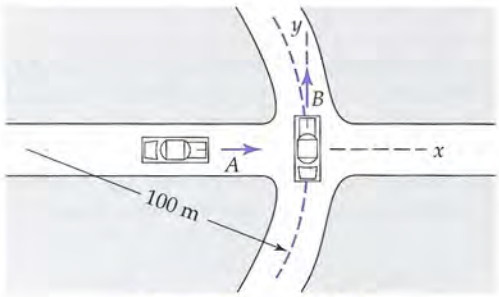


Figura problema 5.151

5.152 El barco A navega con rumbo norte a 12 nudos constantes, mientras que el B va a 10 nudos virando a babor a razón constante de 10 grd/min. Cuando se encuentran separados una distancia de 2 millas náuticas en las posiciones relativas que se muestran, con B momentáneamente proa al oeste y A cortándole el rumbo por proa, el navegante de B mide la velocidad aparente de A. Determinar el módulo de esa velocidad y especificar el ángulo horario β que forma con la dirección norte.

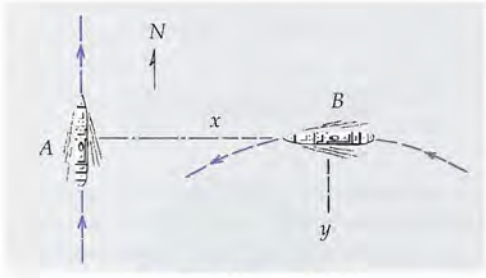


Figura problema 5.152

5.153 El disco dotado de la ranura radial gira alrededor de O con una aceleración angular $\dot{\omega} = 20$ rad/s^2 y el cursor A de 2 kg se desliza con una celeridad constante $\dot{x} = 120$ mm/s relativa a la ranura durante un cierto intervalo de su movimiento. Si $\omega = 15$ rad/s es la velocidad angular del disco en el instante en que el cursor pasa por su centro, hallar la aceleración del cursor en ese momento empleando tanto la ecuación 5.14 como la 2.14.

Resp. $\mathbf{a}_A = 3{,}6\mathbf{k}$ m/s^2

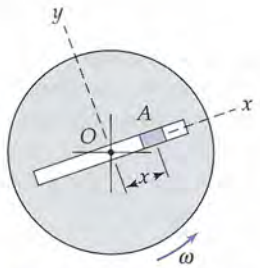


Figura problema 5.153

5.154 Para los automóviles del problema 5.151 que se desplazan con celeridades constantes, hallar la aceleración que aparenta llevar el vehículo A para un observador que se mueva y gire con el B.

5.155 Consideremos una vía férrea recta y horizontal y un vagón de 50 Mg que se mueva sobre ella con una celeridad constante de 15 m/s. Hallar la fuerza horizontal R que los carriles ejercen sobre el vagón si la vía estuviera hipotéticamente tendida (a) en el polo norte y (b) en el ecuador, orientada de norte a sur.

Resp. (a) $R = 109{,}4$ N, (b) $R = 0$

5.156 Un vehículo viaja hacia el oeste a gran velocidad desplazándose sobre un camino perfectamente recto tangente a la superficie terrestre en el ecuador. En el plano vertical, el camino carece de toda curvatura. Hallar la celeridad v_{rel} que necesi-

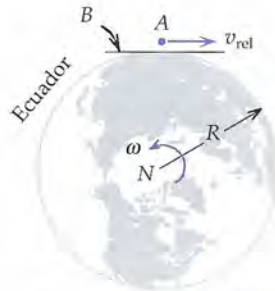


Figura problema 5.156

http://gratislibrospdf.com/

ta el vehículo respecto al camino para que su aceleración vertical sea nula. Se supondrá que el centro de la Tierra carece de aceleración.

5.157 Suponiendo que la carretera del problema 5.156 siguiese la curvatura de la superficie terrestre en lugar de ser recta y sin curvatura, hallar la velocidad hacia el este v_{rel} que debería llevar el vehículo respecto a la carretera para que su aceleración vertical fuese nula. Se supondrá que el centro de la Tierra carece de aceleración.

Resp. $v_{rel} = 1674$ km/h

5.158 Al tomar una curva no peraltada con una celeridad uniforme de 25 km/h, el centro C del vagón de ferrocarril describe una trayectoria circular de radio $\rho = 60$ m. El eje longitudinal del vagón permanece tangente a la circunferencia. Hallar la velocidad absoluta $\mathbf{v}$ de una persona P que camina por el vagón con una celeridad constante de 1,5 m/s relativa al mismo cuando se encuentra en los puntos A, B y C. Emplear los ejes x-y indicados solidarios del vagón.

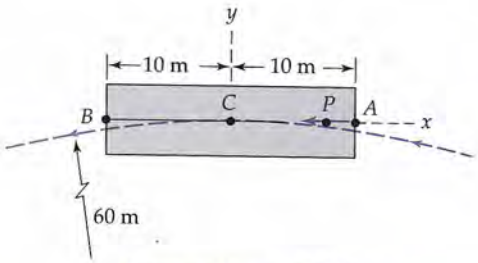


Figura problema 5.158

Problemas representativos

5.159 El cursor A se mueve en la ranura a la vez que el disco gira en torno a su centro O con una celeridad angular ω positiva en sentido antihorario. Hallar las componentes x e y de la aceleración absoluta de A si, en el instante indicado, $\omega = 5$ rad/s, $\dot{\omega} = -10$ rad/s^2, $x = 100$ mm, $\dot{x} = 150$ mm/s y $\ddot{x} = 500$ mm/s^2.

Resp. $(a_A)_x = -1{,}0$ m/s^2, $(a_A)_y = 2{,}0$ m/s^2

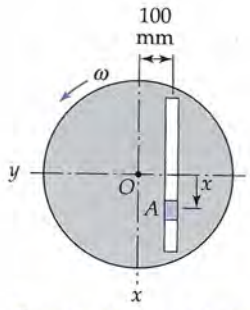


Figura problema 5.159

5.160 El disco con una ranura circular de 200 mm de radio gira en torno a O con una velocidad angular constante $\omega = 15$ rad/s. Hallar la aceleración del cursor A en el instante en que pasa por el centro del disco, si en ese momento $\dot{\theta} = 12$ rad/s y $\ddot{\theta} = 0$.

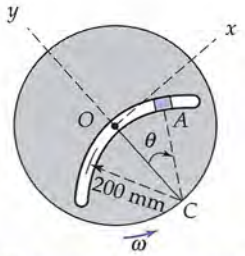


Figura problema 5.160

5.161 En el punto más bajo de un rizo circular de 400 m de radio el avión B lleva una velocidad constante de 540 km/h. El avión A, que vuela horizontalmente en el plano del rizo, pasa a 100 m directamente debajo de B a la velocidad constante de 360 km/h. En ese instante y con los ejes x-y indicados solidarios de B, hallar la aceleración que aparenta llevar A para el piloto de B.

Resp. $\mathbf{a}_{rel} = -4{,}69\mathbf{k}$ m/s^2

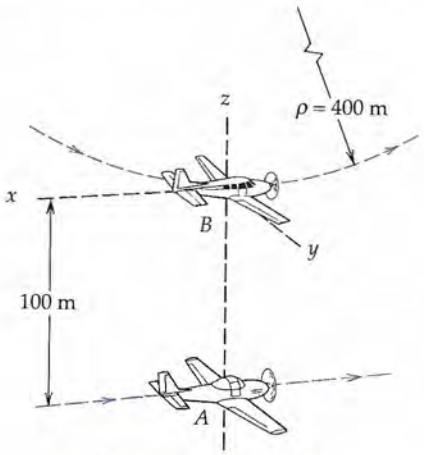


Figura problema 5.161

5.162 El camión contraincendios avanza a la celeridad de 60 km/h desacelerándose a razón de 3 m/s, a la vez que se eleva y extiende la escalera. En el instante representado el ángulo θ es de 30° y aumenta uniformemente a razón de 10 grd/s. En ese mismo instante la expansión b de la escalera es de 1,5 m, con $\dot{b} = 0{,}6$ m/s y $\ddot{b} = -0{,}3$ m/s^2. Para ese instante, hallar la aceleración del extremo A de la escalera (*a*) respecto al vehículo y (*b*) respecto al suelo.

http://gratislibrospdf.com/

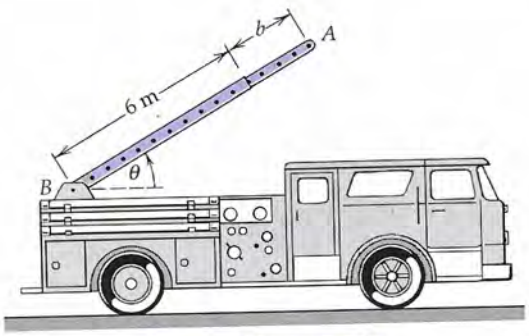


Figura problema 5.162

5.163 Para resolver el problema 5.162 por otro procedimiento, tomar unas coordenadas r-θ con origen en B tal como se indica. Seguidamente utilizar las relaciones en coordenadas polares de la aceleración de A respecto a B. Las componentes r y θ de la aceleración absoluta deben coincidir con las componentes según la escalera y la normal a ésta halladas en el problema 5.162.

Resp. $\mathbf{a}_A = -3{,}13\mathbf{e}_r + 1{,}709\mathbf{e}_\theta \text{ m/s}^2$

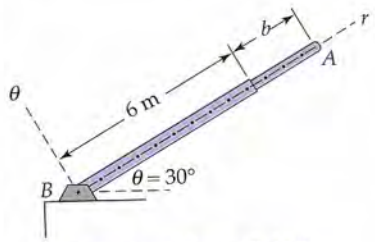


Figura problema 5.163

5.164 Dos muchachos, A y B, están sentados en posiciones diametralmente opuestas en una plataforma giratoria horizontal que se mueve con velocidad angular constante ω en sentido antihorario vista por encima. El muchacho A lanza una pelota hacia B comunicándole una velocidad horizontal $\mathbf{u}$ relativa a la plataforma y dirigida hacia B. Suponer que la pelota no tiene aceleración horizontal una vez lanzada y escribir la expresión de la aceleración $\mathbf{a}_{rel}$ que B observa que lleva la pelota en el plano de la plataforma un instante después de lanzada. Bosquejar la trayectoria de la pelota sobre la plataforma tal como la observa B.

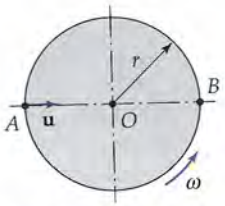


Figura problema 5.164

5.165 Hallar la aceleración de la persona que se menciona en el problema 5.158 en cada una de las posiciones A, B y C.

Resp. $\mathbf{a}_A = -0{,}1340\mathbf{i} - 1{,}151\mathbf{j} \text{ m/s}^2$

$\mathbf{a}_B = 0{,}1340\mathbf{i} - 1{,}151\mathbf{j} \text{ m/s}^2$

$\mathbf{a}_C = -1{,}151\mathbf{j} \text{ m/s}^2$

5.166 El automóvil B vira para enfilar la salida circular con una celeridad v, mientras que el automóvil A, que viaja a la misma celeridad, prosigue en línea recta. Demostrar que la velocidad que A aparenta para un observador que viaje y vire con B es nula cuando A pasa por la posición indicada cualquiera que sea el ángulo θ.

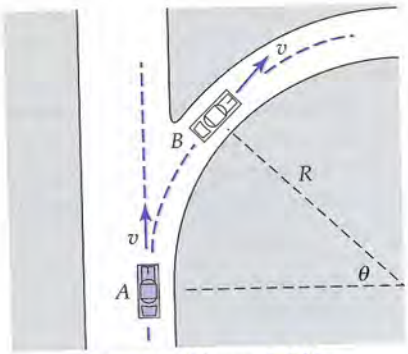


Figura problema 5.166

5.167 Para las condiciones y consecuencias del problema 5.166 demostrar que la aceleración que el automóvil A aparenta para un observador que viaje y vire con el automóvil B vale v^2/R en sentido perpendicular a la verdadera velocidad de A.

5.168 El sector semicircular ranurado gira con una velocidad angular antihoraria constante $\omega = 3$ rad/s. Simultáneamente, el brazo ranurado OC oscila alrededor de la recta OB (fija en el sector) de modo que θ varía constantemente a razón de 2 rad/s, salvo al final de cada oscilación cuando se invierte el movimiento. Hallar la aceleración total del pasador A cuando $\theta = 30°$ y $\dot{\theta}$ es positiva (H).

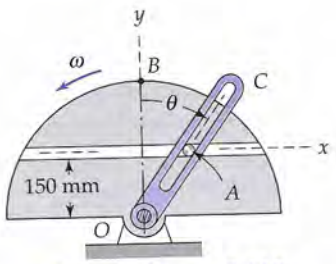


Figura problema 5.168

http://gratislibrospdf.com/

5.169 Una estación de radar B situada en el ecuador observa un satélite A, que se desplaza de oeste a este, describiendo una órbita circular ecuatorial a 200 km de altura. Cuando el satélite se encuentra a 30° sobre el horizonte, hallar la diferencia entre la velocidad del satélite relativa a la estación, medida desde un sistema no giratorio, y la velocidad medida con relación al sistema de referencia de la estación.

Resp. $\Delta\mathbf{v}_{rel} = -50{,}3\mathbf{i} + 87{,}1\mathbf{j}$ km/h

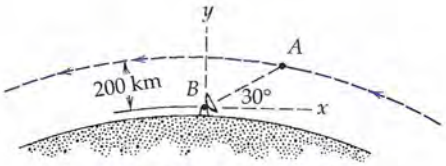


Figura problema 5.169

5.170 El collarín montado entre resortes oscila en el eje de acuerdo con $x = 0{,}04$ sen πt, donde x está en metros y t está en segundos. Simultáneamente, el bastidor gira en torno al cojinete O con una velocidad angular $\omega = 2\,\text{sen}(\pi t/2)$ rad/s. Hallar la aceleración del centro C del collarín (*a*) cuando $t = 3$ s y (*b*) cuando $t = 1/2$ s.

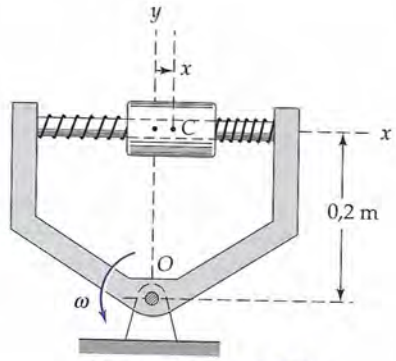


Figura problema 5.170

5.171 En la figura se representan las paletas del impulsor de una bomba centrífuga que gira con una velocidad constante de 200 rpm. Se observa que las partículas del fluido tienen un velocidad absoluta cuya componente en la dirección radial r es de 3 m/s a su descarga de las paletas. Además, el módulo de la velocidad de las partículas medida con relación a la paleta aumenta a razón de 24 m/s^2 inmediatamente antes de abandonar la paleta. Hallar la aceleración absoluta de una partícula de fluido en el instante inmediatamente anterior a salir del impulsor. El radio de curvatura ρ de la paleta es de 200 mm en su extremo.

Resp. $a = 46{,}9$ m/s^2

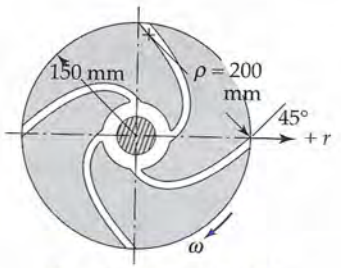


Figura problema 5.171

5.172 La cámara de ensayos A, que se emplea para estudiar el mareo al movimiento, está preparada para oscilar en torno al eje O de acuerdo con $\theta = \theta_0$ sen $2\pi f_1 t$ a la vez que ejecuta un movimiento lineal $y = y_0$ sen $2\pi f_2 t$ respecto al bastidor. Durante un serie de ensayos las amplitudes se fijan en $\theta_0 = \pi/4$ radianes e $y_0 = 150$ mm, mientras que las frecuencias son $f_1 = \frac{1}{4}$ ciclo/s y $f_2 = \frac{1}{2}$ ciclo/s. Hallar la expresión vectorial de la aceleración del punto C de la cámara en el instante en que $t = 2$ s.

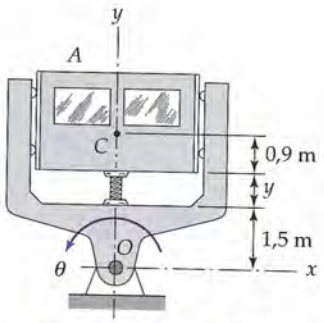


Figura problema 5.172

5.173 La manivela OA gira con una velocidad angular horaria constante de 10 rad/s dentro de un arco limitado de su movimiento. Para la posición $\theta = 30°$ hallar la velocidad angular de la barra ranurada CB y la aceleración de A medida respecto a la ranura de CB.

Resp. $\omega = 5$ rad/s H, $\mathbf{a}_{rel} = -8660\mathbf{i}$ mm/s^2

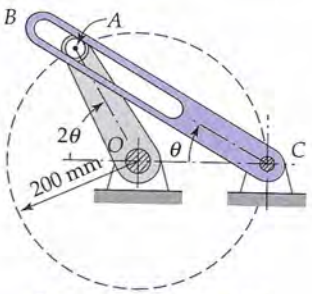


Figura problema 5.173

http://gratislibrospdf.com/

5.174 Un edificio de gran altura está situado en el ecuador. En su fachada norte se aloja un reloj del tipo común de doce horas cuyo centro está a una distancia h del suelo (que se encuentra prácticamente a nivel del mar). Hallar la velocidad y la aceleración de la punta A de la manecilla de las horas a las doce horas, medidas ambas desde un sistema de coordenadas no giratorio centrado en la Tierra. Tomar el eje x de modo que parta del centro de la Tierra y su sentido positivo se extienda radialmente hacia el edificio y el eje z se dirija hacia el norte. La manecilla de las horas tiene una longitud l y da dos vueltas completas sobre la esfera del reloj durante una rotación completa de la Tierra. El radio y la velocidad de la Tierra son R y ω.

5.175 Se repite aquí el mecanismo de Cruz de Malta del problema 5.53. Hallar la aceleración absoluta α_2 de la cruz C en el instante en que $\theta = 20°$. El plato motor A tiene una velocidad angular horaria constante de 2 rad/s.

Resp. $\alpha_2 = 16{,}53$ rad/s^2 AH

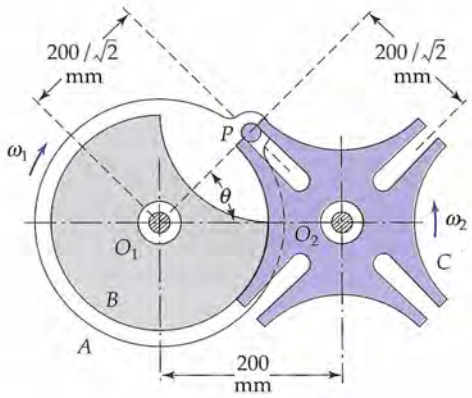


Figura problema 5.175

5.176 Se representa un mecanismo destinado a producir un par de fuerzas muy intenso en el árbol O. El tren de engranajes, articulado en C, hace que el husillo a derechas rote a la velocidad constante $N = 100$ rpm en el sentido indicado, con lo que el collarín roscado A avanza sobre el husillo hacia C. Hallar la variación por unidad de tiempo $\dot{\omega}_{AO}$ de la velocidad angular de AO cuando pasa por la posición vertical indicada. El husillo tiene tres filetes simples por centímetro de longitud.

Resp. $\dot{\omega}_{AO} = -4{,}41(10^{-4})$ rad/s^2

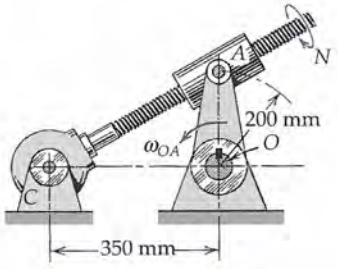


Figura problema 5.176

5.177 La lanzadera espacial A describe una órbita circular ecuatorial a 240 km de altitud y en sentido de oeste a este. Hallar la velocidad y aceleración que aparenta tener para un observador fijo en la Tierra y girando con ella en el ecuador, cuando el vehículo pasa por su vertical. Tómese $R = 6378$ km como radio de la Tierra. Además, el valor correcto de g se determinará mediante la figura 1.1 y el resultado se obtendrá con una precisión de cuatro decimales.

Resp. $\mathbf{v}_{rel} = -26\,220\mathbf{i}$ km/h

$\mathbf{a}_{rel} = -8{,}018\mathbf{j}$ m/s^2

(con $g = 9{,}814$ m/s^2)

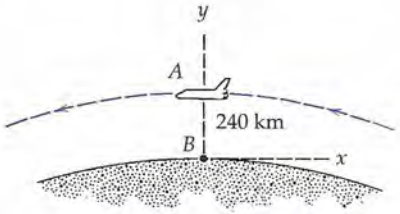


Figura problema 5.177

5.178 Hallar la aceleración angular de la barra EC en la posición representada, con $\omega = \dot{\beta} = 2$ rad/s y $\ddot{\beta} = 6$ rad/s^2 cuando $\theta = \beta = 60°$. La clavija A es solidaria de la barra EC. La ranura circular de la manivela DO tiene un radio de curvatura de 150 mm. En la posición de la figura, la tangente a la ranura en el punto de contacto es paralela a AO.

Resp. $\alpha_{EC} = 12$ rad/s^2 AH

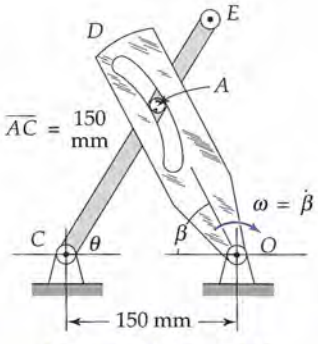


Figura problema 5.178

http://gratislibrospdf.com/

5.8 REPASO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este capítulo 5 hemos aplicado al movimiento plano de los cuerpos rígidos los conceptos fundamentales de la Cinemática que se desarrollaron en el capítulo 2. Esencialmente los problemas los hemos abordado por dos procedimientos. En el primero de ellos se plantea una ecuación que describe la configuración geométrica general del problema dado en función de datos y variables y luego se deriva ésta respecto al tiempo para obtener velocidades y aceleraciones, tanto lineales como angulares. Este procedimiento lo hemos llamado análisis por movimiento absoluto y es satisfactorio cuando no hay dificultad en escribir la expresión geométrica y sus derivadas temporales.

En el segundo procedimiento se aplican los fundamentos del movimiento relativo a los cuerpos rígidos y con ello resulta que el procedimiento permite resolver muchos problemas que serían de manejo excesivamente engorroso al calcular las derivadas. Para utilizar tanto la ecuación de la velocidad relativa como el centro instantáneo de rotación y la ecuación de la aceleración relativa, es necesario tener una imagen mental clara del caso de movimiento circular de un punto alrededor de otro punto observado desde ejes no giratorios, y además éste debe analizarse correctamente. En realidad, el perfecto conocimiento de las ecuaciones del movimiento circular es una condición esencial sin la cual no podrá progresarse demasiado.

Las ecuaciones de la velocidad relativa y de la aceleración relativa son ecuaciones vectoriales que pueden resolverse de tres formas diferentes: por análisis escalar de la geometría del polígono vectorial, por álgebra vectorial y gráficamente construyendo el polígono vectorial. Cada uno de estos métodos tiene sus ventajas y apremiamos al lector a que adquiera experiencia sobre los tres. Al utilizar métodos basados en el álgebra vectorial siempre deberá dibujarse un esquema de los vectores, porque la habilidad para imaginar las relaciones geométricas y físicas entre fuerzas y movimientos constituye probablemente la experiencia más importante de todas en el estudio de la Mecánica.

En el capítulo 6 estudiaremos la Cinética de los cuerpos rígidos en movimiento plano y allí veremos que la habilidad para despejar las aceleraciones lineales y angulares de los cuerpos rígidos es absolutamente necesaria al objeto de aplicar las ecuaciones de fuerzas y momentos que relacionan las fuerzas aplicadas con los movimientos resultantes. Por tanto, las materias tratadas en este capítulo 5 son esenciales para el capítulo 6.

Por último, en este capítulo 5 se han presentado los sistemas de coordenadas en rotación que permiten resolver los problemas en los que el movimiento se observa desde un sistema de referencia que gire. Siempre que un punto describa una trayectoria que a su vez también se mueva, es obligado hacer el estudio mediante ejes en rotación si se sigue el procedimiento del movimiento relativo. Al deducir la expresión 5.12, de la velocidad relativa, y la 5.14, de la aceleración relativa, en las que los términos relativos se miden desde un sistema de referencia en rotación, fue necesario tener en cuenta las derivadas de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Estas ecuaciones 5.12 y 5.14 son válidas también para el movimiento en el espacio, tal como se verá en el capítulo 7.

http://gratislibrospdf.com/

5.179 El disco circular gira en torno a su eje z con una velocidad angular $\omega = 2$ rad/s. Un punto P situado en el canto tiene una velocidad dada por $\mathbf{v} = -0{,}8\mathbf{i} - 0{,}6\mathbf{j}$ m/s. Hallar las coordenadas de P y el radio r del disco.

Resp. $x = -0{,}3$ m, $y = 0{,}4$ m, $r = 0{,}5$ m

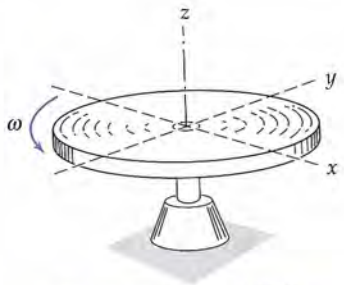


Figura problema 5.179

5.180 La placa rectangular gira en torno a su eje fijo z. En el instante considerado su velocidad angular es $\omega = 3$ rad/s y disminuye a razón de 6 rad/s cada segundo. Escribir, para ese instante, las expresiones vectoriales de la velocidad de P y de las componentes normal y tangencial de su aceleración.

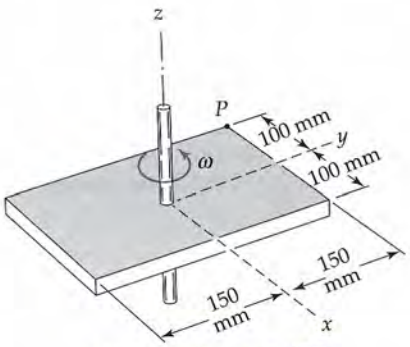


Figura problema 5.180

5.181 Si, en el problema 5.179, la aceleración del punto P tiene la dirección x en el instante considerado, hallar la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del disco. Emplear los resultados del problema citado.

Resp. $\boldsymbol{\alpha} = -\frac{16}{3}\,\mathbf{k}$ rad/s^2

5.182 Hallar la aceleración del centro de masa G de la biela AB del mecanismo biela-manivela del problema tipo 5.15 para (*a*) $\theta = 0$ y (*b*) $\theta = 180°$.

5.183 La carga L sube merced a las velocidades que animan a los extremos A y B del cable. Hallar la aceleración del punto más alto P de la roldana en el instante en que $v_A = 0{,}6$ m/s, $\dot{v}_A = 0{,}15$ m/s^2, $v_B = 0{,}9$ m/s y $\dot{v}_B = -0{,}15$ m/s^2.

Resp. $a_P = 3/16$ m/s^2

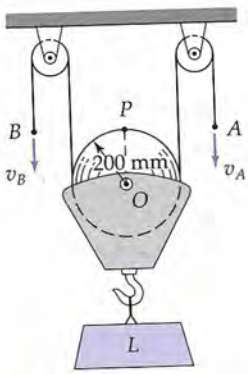


Figura problema 5.183

5.184 El cilindro hidráulico desplaza hacia la derecha al pasador A a la velocidad constante v. Apoyándose en que la distancia entre A y B no varía, siendo B el punto de AC el instantáneamente en contacto con la rueda dentada, obtener la expresión de la velocidad angular ω de la rueda dentada y la velocidad angular de la cremallera AC.

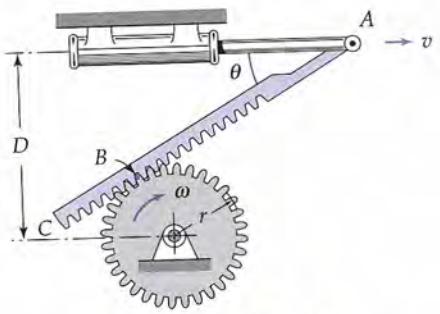


Figura problema 5.184

5.185 La barra acodada en ángulo recto ABC ejecuta un movimiento plano en el plano x-y. En el instante representado la

http://gratislibrospdf.com/

aceleración de B respecto a A es $20\mathbf{i}$ m/s^2 y la aceleración de C es nula. Hallar la aceleración del punto A.

Resp. $\mathbf{a}_A = -12{,}8\mathbf{i} - 9{,}6\mathbf{j}$ m/s^2

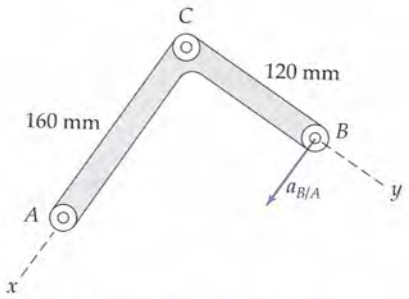


Figura problema 5.185

5.186 El disco se desliza y rueda. Si $v_0 = 1{,}2$ m/s y si la velocidad de A respecto a B es $0{,}9\sqrt{2}$ m/s, ubicar el centro instantáneo de rotación C y determinar la velocidad del punto P.

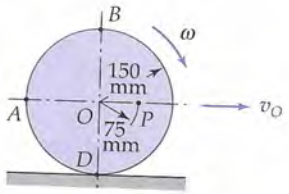


Figura problema 5.186

5.187 En el sistema articulado de la figura la barra OC está dotada de una velocidad angular horaria constante $\omega = 2$ rad/s durante un intervalo del movimiento, mientras el cilindro hidráulico comunica al pasador A una velocidad constante de 1,2 m/s hacia la derecha. Para la posición representada, en la que OC está vertical y BC horizontal, calcular la velocidad angular de BC. Resolver dibujando el polígono de velocidades necesario.

Resp. $\omega_{BC} = 2$ rad/s H

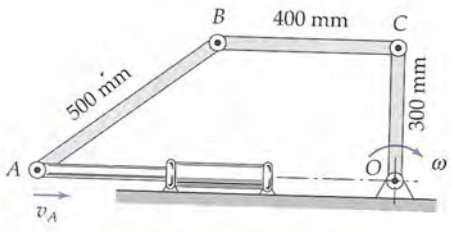


Figura problema 5.187

5.188 Resolver el problema 5.187 por álgebra vectorial partiendo de la relación entre vectores de posición $\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_{B/C} = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$ que se muestra en la figura.

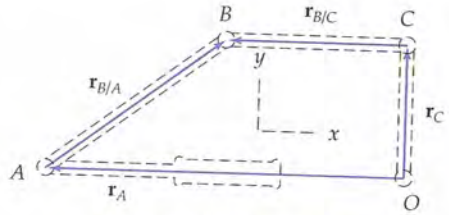


Figura problema 5.188

5.189 El gran carrete de cable para transporte de energía rueda cuesta arriba por acción del vehículo de servicio del modo que se muestra. El vehículo parte del reposo con $x = 0$ respecto al carrete y se acelera uniformemente a 0,6 m/s^2. Calcular, para el instante en que $x = 1{,}8$ m, la aceleración del punto P del carrete que se indica.

Resp. $a_P = 3{,}34$ m/s^2

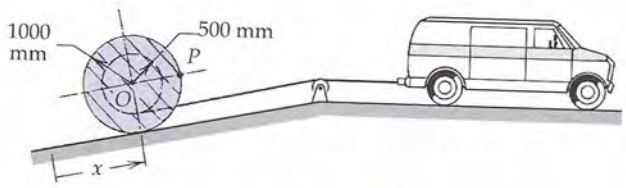


Figura problema 5.189

5.190 En el instante representado $x = 50$ mm y $\dot{s} = 1{,}6$ m/s. Hallar la correspondiente velocidad del punto B.

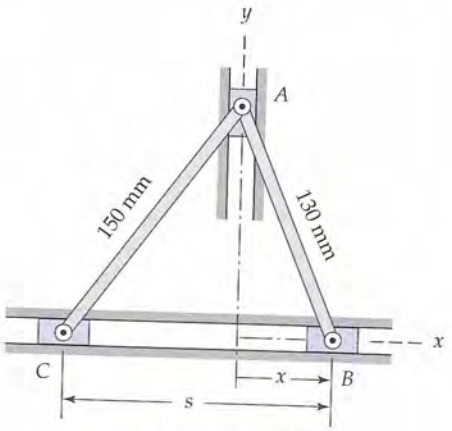


Figura problema 5.190

http://gratislibrospdf.com/

5.191 El dispositivo de vaivén mantiene en agitación el baño de agua donde se lavan verduras. La manivela OA gira en sentido horario a 120 rpm. Hallar la velocidad angular de la barquilla en la posición indicada en que OA está vertical y $\theta = 30°$.

Resp. $\omega_{DB} = 3{,}24$ rad/s H

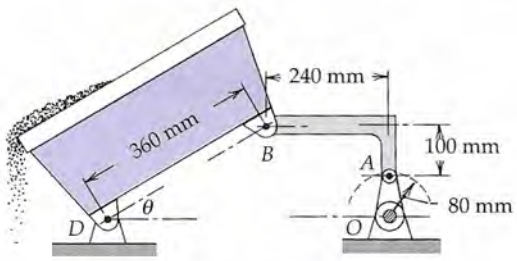


Figura problema 5.191

5.192 Durante un intervalo de movimiento, el vástago del émbolo del cilindro hidráulico comunica a A un velocidad vertical constante v_A. El rodillo B está obligado a moverse por la guía horizontal. Hallar la velocidad de la barra AB en función de θ.

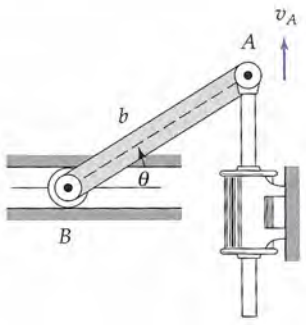


Figura problema 5.192

5.193 Hallar la aceleración angular de la barquilla de la lavadora de verduras del problema 5.191 en la posición en que OA está vertical. En esa posición OA tiene una velocidad angular de 4π rad/s y carece de aceleración angular.

Resp. $\alpha_{BD} = 41{,}2$ rad/s^2 H

5.194 En la posición que se muestra la varilla DC gira en sentido antihorario a la velocidad constante $N = 2$ rad/s. Hallar la velocidad angular ω y la aceleración angular α de EBO en ese instante.

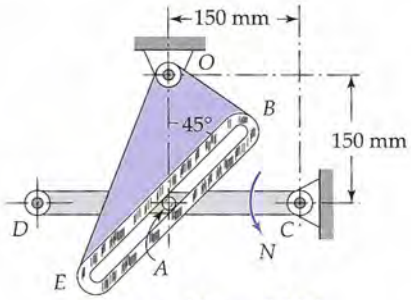


Figura problema 5.194

5.195 Cerca del final de su carrera de despegue, el avión esta "basculando" (con el morro hacia arriba) inmediatamente antes de entrar en sustentación. Su velocidad y aceleración, expresadas en función del tren de ruedas C, son v_C y a_C, ambas dirigidas horizontalmente hacia adelante. El ángulo de cabeceo es θ y su variación por unidad de tiempo $\omega = \dot{\theta}$ aumenta a la razón $\alpha = \dot{\omega}$. Si una persona A camina hacia adelante por el pasillo central con una velocidad y aceleración v_{rel} y a_{rel}, ambas medidas hacia adelante con relación a la cabina, deducir las expresiones de la velocidad y aceleración de A que observaría alguien inmóvil en tierra.

Resp. $\mathbf{v}_A = (v_c \cos\theta - \omega h + \dot{L})\mathbf{i} + (\omega L - v_C \operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$

$$\mathbf{a}_A = (a_C \cos\theta - \alpha h - L\omega^2 + \ddot{L})\mathbf{i} + (-a_C \operatorname{sen}\theta - h\omega^2 + L\alpha + 2\omega\dot{L})\mathbf{j}$$

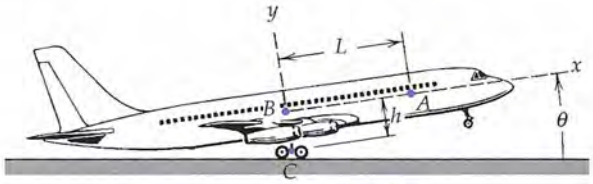


Figura problema 5.195

5.196 La manivela OB gira, en sentido horario, con una velocidad constante ω_0 de 5 rad/s. Hallar, en el instante en que $\theta = 90°$, la aceleración angular α de la barra BD que se desliza por el collarín que pivota en C.

Resp. $\alpha = 6{,}25$ rad/s^2 H

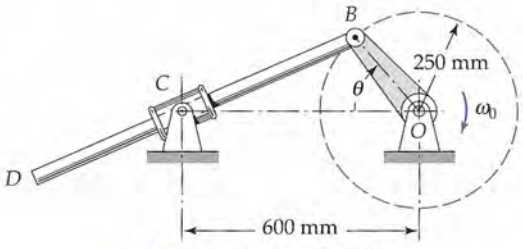


Figura problema 5.196

http://gratislibrospdf.com/

***5.197** La barra OA está animada de una velocidad angular antihoraria constante ω. Hallar la velocidad angular ω_{AB} de la barra AB en función de θ. Calcular y representar gráficamente el cociente ω_{AB}/ω entre los límites $0 \le \theta \le 90°$. Indicar el valor de θ para el que la velocidad angular de AB es la mitad que la de OA.

Resp. $\theta = 46{,}1°$

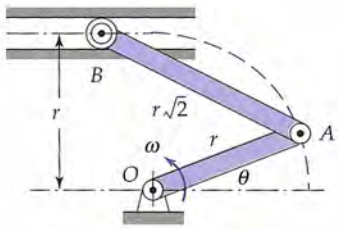


Figura problema 5.197

***5.198** Para la Cruz de Malta del problema 5.53, que se repite aquí, escribir la expresión de la velocidad angular ω_2 de la cruz C durante el tiempo en que la clavija P está acoplada y representarla entre los límites $-45° \le 0 \le 45°$. El plato motor A tiene una velocidad angular constante $\omega_1 = 2$ rad/s.

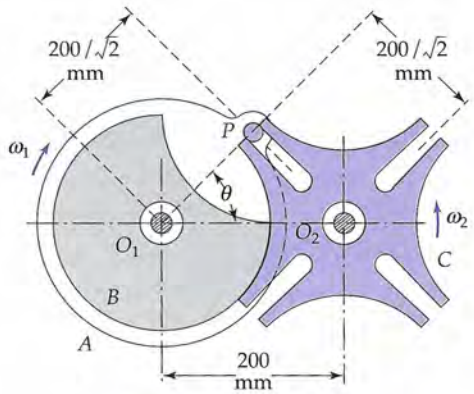


Figura problema 5.198

***5.199** El par de fuerzas de momento constante M es mayor que el momento respecto a O debido a la fuerza F ejercida sobre el vástago y el resultado es una aceleración angular $\ddot{\theta} = 100(1 - \cos\theta)$ rad/s^2. Si la manivela A se abandona desde el reposo en B, en que $\theta = 30°$, y choca con el tope C, en que $\theta = 150°$, representar gráficamente la velocidad angular $\dot{\theta}$ como función de θ y determinar el tiempo t que tarda la manivela en rotar desde $\theta = 90°$ hasta $\theta = 150°$.

Resp. $\dot{\theta} = 10\sqrt{2}\sqrt{\theta - \text{sen}\,\theta - 0{,}0236}$ rad/s

$t = 0{,}0701$ s

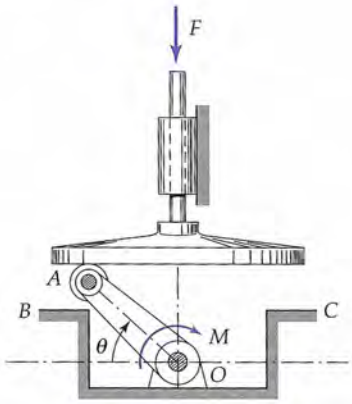


Figura problema 5.199

***5.200** La manivela doble está articulada en O de modo que puede girar por completo, sin interferir con la barra articulada CB que se desliza por el collarín A. Si la manivela posee una velocidad angular constante $\dot{\theta}$, hallar y representar gráficamente el cociente $\dot{\beta}/\dot{\theta}$, como función de θ, entre $\theta = 0$ y $\theta = 180°$. Determinar, por examen a simple vista, el ángulo β para el cual es $\dot{\beta} = 0$.

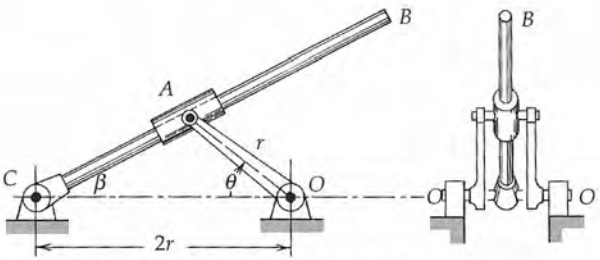


Figura problema 5.200

***5.201** Para el mecanismo de biela y cigüeñal representado, deducir la expresión de la velocidad v_A del pistón (tomada como positiva hacia la derecha) en función deθ para $0 \le \theta \le 180°$. Representar gráficamente v_A en función de θ y determinar su valor máximo y el valor correspondiente de θ. (Por simetría, prever los resultados para $180° \le \theta \le 360°$.)

Resp. $(v_A)_{\max} = 20{,}9$ m/s para $\theta = 72{,}3°$

http://gratislibrospdf.com/

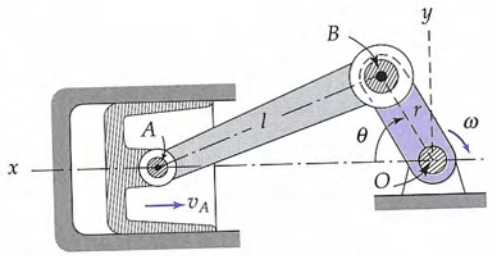


Figura problema 5.201

*5.202 Para el mecanismo del problema 5.201, deducir la expresión de la aceleración a_A del pistón (tomada como positiva hacia la derecha) en función de θ para $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$. Emplear los datos del problema tipo 5.15 para calcular a_A en función de θ y determinar el valor de θ para el que $a_A = 0$. (Por simetría, prever los resultados para $180° \leq \theta \leq 360°$.)

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

Capítulo 6: CINÉTICA PLANA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS

En un cuerpo rígido que puede rotar y trasladarse simultáneamente deben calcularse las fuerzas que causan o acompañan el movimiento. En el despegue, un avión, que está acelerando y rotando hacia arriba, está sometido al empuje de sus motores, a su peso y a las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre sus superficies exteriores.

http://gratislibrospdf.com/

6.1 INTRODUCCIÓN

La cinética de los cuerpos rígidos trata de las relaciones existentes entre las fuerzas que sobre ellos ejercen agentes exteriores y los correspondientes movimientos de traslación y rotación de dichos cuerpos. En el capítulo 5 se desarrollaron las relaciones cinemáticas del movimiento plano de los cuerpos rígidos, y en este capítulo las vamos a utilizar ampliamente para examinar los efectos de las fuerzas sobre el movimiento bidimensional de los cuerpos rígidos.

Para los propósitos de este capítulo recordemos que un cuerpo rígido que ejecute un movimiento plano puede asimilarse a una placa plana delgada cuyo movimiento esté confinado al plano de la placa, el cual es además el plano del movimiento. Este plano contiene al centro de masa, y todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo se proyectan sobre el mismo. El movimiento de todo cuerpo rígido que tenga dimensiones apreciables en dirección perpendicular al plano del movimiento pero que sea simétrico alrededor de dicho plano respecto del centro de masa, puede tratarse como un problema de movimiento plano. Es evidente que estas idealizaciones se adaptan perfectamente a una extensa categoría de movimientos de cuerpos rígidos.

En el capítulo 3 vimos que para definir el movimiento plano de un punto material cuyo movimiento tenga dos componentes, se necesitaban dos componentes de fuerza. En el caso del movimiento plano de un cuerpo rígido se necesita una ecuación más para especificar el estado de rotación del cuerpo. Así pues, para determinar el estado de movimiento plano de un cuerpo rígido se necesitarán dos ecuaciones de fuerzas y una de momentos o sus equivalentes.

Las relaciones que constituyen la base de la mayoría de los análisis del movimiento de cuerpos rígidos se desarrollaron en el capítulo 4 para un sistema general de puntos materiales. Al desarrollar aún más estas ecuaciones en este capítulo 6 y aplicarlas concretamente al movimiento plano de cuerpos rígidos, nos referiremos frecuentemente a ellas. Se aconseja al lector que revise a menudo lo expuesto en el capítulo 4 mientras esté estudiando este capítulo 6. También se le aconseja que no siga adelante a menos que haya aprendido a fondo los cálculos de velocidades y aceleraciones desarrollados en el capítulo 5 para el movimiento plano de un cuerpo rígido. Sin la capacidad de determinar correctamente las aceleraciones a partir de los principios de la Cinemática, suele ser inútil intentar aplicar los principios de las fuerzas a los movimientos. En consecuencia, instamos al alumno a que domine la Cinemática necesaria, incluido el cálculo de aceleraciones relativas, antes de proseguir.

Para los métodos de la Cinemática resulta fundamental el aislamiento del cuerpo o sistema a analizar. En el capítulo 3 se ilustró y utilizó el aislamiento al estudiar la cinética del punto material y en este capítulo se empleará del mismo modo. En los problemas en que intervengan las relaciones instantáneas entre fuerza, masa y aceleración o cantidad de movimiento, se definirá explícitamente el cuerpo o sistema aislándolo con su *diagrama para sólido libre*. Cuando se apliquen los principios de trabajo y energía, y no el diagrama para sólido libre, puede emplearse un *diagrama de fuerzas activas* en el que sólo figuren las fuerzas exteriores que realicen trabajo sobre el sistema. *Nunca deberá intentarse resolver un problema sin definir antes por completo el contorno exterior del cuerpo o sistema e identificar todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre él.*

Este capítulo 6 está divido en tres secciones coincidentes con las tres secciones en que se dividió el capítulo 3 relativo a la cinética del punto material. En la sección A se relacionan fuerzas y momentos con aceleraciones instantáneas

http://gratislibrospdf.com/

lineales y angulares. En la sección B se expone la resolución de problemas mediante el teorema de las fuerzas vivas. La sección C comprende los procedimientos basados en el impulso y la cantidad de movimiento. Virtualmente todos los procedimientos e ideas que abarcan las tres secciones ya fueron considerados al tratar de la cinética del punto material en el capítulo 3, pero su repetición facilitará el avance a través de este capítulo, en el supuesto de que se domine bien la cinemática plana de los cuerpos rígidos. En las tres secciones del capítulo se separan de manera perfectamente definida los tres tipos de movimiento, o sea, la traslación, la rotación alrededor de un eje fijo y el movimiento plano general.

En la cinética de los cuerpos rígidos animados de movimiento angular es necesario introducir una propiedad característica del cuerpo que responde de la distribución radial de la masa respecto a un eje de rotación particular perpendicular al plano del movimiento. Esta característica se conoce como *momento de inercia* del cuerpo y es imprescindible saber cómo se calcula para resolver problemas de cuerpos en rotación. Llegados a este punto, suponemos que el lector está familiarizado con el cálculo de momentos de inercia. No obstante, el tema se expone en el apéndice B para quienes necesiten aprenderlo o repasarlo.

SECCIÓN A. FUERZA, MASA Y ACELERACION

6.2 ECUACIONES GENERALES DEL MOVIMIENTO

En los apartados 4.2 y 4.4 se dedujeron las ecuaciones que rigen el movimiento de un sistema general de puntos materiales. Empecemos ahora aplicando esas ecuaciones a un cuerpo rígido considerado en el espacio tridimensional. La ecuación 4.1 es

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \qquad [4.1]$$

y nos dice que la resultante $\Sigma \mathbf{F}$ de las fuerzas exteriores actuantes sobre un cuerpo rígido es igual a la masa m de éste multiplicada por la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ de su centro de masa G. La otra ecuación hace referencia al momento resultante y es

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \qquad [4.9]$$

que nos dice que el momento resultante respecto al centro de masa de las fuerzas exteriores actuantes sobre el cuerpo es igual a la derivada temporal del momento cinético del cuerpo respecto al centro de masa.

Por Estática sabemos que, en general, un sistema de fuerzas aplicadas a un sólido rígido puede sustituirse por la resultante de las fuerzas aplicada al punto que se desee acompañada de un par de fuerzas convenientemente calculado. Sustituyendo las fuerzas exteriores por el sistema fuerza-par equivalente, cuya fuerza esté aplicada en el centro de masa, podremos imaginar cuál es el efecto de las fuerzas y la consiguiente respuesta dinámica del cuerpo con ayuda de la figura 6.1. En la parte *a* de la figura se representa el diagrama para sólido libre del cuerpo. En la parte *b* se representa el sistema fuerza-par equivalente con la resultante aplicada en G. En la parte *c* se representa el llamado *diagrama cinético*, que sirve para ilustrar los efectos dinámicos resultantes tal como nos los indican las ecuaciones 4.1 y 4.9. La equivalencia entre los diagramas para sólido libre y cinético nos facilita una imagen clara y fácilmente recordable de

http://gratislibrospdf.com/

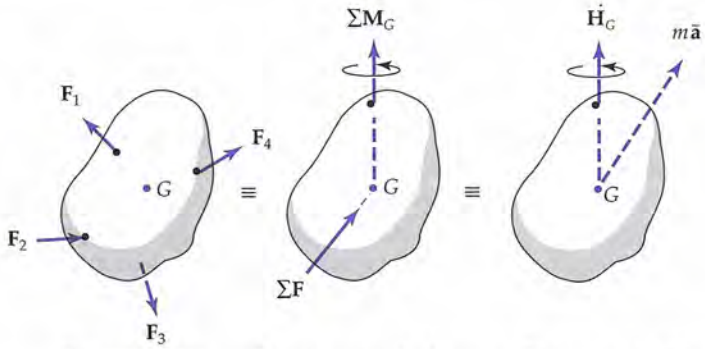


Figura 6.1

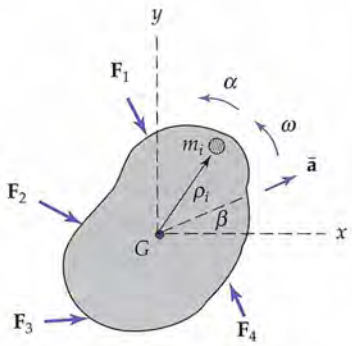


Figura 6.2

los efectos separados que ejercen sobre la traslación y la rotación del cuerpo las fuerzas al mismo aplicadas. Esa equivalencia la iremos expresando matemáticamente conforme apliquemos estos resultados al estudio que sigue acerca del movimiento plano de los cuerpos rígidos.

Ecuaciones del movimiento plano. Aplicaremos ahora las relaciones anteriores al caso de movimiento plano. En la figura 6.2 se representa un cuerpo rígido animado de un movimiento plano en el plano x-y. Su centro de masa G tiene una aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ y el cuerpo tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\,\mathbf{k}$, ambas tomadas en el sentido z positivo. Como la dirección z, que es tanto la de $\boldsymbol{\omega}$ como la de $\boldsymbol{\alpha}$, es perpendicular al plano del movimiento, la velocidad y la aceleración angulares podemos representarlas mediante los símbolos escalares ω y $\alpha = \dot{\omega}$.

El momento cinético respecto al centro de masa de un sistema general vimos que es (ec. 4.8) $\mathbf{H}_G = \Sigma\boldsymbol{\rho}_i \times m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$, donde $\boldsymbol{\rho}_i$ es el vector de posición relativo a G de un punto genérico de masa m_i. En nuestro cuerpo rígido la velocidad de m_i relativa a G es $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$, cuyo módulo es $\rho_i\omega$ y yace en el plano del movimiento y es perpendicular a $\boldsymbol{\rho}_i$. El producto $\boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ es, pues, un vector normal al plano x-y con el sentido de $\boldsymbol{\omega}$ y de módulo $\rho_i^2\omega$. De este modo el módulo de $\mathbf{H}_G$ se hace $H_G = \Sigma\rho_i^2 m_i\omega = \omega\Sigma\rho_i^2 m_i$. Este sumatorio, que también podría escribirse $\int\rho^2\,dm$, es por definición el *momento de inercia másico* $\bar{I}$ del cuerpo respecto al eje z que pasa por G. (Véase en el apéndice B un estudio acerca del cálculo de momentos de inercia de masas.) Ahora podemos escribir

$$H_G = \bar{I}\omega$$

donde $\bar{I}$ es una propiedad constante del cuerpo que constituye una medida de su inercia a la rotación o resistencia a los cambios de velocidad de rotación, consecuencia del modo en que su masa está distribuida radialmente en torno al eje z que pasa por G. Sustituyendo por este valor de H_G en la ecuación del momento resultante 4.9

$$\Sigma M_G = \dot{H}_G = \bar{I}\dot{\omega} = \bar{I}\alpha$$

donde $\alpha = \dot{\omega}$ es la aceleración angular del cuerpo.

http://gratislibrospdf.com/

Resulta así que la ecuación del momento resultante y la expresión vectorial 4.1 de la segunda ley de Newton generalizada pueden ahora escribirse

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$$
$$\Sigma M_G = \bar{I}\alpha \qquad (6.1)$$

Estas ecuaciones 6.1 son las ecuaciones generales del movimiento de un cuerpo rígido en movimiento plano. Al aplicar estas ecuaciones 6.1, la de la fuerza resultante se expresará a través de sus dos componentes escalares empleando unas coordenadas x-y, n-t ó r-θ, según sean las que resulten más cómodas y prácticas en cada problema.

Como procedimiento también posible puede ser instructivo deducir la ecuación del momento resultante refiriéndonos directamente a las fuerzas que actúan sobre el punto material de masa m_i, tal como se indica en la figura 6.3. La aceleración de m_i es igual a la suma vectorial de $\bar{a}$ más los términos relativos $\rho_i\omega^2$ y $\rho_i\alpha$, donde se toma el centro de masa G como punto de referencia. Se deduce que la resultante de todas las fuerzas que se ejercen sobre m_i tienen las componentes $m_i\bar{a}$, $m_i\rho_i\omega^2$ y $m_i\rho_i\alpha$ en las direcciones que se indican. La suma de los momentos de estas componentes de fuerzas respecto a G en el sentido de α es

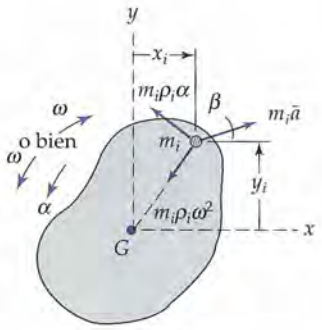


Figura 6.3

$$M_{G_i} = m_i\rho_i{}^2\alpha + (m_i\bar{a}\ \text{sen}\ \beta)x_i - (m_i\bar{a}\ \cos\beta)y_i$$

Para los demás puntos del cuerpo pueden escribirse expresiones análogas y, así, la suma de los momentos respecto a G de las fuerzas resultantes que se ejercen sobre todos los puntos puede escribirse en la forma

$$\Sigma M_G = \Sigma m_i\rho_i{}^2\alpha + \bar{a}\ \text{sen}\ \beta\ \Sigma m_i x_i - \bar{a}\ \cos\beta\ \Sigma m_i y_i$$

Pero como el origen de coordenadas se ha fijado en el centro de masa, es $\Sigma m_i x_i = m\bar{x} = 0$ y $\Sigma m_i y_i = m\bar{y} = 0$. Entonces, la suma de momentos queda

$$\Sigma M_G = \Sigma m_i\rho_i{}^2\alpha = \bar{I}\alpha$$

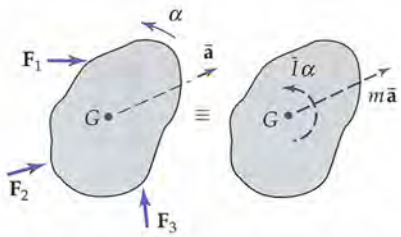


Figura 6.4

como antes. La contribución a ΣM_G de las fuerzas interiores al cuerpo es, por supuesto, nula ya que éstas aparecen en parejas de fuerzas de acción y reacción entre puntos materiales contiguos. Así pues, ΣM_G representa como antes la suma de los momentos respecto al centro de masa sólo de las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo, tal como aparecen en el diagrama para sólido libre. Adviértase que la componente de fuerza $m_i\rho_i\omega^2$ carece de momento respecto a G y, en consecuencia, la velocidad angular ω no influye en la ecuación del momento resultante respecto al centro de masa G.

Los resultados materializados en las ecuaciones 6.1, o sea, en las ecuaciones fundamentales del movimiento de un cuerpo rígido en movimiento plano, se representan esquemáticamente en la figura 6.4, que es la réplica bidimensional de las partes a y c de la figura 6.1 referente a un cuerpo tridimensional cualquiera. El diagrama para sólido libre revela qué fuerzas y momentos han de figurar en los primeros miembros de las ecuaciones del movimiento. El diagrama cinético revela la consiguiente respuesta en función del término de traslación $m\bar{\mathbf{a}}$ y del término de rotación $\bar{I}\alpha$ que aparecen en los segundos miembros de las ecuaciones 6.1. Tal como se dijo antes, el término de traslación $m\bar{\mathbf{a}}$ se expresará por sus componentes x-y, n-t y r-θ una vez que se haya elegi-

http://gratislibrospdf.com/

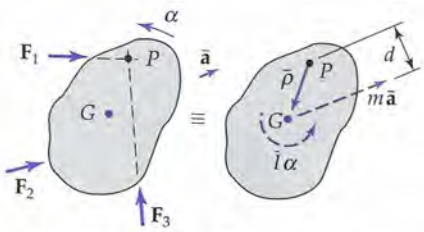


Diagrama para sólido libre — Diagrama cinético

Figura 6.5

do el sistema de referencia inercial conveniente. La equivalencia que se ilustra en la figura 6.4 es esencial para la comprensión de la cinética del movimiento plano y se empleará continuamente en la resolución de problemas. La representación de las resultantes $m\bar{\mathbf{a}}$ e $\bar{I}\alpha$ contribuye a garantizar que las sumas de las fuerzas y momentos determinados en los diagramas para sólido libre se igualan a sus resultantes adecuadas.

Una variante de la ecuación del momento resultante. Cuando en el apartado 4.4 tratamos del teorema del momento cinético para un sistema de puntos materiales dedujimos la ecuación 4.11 siguiente referente al momento resultante respecto a un punto P cualquiera

$$\Sigma\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{a}} \qquad [4.11]$$

donde $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ es el vector que une P con el centro de masa G y $\bar{\mathbf{a}}$ es la aceleración del centro de masa. Tal como hemos visto anteriormente en este mismo apartado para un cuerpo rígido en movimiento plano, $\dot{\mathbf{H}}_G$ se convierte en $\bar{I}\alpha$. Además, el producto vectorial $\bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{a}}$ no es sino el momento, de módulo $m\bar{a}d$, de $m\bar{\mathbf{a}}$ respecto a P. Por tanto, para el cuerpo bidimensional ilustrado en la figura 6.5 con sus diagramas para sólido libre y cinético la ecuación 4.12 podemos volver a escribirla como

$$\Sigma M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \qquad (6.2)$$

Evidentemente, los términos son los tres positivos en sentido antihorario para el ejemplo representado y el punto P se ha elegido de modo que no intervengan las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_3$. Si hubiéramos deseado que no intervinieran $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$, tomando como centro de momentos su punto de intersección, P estaría así al otro lado del vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y el momento de éste respecto a P tendría sentido horario y en 6.2 aparecería con un signo negativo. La ecuación 6.2 se recuerda fácilmente puesto que no es sino una expresión del ya conocido principio de los momentos, expresión en la cual la suma de los momentos respecto a P es igual al momento combinado respecto a P de su suma, expresada por el par resultante $\Sigma M_P = \bar{I}\alpha$ y la fuerza resultante $\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$.

Asimismo, en el apartado 4.4 desarrollamos otra ecuación, la 4.13, del momento respecto a P que era

$$\Sigma\mathbf{M}_P = (\dot{\mathbf{H}}_P)_{\text{rel}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\mathbf{a}_P \qquad [4.13]$$

Para un cuerpo rígido en movimiento plano, si como punto P se toma un punto *fijo* al cuerpo, entonces $(\dot{\mathbf{H}}_P)_{\text{rel}}$ en forma escalar es $I_P\alpha$, donde I_P es el momento de inercia másico respecto a un eje que pasa por P y α es la aceleración angular del cuerpo. Así pues, la ecuación 4.13 podemos escribirla como

$$\Sigma\mathbf{M}_P = I_P\boldsymbol{\alpha} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\mathbf{a}_P \qquad (6.3)$$

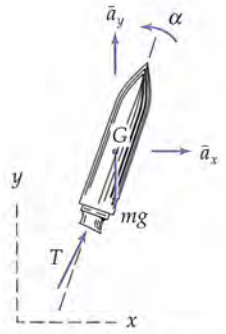
donde la aceleración de P es $\mathbf{a}_P$ y $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ es el vector de posición que une P con G. Cuando $\bar{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$ el punto P pasa a ser el centro de masa G y la ecuación 6.3 se reduce a la forma escalar $\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$, anteriormente deducida. Cuando $\mathbf{a}_P = \mathbf{0}$, el punto P pasa a ser el punto O, fijo en un sistema de referencia inercial y unido al cuerpo (o a éste ampliado), y la forma escalar de la ecuación 6.3 se reduce a

$$\Sigma M_O = I_O\alpha \qquad (6.4)$$

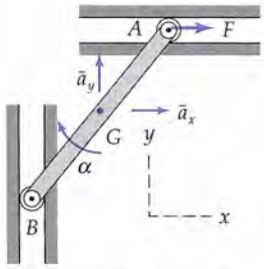
http://gratislibrospdf.com/

Esta ecuación 6.4 es pues aplicable a la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto O no acelerado fijo al cuerpo y es la simplificación bidimensional de la ecuación 4.7.

Movimiento vinculado y no vinculado. El movimiento de un cuerpo puede ser libre o vinculado. Por ejemplo, el cohete de la figura 6.6*a*, que se mueve en un plano vertical, es un caso de movimiento libre, o no vinculado, pues no se ejercen limitaciones de ninguna clase al movimiento. Aquí, las dos componentes a_x y a_y de la aceleración del centro de masa pueden determinarse independientemente una de la otra aplicando directamente las ecuaciones 6.1. Por el contrario, la barra de la figura 6.6*b* representa un caso de movimiento vinculado y en él las guías horizontal y vertical por las que se mueven los extremos de la barra imponen una relación cinemática entre la aceleración del centro de masa y la aceleración angular de la barra. Por ello, antes de acometer la resolución del problema, es necesario determinar dicha relación cinemática a partir de los principios establecidos en el capítulo 5 y combinarla con las ecuaciones de las fuerzas y del momento resultante. En general, los problemas de Dinámica en los que intervienen vínculos materiales que limitan el movimiento requieren un estudio cinemático previo de la relación entre la aceleración lineal y la aceleración angular, antes de que puedan resolverse las ecuaciones de las fuerzas y del momento resultante. Es por esta causa que resulta vital para este capítulo 6 haber comprendido perfectamente los fundamentos y procedimientos desarrollados en el capítulo 5.



(*a*) Movimiento no vinculado



(*b*) Movimiento vinculado

Figura 6.6

Sistemas de cuerpos interconectados. En aquellos casos en que haya que tratar con dos o más cuerpos rígidos conectados cuyos movimientos estén relacionados cinemáticamente, es conveniente estudiar los cuerpos como sistema completo. En la figura 6.7 se ilustran dos cuerpos rígidos articulados en A y sometidos a las fuerzas exteriores que se indican. Las fuerzas que actúan en la conexión A son interiores al sistema y no se representan. La resultante de todas las fuerzas exteriores debe ser igual a la suma vectorial de las dos resultantes $m_1\bar{\mathbf{a}}_1$ y $m_1\bar{\mathbf{a}}_2$ y la suma de los momentos respecto a un punto cualquiera como P de todas las fuerzas exteriores debe ser igual al momento de las resultantes $\bar{I}_1\alpha_1 + \bar{I}_2\alpha_2 + m_1\bar{a}_1 d_1 + m_2\bar{a}_2 d_2$. Así pues, podemos escribir

$$\begin{aligned} \Sigma\mathbf{F} &= \Sigma m\bar{\mathbf{a}} \\ \Sigma M_P &= \Sigma\bar{I}\alpha + \Sigma m\bar{a}d \end{aligned} \qquad (6.5)$$

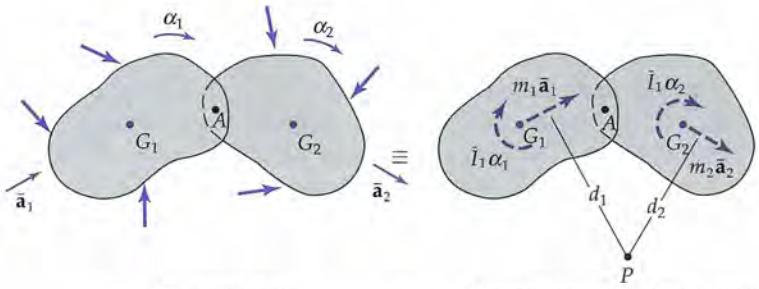


Diagrama para sólido libre del sistema ≡ Diagrama cinético del sistema

Figura 6.7

http://gratislibrospdf.com/

donde los sumatorios de los segundos miembros constan de tantos sumandos como número de cuerpos separados existan en el problema. No obstante, si en el sistema quedan más de tres incógnitas, las tres ecuaciones escalares independientes del movimiento aplicadas al sistema no bastan para resolver el problema. En tales casos puede recurrirse a procedimientos más elaborados, como el del trabajo virtual o el de las ecuaciones de Lagrange (que no se trata en este libro[1]), o bien puede desmembrarse el sistema y estudiar cada porción por separado resolviendo el sistema de ecuaciones resultante.

Procedimiento de análisis. Al resolver problemas dinámicos relacionados con el movimiento plano de cuerpos rígidos, hay que seguir los pasos siguientes una vez que se tenga una idea clara de los datos y requerimientos del problema.

(1) Cinemática. Primero se identificará el tipo de movimiento y seguidamente se determinarán las aceleraciones lineales y angulares que pueden hallarse exclusivamente con la información cinemática disponible. En el caso de movimiento plano vinculado, suele ser necesario establecer la relación entre la aceleración lineal del centro de masa y la aceleración angular del cuerpo resolviendo primero las ecuaciones adecuadas de la velocidad y la aceleración relativas. Recalcamos otra vez que la resolución acertada de los problemas de este capítulo está supeditada a la capacidad para describir correctamente la cinemática necesaria, por lo que se recomienda repasar frecuentemente el capítulo 5.

(2) Diagramas. El diagrama para sólido libre del cuerpo analizado se dibujará siempre. Se tomará un sistema de coordenadas inercial que resulte cómodo y práctico y se rotularán todas las cantidades conocidas y desconocidas. El diagrama cinético debe asimismo dibujarse para clarificar la equivalencia entre las fuerzas aplicadas y la consiguiente respuesta dinámica.

(3) Ecuaciones del movimiento. Al aplicar las tres ecuaciones del movimiento 6.1 hay que ser coherente con los signos algebraicos en relación con los ejes de referencia elegidos. Como alternativa a una de las ecuaciones 6.1 puede emplearse la ecuación 6.2 o la 6.3. Se combinarán los resultados obtenidos del análisis cinemático que haya sido necesario realizar. Es preciso contar el número de incógnitas para asegurarse de que existe un número igual de ecuaciones independientes. Para que un problema de movimiento plano de un cuerpo rígido sea resoluble, no puede haber más de cinco incógnitas escalares, que es el número que permiten las tres ecuaciones escalares del movimiento (6.1) y las dos relaciones entre componentes escalares procedentes de la ecuación de la aceleración relativa.

El orden a seguir en un problema dado depende de las condiciones del mismo. Para organizar una resolución en una secuencia de pasos lógicos se recomienda, antes que nada, reconocer la dependencia que pueda tener la cantidad requerida con otras cantidades intermedias. Siguiendo la pista de estas dependencias hacia atrás, para llegar hasta la información disponible, se establece el orden inverso de los pasos a seguir para resolver realmente el problema.

---

[1] Cuando un sistema interconectado posee más de un grado de libertad, es decir, requiere más de una coordenada para especificar completamente su configuración, suelen generalmente emplearse las ecuaciones de Lagrange, que corresponden a un nivel más elevado que el de esta obra. En *Dinámica*, del autor principal, (Ed. Reverté, 1976) se expone este método.

http://gratislibrospdf.com/

A lo largo de los tres apartados que siguen vamos a aplicar el análisis anterior a los tres casos de movimiento plano, es decir, traslación, rotación en torno a un eje fijo y movimiento plano general.

6.3 TRASLACIÓN

La traslación de un cuerpo rígido en movimiento plano se describió en el apartado 5.1 y se ilustró en las figuras 5.1*a* y 5.1*b*, donde se vio que todo segmento rectilíneo de un cuerpo en traslación permanece paralelo en todo momento a su dirección inicial. En la traslación rectilínea todos los puntos describen trayectorias rectas, mientras que en la traslación curvilínea todos los puntos describen trayectorias congruentes. En uno y otro caso no puede haber movimiento angular del cuerpo en traslación, por lo que ω y α son ambas nulas. Por consiguiente, según la segunda de las ecuaciones 6.1, no interviene para nada el momento de inercia si el cuerpo está en traslación.

Así pues, para un cuerpo en traslación las ecuaciones generales del movimiento plano (6.1) pueden escribirse

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= m\bar{\mathbf{a}} \\ \Sigma M_G &= \bar{I}\alpha = 0 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Para una traslación rectilínea, como la ilustrada en la figura 6.8*a*, si el eje x se toma en la dirección de la aceleración, las dos ecuaciones escalares de las fuerzas quedan $\Sigma F_x = m\bar{a}_x$ y $\Sigma F_y = m\bar{a}_y = 0$. Para una traslación curvilínea, como la ilustrada en la figura 6.8*b*, empleando coordenadas n-t, las dos ecuaciones escalares de las fuerzas quedan $\Sigma F_n = m\bar{a}_n$ y $\Sigma F_t = m\bar{a}_t$. En ambos casos $\Sigma M_G = 0$.

Podemos asimismo aplicar la variante 6.2 a la ecuación del momento resultante, con la ayuda del diagrama cinético. Para una traslación rectilínea vemos que $\Sigma M_P = m\bar{a}d$ y $\Sigma M_A = 0$. Para una traslación curvilínea el diagrama cinético nos permite escribir $\Sigma M_A = m\bar{a}_n d_A$ en sentido horario y $\Sigma M_B = m\bar{a}_t d_B$ en sentido antihorario. O sea, disponemos de libertad completa para elegir el centro de momentos que convenga.

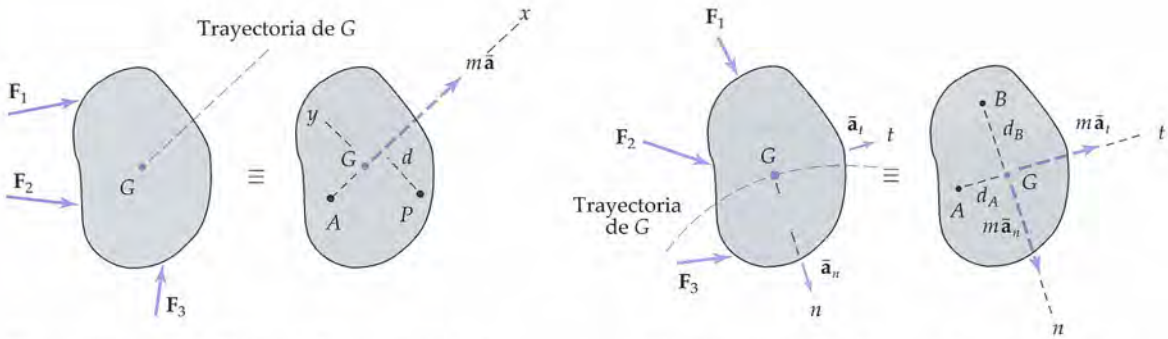
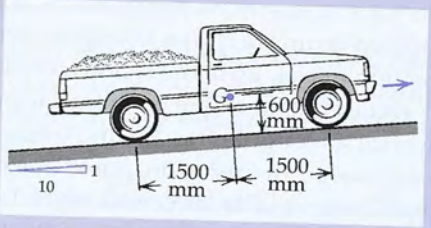


Figura 6.8

http://gratislibrospdf.com/

Partiendo del reposo, la camioneta alcanza una celeridad de 50 km/h en una distancia de 60 m subiendo por la pendiente del 10 por ciento con una aceleración constante. Calcular la fuerza normal que actúa bajo cada pareja de ruedas y la fuerza de rozamiento que actúa bajo las ruedas motrices posteriores. Se sabe que el coeficiente de rozamiento entre las cubiertas y la calzada es de 0,8 como mínimo.



Solución. Supondremos que la masa de las ruedas es despreciable comparada (1) con la masa total del vehículo, que podemos asimilarlo ahora a un cuerpo rígido único animado de una traslación rectilínea con una aceleración

(2) $$[v^2 = 2as] \qquad \bar{a} = \frac{(50/3{,}6)^2}{2(60)} = 1{,}608 \text{ m/s}^2$$

El diagrama para sólido libre de la camioneta completa muestra las fuerzas normales N_1 y N_2, la fuerza de rozamiento F opuesta al deslizamiento de las ruedas motrices y el peso $P = mg$ representado por sus dos componentes. Siendo $\theta = \text{arctg } 1/10 = 5{,}71°$, dichas componentes son $mg \cos \theta = 1500(9{,}81)\cos 5{,}71° = 14{,}64(10^3)$ N y $mg \text{ sen } \theta = 1500(9{,}81) \text{ sen } 5{,}71° = 1{,}464(10^3)$. En el diagrama cinético se representa la resultante aplicada en el centro de masa y en la dirección de la aceleración de éste. Su módulo es

$$m\bar{a} = 1500(1{,}608) = 2411 \text{ N}$$

Aplicando las tres ecuaciones del movimiento 6.1 resulta (hay tres incógnitas):

(3) $$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad F - 1461 = 2411 \qquad F = 3875 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y = 0] \qquad N_1 + N_2 - 14{,}64(10^3) = 0 \qquad (a)$$

$$[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha = 0] \qquad 1{,}5N_1 + 3875(0{,}6) - N_2(1{,}5) = 0 \qquad (b)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (a) y (b) se tiene

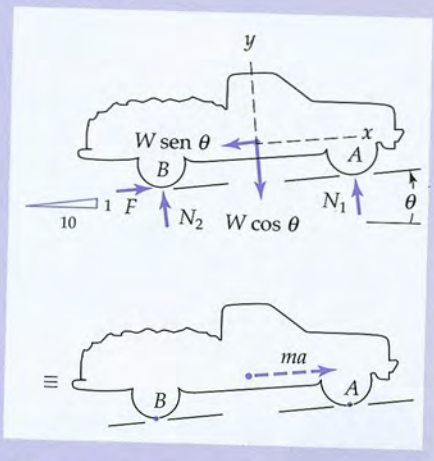
$$N_1 = 6546 \text{ N} \qquad N_2 = 8096 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Para soportar una fuerza de rozamiento de 3875 N, hace falta un coeficiente de rozamiento mínimo de $F/N_2 = 3875/8096 = 0{,}48$. Como el coeficiente de rozamiento del problema es de 0,8 por lo menos, las superficies son lo bastante rugosas para soportar el valor calculado de F y el resultado es correcto.

Otro procedimiento. En el diagrama cinético vemos que N_1 y N_2 pueden obtenerse independientemente una de otra escribiendo unas ecuaciones de momentos separadas respecto a A y a B.

(1) **Sin esta hipótesis nos veríamos obligados a tener en cuenta las fuerzas adicionales relativamente pequeñas que son el origen de los momentos que confieren a las ruedas su aceleración angular.**

(2) **Recuérdese que 3,6 km/h equivale a 1 m/s.**



(3) **Debe eludirse aquí la aplicación de la fórmula del rozamiento $F = \mu N$, ya que no estamos ante un caso de deslizamiento ni de deslizamiento inminente. Si el coeficiente de rozamiento dado fuese inferior a 0,48, la fuerza de rozamiento sería μN_2 y el vehículo sería incapaz de alcanzar la aceleración de 1,608 m/s^2. En tal caso las incógnitas serían N_1, N_2 y a.**

http://gratislibrospdf.com/

$[\Sigma M_A = m\bar{a}d]$ $\quad 2N_2 - 1{,}5(14{,}64)(10^3) - 0{,}6(1464) = 2411(0{,}6)$

$$N_2 = 8096 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

④

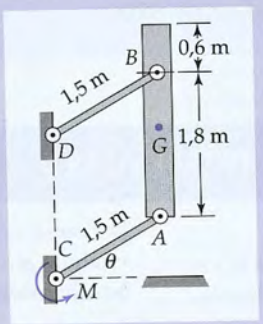
$[\Sigma M_B = m\bar{a}d]$ $\quad 14{,}64(10^3)(1{,}5) - 1464(0{,}6) - 3N_1 = 2411(0{,}6)$

$$N_1 = 8096 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

④ El primer miembro de la ecuación procede del diagrama para sólido libre y el segundo miembro del diagrama cinético. El sentido positivo asignado a las suma de momentos es arbitrario, pero debe ser el mismo para ambos miembros de la ecuación. En este problema se ha tomado como positivo el sentido antihorario para el momento respecto a *B* de la fuerza resultante.

PROBLEMA TIPO 6.2

La barra vertical AB de 150 kg tiene su centro de masa G en su punto medio y se eleva, partiendo del reposo en $\theta = 0$, por medio de las barras de conexión paralelas de masa despreciable y merced a un par de fuerzas de momento constante $M = 5$ m·kN aplicado en C a la barra inferior. Hallar en función de θ la aceleración angular α de las barras de conexión y la fuerza B que se ejerce sobre la barra DB en el instante en que $\theta = 30°$



① En líneas muy generales, la mejor manera de elegir los ejes de referencia es haciéndolos coincidir con las direcciones según las cuales se expresan las componentes de la aceleración del centro de masa. Examínense las consecuencias que tiene en este problema tomar ejes en direcciones vertical y horizontal.

Solución. Se ve que el movimiento de la barra es una traslación curvilínea puesto que no gira en conjunto durante el movimiento. Como el centro de masa
① *G* describe un movimiento circular, tomaremos unas coordenadas *n* y *t*, que será lo más cómodo. Dado que la masa de las barras es despreciable, la componente tangencial A_t de la fuerza en *A* se obtiene del diagrama para sólido libre de *AC*
② en el que $\Sigma M_C \cong 0$ y $A_t = M/\overline{AC} = 5/1{,}5 = 3{,}33$ kN. La fuerza en *B* está dirigida a lo largo de la barra. En el diagrama para sólido libre pueden verse todas las fuerzas aplicadas y también se indica el diagrama cinético, donde la resultante $m\bar{\mathbf{a}}$ aparece en función de sus dos componentes.

La secuencia resolutiva se establece teniendo en cuenta que A_n y *B* dependen de la suma de las componentes *n* de las fuerzas y, por ello, de $m\bar{r}\,\omega^2$ en $\theta = 30°$. El valor de ω depende de la variación de $\alpha = \ddot{\theta}$ con θ. Esta dependencia se establece mediante una suma de las componentes en la dirección *t* para un valor genérico de θ, donde $\bar{a}_t = (\bar{a}_t)_A = \overline{AC}\alpha$. Así pues, comenzamos con

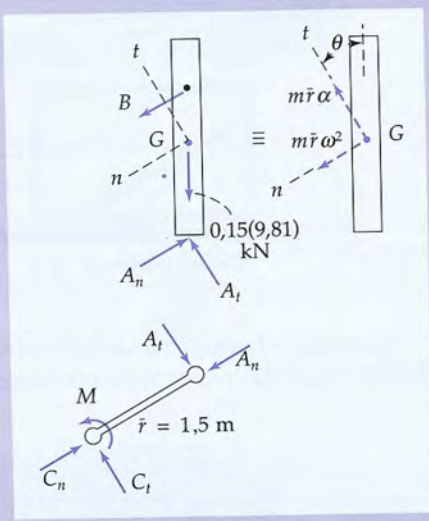
$[\Sigma F_t = m\bar{a}_t]$ $\quad 3{,}33 - 0{,}15(9{,}81)\cos\theta = 0{,}15(1{,}5\alpha)$

$$\alpha = 14{,}81 - 6{,}54\cos\theta \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Conociendo α en función de θ, la velocidad angular ω de las barras se obtiene de

$[\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta]$ $\quad \int_0^{\omega} \omega\, d\omega = \int_0^{\theta} (14{,}81 - 6{,}54\cos\theta)\, d\theta$

$$\omega^2 = 29{,}6\theta - 13{,}08 \operatorname{sen}\theta$$



② Las ecuaciones de las fuerzas y de los momentos para un cuerpo de masa despreciable se hacen iguales a las ecuaciones de equilibrio. Por tanto la barra *BD* actúa como un miembro de dos fuerzas en equilibrio.

http://gratislibrospdf.com/

Sustituyendo θ por30° resulta

$$(\omega^2)_{30^\circ} = 8{,}97\ (\text{rad/s})^2 \qquad \alpha_{30^\circ} = 9{,}15\ \text{rad/s}^2$$

y

$$m\bar{r}\omega^2 = 0{,}15(1{,}5)(8{,}97) = 2{,}02\ \text{kN}$$
$$m\bar{r}\alpha = 0{,}15(1{,}5)(9{,}15) = 2{,}06\ \text{kN}$$

La fuerza B puede obtenerse de una suma de momentos respecto a A que elimine A_n, A_t y el peso. O bien puede tomarse una suma de momentos respecto a la intersección de A_n con la recta soporte de $m\bar{r}\alpha$, con lo que no intervienen A ni $m\bar{r}\alpha$. Tomando A como centro de momentos se tiene

$$[\Sigma M_A = m\bar{a}d] \qquad 1{,}8\cos 30^\circ B = 2{,}02(1{,}2)\cos 30^\circ + 2{,}06(1{,}2)\,\text{sen}\,30^\circ$$
$$B = 2{,}14\ \text{kN} \qquad \textit{Resp.}$$

La componente A_n podría obtenerse de una suma de fuerzas en la dirección n o de una suma de momentos respecto a G o respecto a la intersección de B con la recta soporte de $m\bar{r}\alpha$.

PROBLEMAS

Problemas introductorios

6.1 ¿Para qué aceleración a del bastidor se mantendrá la varilla delgada uniforme en la posición representada? Se desprecian el rozamiento y la masa de los rodillos A y B.

Resp. $a = g\sqrt{3}$

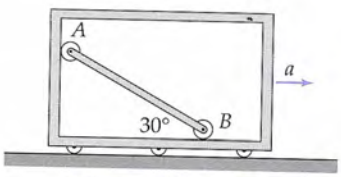


Figura problema 6.1

6.2 El embalaje homogéneo de masa m está montado sobre ruedecillas instaladas en sus bordes delantero y trasero. Hallar la fuerza máxima P que puede aplicarse sin que el embalaje vuelque alrededor de (*a*) su borde delantero con $h = b$ y (*b*) su borde trasero con $h = 0$.

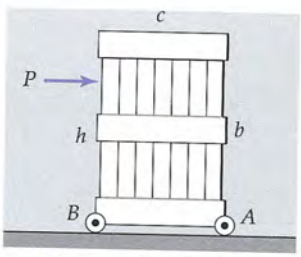


Figura problema 6.2

6.3 Una varilla delgada uniforme descansa sobre un asiento de automóvil tal como se muestra. Hallar la desaceleración a para la cual comenzará a volcarse hacia adelante. Se supone que el rozamiento en B basta para impedir el resbalamiento.

Resp. $a = 5{,}66\ \text{m/s}^2$

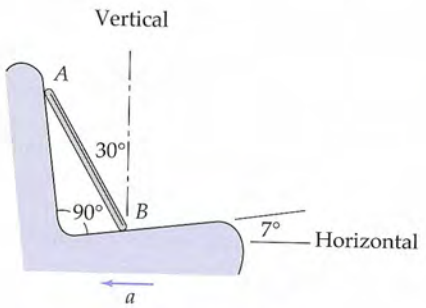


Figura problema 6.3

6.4 El poste uniforme de 100 kg pende en posición horizontal de los tres cables representados. Si se rompe CB, calcular la tracción que sufre BD inmediatamente tras la rotura. (*Sugerencia:* Eligiendo cuidadosamente el centro de momentos puede resolverse con una sola ecuación de movimiento.)

http://gratislibrospdf.com/

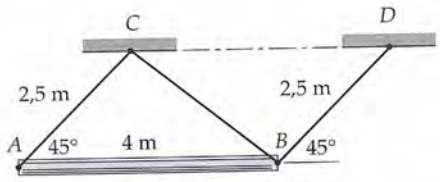


Figura problema 6.4

6.5 Cuando a la cortadora de césped de tracción trasera se le conecta la transmisión estando en reposo, se observa que sus ruedas traseras patinan momentáneamente mientras se acelera. Si los coeficientes de rozamiento entre las ruedas traseras y el suelo son $\mu_e = 0{,}7$ y $\mu_c = 0{,}5$, hallar la aceleración hacia adelante de la máquina. La masa de ésta y del saco unido a ella es de 50 kg con el centro de masa en G. Se supone que quién la acciona no empuja sobre la empuñadura, por lo que $P = 0$.

Resp. $a = 4{,}14\ \text{m/s}^2$

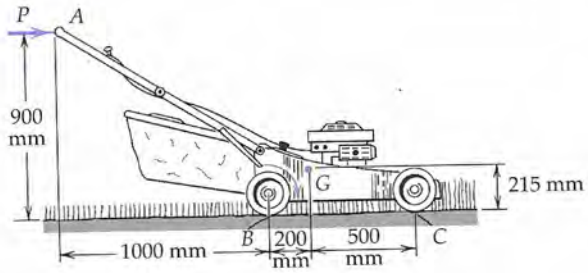


Figura problema 6.5

6.6 Al descender por la pendiente del 10°, el ciclista aplica los frenos. ¿Qué desaceleración a provocaría el peligro de un vuelco alrededor de la rueda delantera? El centro de masa de la bicicleta y el ciclista se halla en G.

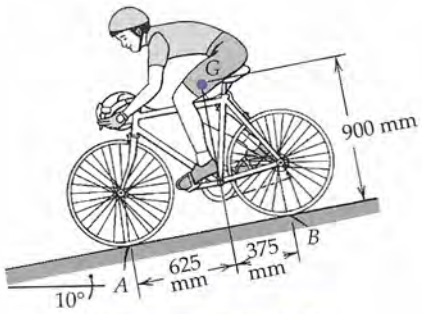


Figura problema 6.6

6.7 El centro de masa del automóvil de 1650 kg está en G. Calcular las fuerzas normales N_A y N_B entre la calzada y las parejas de ruedas delanteras y traseras en condiciones de aceleración máxima. La masa de las ruedas es pequeña comparada con la total del vehículo. El coeficiente de rozamiento estático entre la calzada y las ruedas posteriores motrices es 0,8.

Resp. $N_A = 6{,}85$ kN, $N_B = 9{,}34$ kN

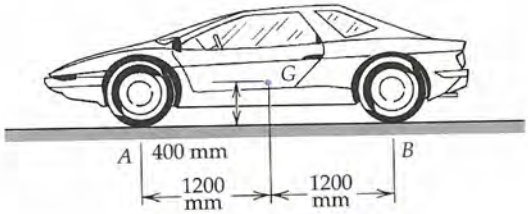


Figura problema 6.7

Problemas representativos

6.8 El brazo AB de un acelerómetro clasificador tiene una masa de 0,1 kg con centro de masa en G y en A está articulado libremente al armazón F. El resorte de torsión que rodea a A está ajustado de modo que el brazo sufre la precarga de un momento horario de 225 mm·N. Hallar la aceleración descendente a del armazón para la cual se separan los contactos en B y se abre el circuito eléctrico.

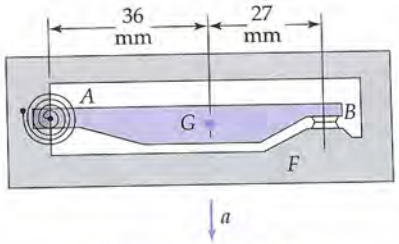


Figura problema 6.8

6.9 Hallar el valor de la fuerza P que iniciaría el vuelco del armario. ¿Qué coeficiente μ_e de rozamiento estático hace falta para que el vuelco no vaya acompañado de deslizamiento?

Resp. $P = 392$ N, $\mu_e > \dfrac{a}{g} = \dfrac{2}{3}$

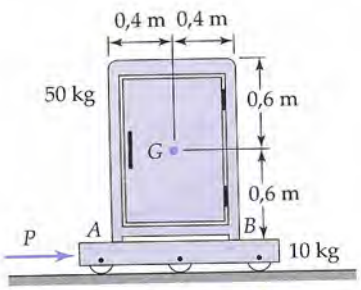


Figura problema 6.9

http://gratislibrospdf.com/

6.10 El coche de un monorraíl aéreo es impulsado por una de las pequeñas ruedas A o B. Elegir aquélla para la cual el coche puede recibir la mayor aceleración sin que se deslice la rueda motriz y calcular la aceleración máxima si el coeficiente de rozamiento efectivo entre las ruedas y el raíl está limitado a 0,25. Se desprecia la pequeña masa de las ruedas.

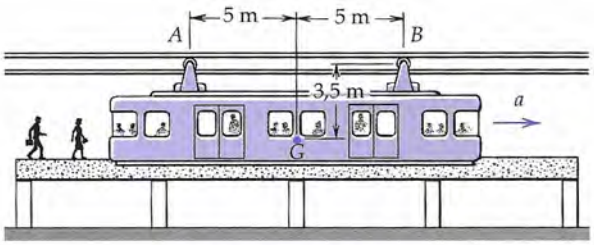


Figura problema 6.10

6.11 Los cilindros homogéneos de 400 mm de alto y 250 mm de diámetro descansan en una cinta transportadora plana que se mueve horizontalmente. Si la celeridad de la cinta aumenta según $v = 1{,}2 + 0{,}9\,t^2$, donde t es el tiempo en segundos medido desde el instante en que se inicia el aumento de celeridad, calcular el valor de t para el cual los cilindros comenzarán a volcarse. Los listones impiden que los cilindros resbalen.

Resp. $t = 3{,}41$ s

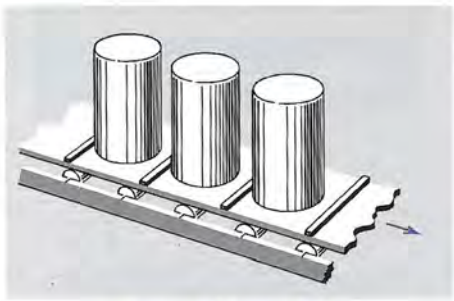


Figura problema 6.11

6.12 La barra uniforme OB de 30 kg está unida al bastidor acelerado en la posición a 30° respecto a la horizontal mediante el pasador O y el rodillo A. Si la aceleración horizontal del bastidor es $a = 20$ m/s^2, calcular la fuerza F_A que sufre el rodillo y las componentes x e y de la fuerza que soporta el pasador O.

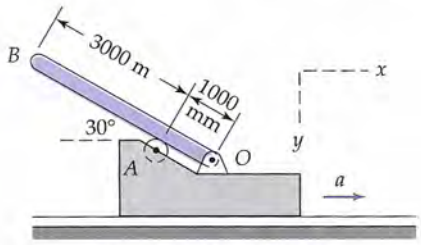


Figura problema 6.12

6.13 En la plataforma abierta del camión se transporta el taladro de columna de centro de masa G. Si el conductor se olvida de amarrar la máquina al vehículo, hallar la aceleración máxima a que éste puede adquirir sin que el taladro resbale ni vuelque en torno al punto A de su base. El coeficiente de rozamiento estático entre la plataforma y el taladro es de 0,60.

Resp. $a = 4{,}91$ m/s^2

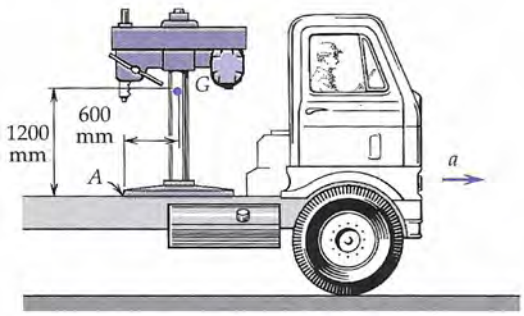


Figura problema 6.13

6.14 El carrito B se mueve hacia la derecha con una aceleración $a = 2g$. Si la desviación angular estacionaria de la varilla delgada uniforme de masa $3m$ se observa que es de 20°, hallar el valor de la constante K del resorte de torsión. Éste, que ejerce sobre la varilla un momento $M = K\theta$, está sin deformar cuando la varilla está vertical. Los valores de m y l son 0,5 kg y 0,6 m, respectivamente. La pequeña esfera del extremo, de masa m, se tratará como una partícula.

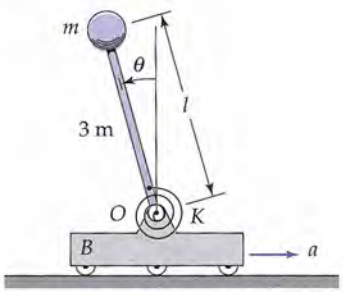


Figura problema 6.14

6.15 El remolque cargado de 900 kg tiene su centro de masa en G y está sujeto en A al enganche del parachoques trasero. Si el automóvil y el remolque alcanzan una velocidad de 60 km/h, sobre una carretera horizontal, en una distancia de 30 m partiendo del reposo y con una aceleración constante, calcular la componente vertical de la fuerza soportada por el enganche A.

http://gratislibrospdf.com/

Despreciar la pequeña fuerza de rozamiento ejercida sobre las ruedas relativamente ligeras.

Resp. $A_y = 1389$ N

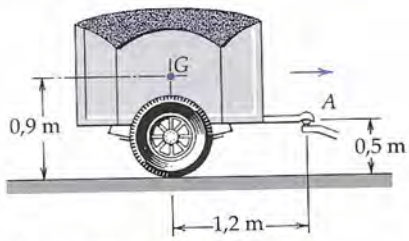


Figura problema 6.15

6.16 Hallar el módulo P y la dirección θ de la fuerza necesaria para comunicar una aceleración hacia atrás $a = 1{,}5$ m/s^2 a la carretilla cargada desde la posición representada y sin que rote. La masa combinada de la carretilla y su carga es de 190 kg con centro de masa en G. Comparar la fuerza normal en B cuando hay aceleración con la misma cuando hay equilibrio estático en la posición de la figura. Despreciar el rozamiento y la masa de la rueda.

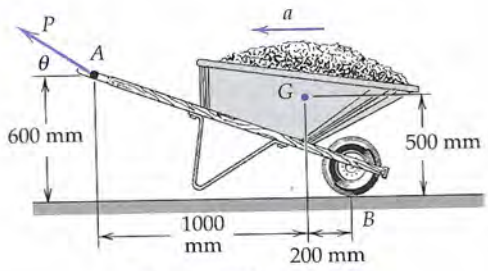


Figura problema 6.16

6.17 El mecanismo representado se compone de un armazón vertical A sobre el que gira libremente en torno a O un sector dentado conjugado del engranaje C que lleva un índice solidario. Bajo una aceleración uniforme horizontal a hacia la derecha, el sector sufre un desplazamiento angular antihorario constante θ, respecto a la posición de aceleración nula $\theta = 0$. Hallar la aceleración correspondiente a un ángulo θ.

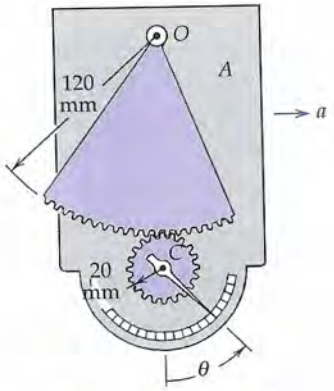


Figura problema 6.17

Resp. $a = g \operatorname{tg} \dfrac{\theta}{6}$

6.18 Bajo la acción de la fuerza de 80 N, el bastidor AC de 6 kg y la barra delgada uniforme AB de 4 kg y longitud l se deslizan sin rozamiento a lo largo de la varilla horizontal fija. Calcular la tracción T que sufre el cable BC y las componentes x e y de la fuerza que ejerce sobre la barra el pasador A. El movimiento tiene lugar en el plano vertical.

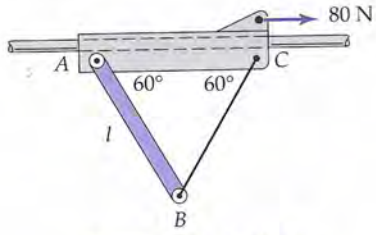


Figura problema 6.18

6.19 El laminador de rodillos se compone de la barra uniforme de 2 kg ACB con dos rodillos livianos que hacen fuerza sobre las caras superior e inferior de un contrachapado a lo largo del borde. Hallar la fuerza que ejerce cada rodillo sobre el contrachapado cuando a la barra se aplica una fuerza de 50 N en la posición representada. Despreciar todos los rozamientos.

Resp. $B = 79{,}6$ N, $C = 134{,}9$ N

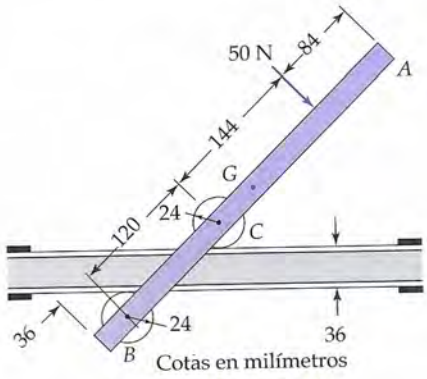


Figura problema 6.19

6.20 La camioneta transporta la viga uniforme ABC de 20 kg. El extremo A está sujeto al fondo de la caja mediante una cuerda horizontal de corta longitud. Puede suponerse que las superficies de contacto en B entre la viga y la puerta zaguera son

http://gratislibrospdf.com/

lisas. Si el vehículo arranca con aceleración inicial $a = 3$ m/s^2, hallar la correspondiente fuerza en B.

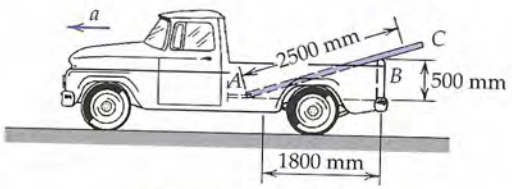


Figura problema 6.20

6.21 La barra uniforme de acero AD está rígidamente unida al vaso, que recibe una oscilación armónica tal como se indica. Despreciando el peso de las barras comparado con otras fuerzas actuantes, hallar el momento flector máximo M que se induce en la barra durante su oscilación vertical para una amplitud $y_0 = 3$ mm y una frecuencia $n = 6$ ciclos por segundo.

Resp. $M = 0{,}417$ m·N

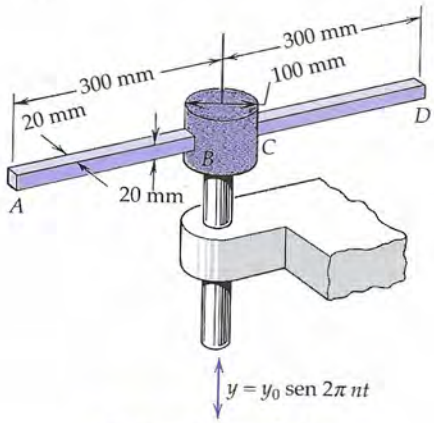


Figura problema 6.21

6.22 El dispositivo de la figura oscila horizontalmente de acuerdo con $x = b$ sen ωt, donde b y ω son constantes. Hallar y representar la fuerza T en la barra ligera fija a A como función del tiempo t. La masa de la varilla delgada uniforme es m.

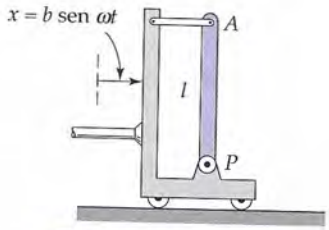


Figura problema 6.22

6.23 El bloque A y la barra sujeta a él tienen una masa total de 50 kg y están obligados a moverse a lo largo de la guía a 60° bajo la acción de la fuerza aplicada de 800 N. La masa de la barra uniforme horizontal es de 15 kg y está soldada al bloque en B. El rozamiento en la guía es despreciable. Calcular el momento flector M ejercido por la soldadura sobre la barra en B.

Resp. $M = 196{,}0$ m·N

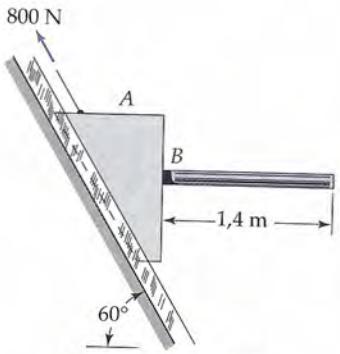


Figura problema 6.23

6.24 A la cómoda se aplica la fuerza $P = 400$ N tal como se muestra. El centro de masa G del mueble coincide con su centro geométrico. Hallar las variaciones porcentuales n_A y n_B de las fuerzas normales en A y B con relación a los valores estáticos cuando $P = 0$.

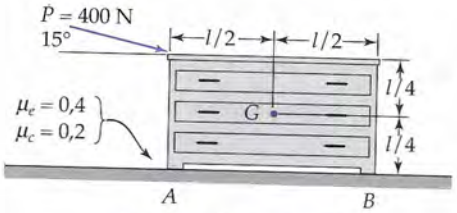


Figura problema 6.24

6.25 Un reactor comercial aterriza a 200 km/h y reduce su celeridad hasta 60 km/h merced al empuje negativo R que producen los inversores de chorro a lo largo de 425 m de pista y

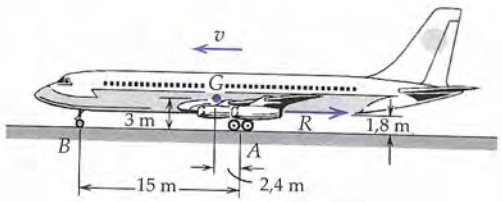


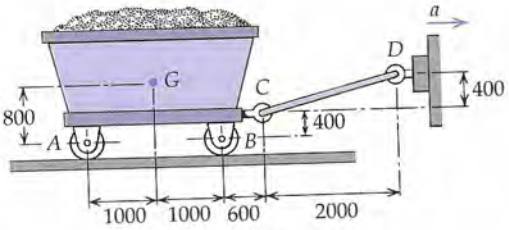
Figura problema 6.25

http://gratislibrospdf.com/

con desaceleración constante. La masa total del aparato es de 140 Mg con centro de masa en G. Calcular la reacción N bajo la rueda de morro al final del período de frenado y antes de la aplicación del frenado mecánico. A velocidades bajas, las fuerzas aerodinámicas son pequeñas y pueden despreciarse.

Resp. $N = 257$ kN

6.26 La vagoneta minera cargada tiene una masa de 2000 kg y está sujeta al vehículo de remolque mediante la barra ligera articulada CD. Si el vehículo de remolque tiene una aceleración de 3 m/s^2, calcular las correspondientes reacciones bajo las ruedas de pequeño tamaño A y B.



Cotas en milímetros

Figura problema 6.26

6.27 La figura muestra la plataforma móvil A de lanzamiento del Saturno V junto con la torre umbilical B, el cohete sin combustible C y el transportador oruga D que lleva al sistema al lugar de lanzamiento. Se dan las dimensiones aproximadas de la estructura y las posiciones de los centros de masa G. Las masas aproximadas son $m_A = 3$ Gg, $m_B = 3{,}3$ Gg, $m_C = 0{,}23$ Gg, $m_D = 3$ Gg. La distancia mínima necesaria para pararse desde la celeridad máxima de 1,5 km/h es 0,1 m. Calcular la componente vertical de la reacción bajo el tren oruga delantero F durante el período de desaceleración máxima.

Resp. $F = 59{,}5$ MN

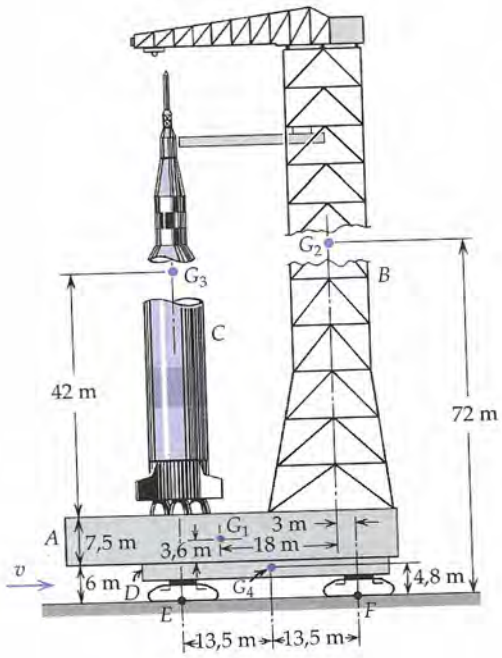


Figura problema 6.27

6.28 La barra uniforme acodada gira libremente en el punto P del cursor, el cual se desplaza por la varilla horizontal. Hallar el valor estacionario del ángulo θ si (*a*) $a = 0$ y (*b*) $a = g/2$. ¿Para qué valor de a sería cero el valor estacionario de θ?

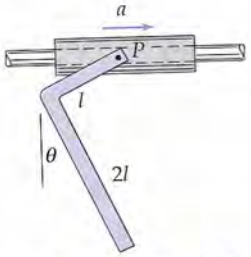


Figura problema 6.28

6.29 El paralelogramo articulado sirve para transferir embalajes de la plataforma A a la plataforma B. La presión del aceite del cilindro hidráulico está programada para que el movimiento desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \theta_0 = \pi/3$ sea suave siguiendo la ley $\theta = \frac{\pi}{6}\left(1 - \cos\frac{\pi t}{2}\right)$, donde t son segundos. Hallar la fuerza sobre el pasador de D (*a*) inmediatamente después de iniciado el movimiento, siendo θ todavía cero, y (*b*) cuando $t = 1$ s. El embalaje y la plataforma tienen una masa total de 200 kg y el centro de masa de la combinación está en G. La masa de las barras es pequeña y puede despreciarse.

Resp. (*a*) $D = 1714$ N, (*b*) $D = 2178$ N

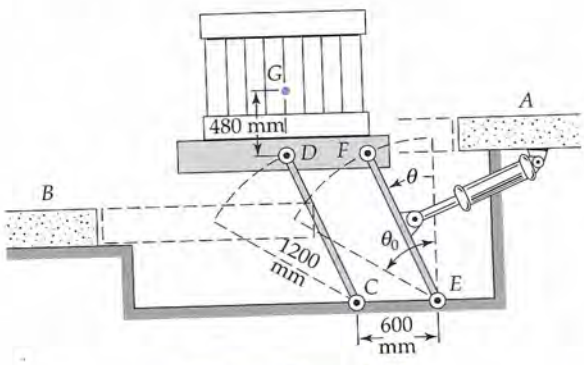


Figura problema 6.29

http://gratislibrospdf.com/

6.30 El paralelogramo articulado de la figura se mueve en el plano vertical con la barra uniforme EF de 8 kg sujeta a la placa en el punto E mediante un pasador soldado tanto a la placa como a la barra. A la biela AB se aplica un par de fuerzas (no indicado) en torno al pasador inferior al objeto de impulsar a las dos bielas en sentido horario. Cuando θ llega a los 60°, ambas bielas poseen una aceleración y una velocidad angulares de 6 rad/s^2 y 3 rad/s^2, respectivamente. Calcular los módulos de la fuerza F y del momento M que en ese instante soporta el pasador en E.

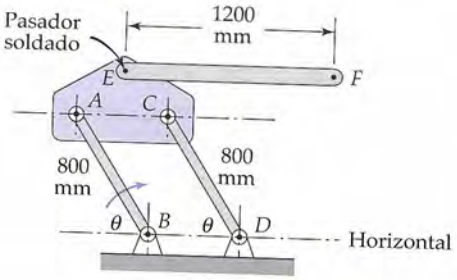


Figura problema 6.30

6.31 Las dos ruedas del vehículo están enlazadas mediante la biela AB de 20 kg cuyo centro de masa está en G. La biela está articulada a una rueda en B, y en A el pasador entra en una ranura horizontal de la biela. Si el vehículo lleva una celeridad constante de 4 m/s, hallar el módulo de la fuerza que soporta el pasador de B en la posición $\theta = 30°$.

Resp. $B = 188{,}3$ N

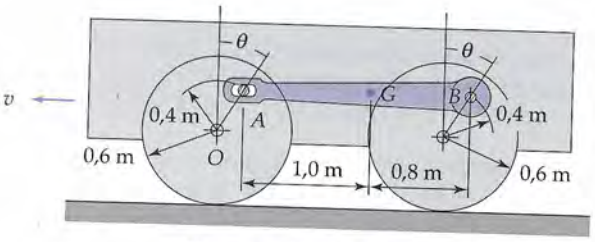


Figura problema 6.31

6.32 Bajo la acción del par de fuerzas de momento $M = 600$ m · N aplicado al extremo de una de las bielas, el sistema articulado paralelo de masa despreciable eleva, desde el reposo, la placa semicircular de espesor uniforme de 70 kg. Calcular las componentes normal y tangencial a AB de la fuerza cortante que soporta el pasador en A un instante después de la aplicación del par.

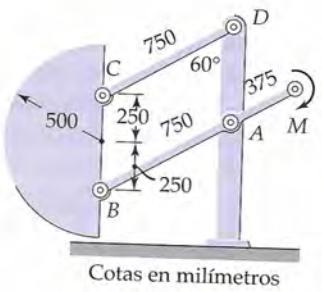


Figura problema 6.32

6.33 El embalaje de 900 kg, cuyo centro de masa coincide con su centro geométrico, cuelga por A y B de sendos cables y por C de una cuerda que lo mantienen en un plano vertical. Si la cuerda se suelta repentinamente cuando $\theta = 60°$, calcular la tracción que sufre el cable A un instante después. Resolver, primero, escribiendo tres ecuaciones de movimiento para las tres incógnitas y, después, escribiendo una sola ecuación de equilibrio. Comparar las ventajas de los dos procedimientos.

Resp. $T_A = 1616$ N

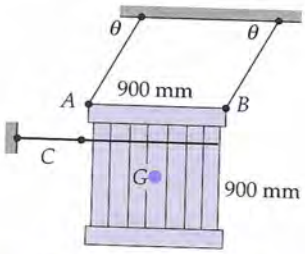


Figura problema 6.33

▶ **6.34** La barra uniforme AB de 200 kg sube en el plano vertical merced a la aplicación en C de un par de momento constante $M = 3$ m · kN a la biela. Las masas de las bielas son pequeñas y pueden despreciarse. Si la barra parte del reposo en $\theta = 0$, hallar el módulo de la fuerza que soporta el pasador en A cuando el sistema pasa por la posición $\theta = 60°$.

Resp. $A = 2{,}02$ kN

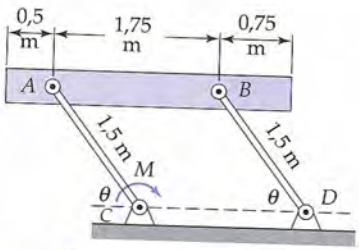


Figura problema 6.34

http://gratislibrospdf.com/

En el apartado 5.2 se describió la rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo O y se representó en la figura 5.1*c*. Vimos allí que en este movimiento todos los puntos del cuerpo describen circunferencias alrededor del eje de rotación y que todos los segmentos rectilíneos del cuerpo situados en el plano del movimiento tienen la misma velocidad angular ω y la misma aceleración angular α. En el caso del movimiento circular la aceleración del centro de masa se expresa con muchísima más facilidad en componentes n y t, por lo que tenemos $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$ y $\bar{a}_t = \bar{r}\alpha$, tal como se muestra en la figura 6.9*a* para la rotación del cuerpo rígido alrededor de un eje fijo que pasa por O. En la parte *b* de la figura se representa el diagrama para sólido libre y el diagrama cinético equivalente de la parte *c* de la figura muestra la resultante $m\bar{\mathbf{a}}$ descompuesta en sus componentes n y t y el par de fuerzas resultante $\bar{I}\alpha$. Las ecuaciones generales 6.1 del movimiento plano son aplicables y se repiten aquí

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \qquad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \qquad [6/1]$$

O sea, las componentes escalares de la ecuación de las fuerzas pasan a ser ahora $\Sigma F_n = m\bar{r}\omega^2$ y $\Sigma F_t = m\bar{r}\alpha$. Al aplicar la ecuación de momentos respecto a G, es fundamental tener en cuenta el momento de la fuerza que el cuerpo tiene aplicada en O, por lo que esta fuerza no puede omitirse del diagrama para sólido libre.

En la rotación de un cuerpo en torno a un eje fijo es generalmente útil aplicar una ecuación de momentos directamente respecto al eje de rotación. Esta ecuación ya la dedujimos anteriormente con la designación 6.4 y la repetimos aquí

$$\Sigma M_O = I_O\alpha \qquad [6.4]$$

Del diagrama cinético de la figura 6.9*c* podemos obtener muy fácilmente esta ecuación 6.4 calculando el momento resultante respecto a O, que es $\Sigma M_O = \bar{I}\alpha + m\bar{a}_t\bar{r}$. Aplicando el teorema de Steiner relativo a los momentos de inercia másicos resulta que $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^2$ y, por tanto, $\Sigma M_O = (I_O - m\bar{r}^2)\alpha + m\bar{r}^2\alpha = I_O\alpha$.

Para el caso muy corriente de rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo que pase por su centro de masa G, es evidente que $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ y, por consiguiente, $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Así pues, el sistema equivalente a las fuerzas aplicadas es el par $\bar{I}\alpha$.

La fuerza resultante $m\bar{a}_t$ y el par resultante $\bar{I}\alpha$ podemos combinarlos trasladando $m\bar{a}_t$ a una posición paralela que pase por el punto Q (fig. 6.10) localizado por $m\bar{r}\alpha\, q = \bar{I}\alpha + m\bar{r}\alpha(\bar{r})$. Aplicando el teorema de Steiner, y siendo $I_O = k_O^2 m$, resulta $q = k_O^2/\bar{r}$. El punto Q recibe el nombre de *centro de percusión* y presenta la singular propiedad de que la resultante de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo deben pasar por él. Se deduce, por lo tanto, que la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto al centro de percusión es siempre nula, o sea, $\Sigma M_Q = 0$.

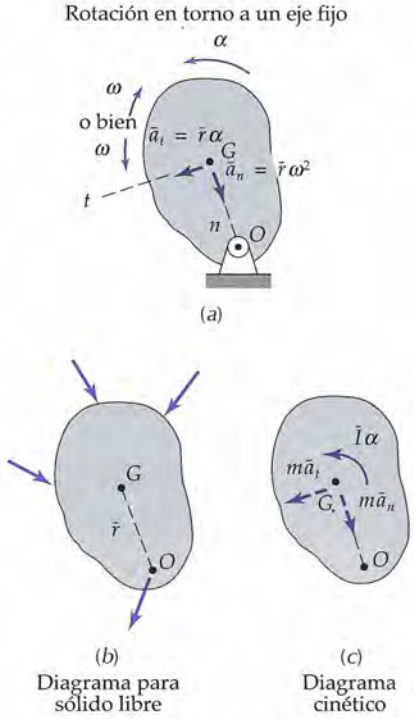


Figura 6.9

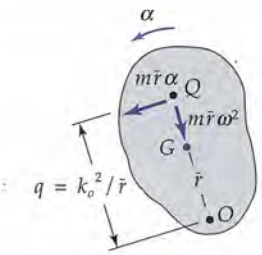
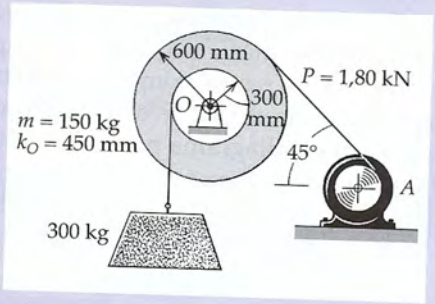
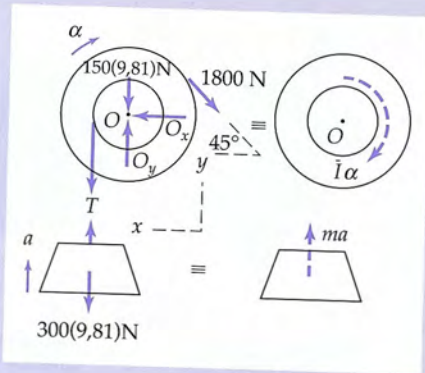


Figura 6.10

http://gratislibrospdf.com/

El bloque de hormigón de 300 kg es izado por el mecanismo de elevación cuyos cables están asegurados a los tambores sobre los que se arrollan. Los tambores, que son solidarios y giran como un conjunto único alrededor de su centro de masa O, tienen una masa combinada de 150 kg y un radio de giro respecto a O de 450 mm. Si en el grupo propulsor A se mantiene una tensión constante P de 1,80 kN, hallar la aceleración vertical del bloque y la fuerza resultante que soporta el cojinete O.





Solución I. Se dibujan los diagramas para sólido libre y de las fuerzas resultantes del bloque de hormigón y de los tambores y en ellos pueden verse todas las fuerzas actuantes, entre las que se cuentan las componentes O_x y O_y de la reacción en el cojinete. La resultante del sistema de fuerzas que actúa sobre los tambores es, en este caso de rotación centroidal, $\bar{I}\alpha = I_O\alpha$, donde

(1)

(2)

$$[I = k^2m] \qquad \bar{I} = I_O = (0{,}450)^2 150 = 30{,}4 \text{ kg·m}^2$$

Tomando momentos respecto al centro de masa O de las fuerzas que actúan sobre las poleas resulta, considerando positivo el sentido de la aceleración angular, α

$$[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha] \qquad 1800(0{,}600) - T(0{,}300) = 30{,}4\alpha \qquad (a)$$

La aceleración del bloque queda descrita por

$$[\Sigma F_y = ma_y] \qquad T - 300(9{,}81) = 300a \qquad (b)$$

Como $a_t = r\alpha$, tenemos $a = (0{,}300)\alpha$. Tras sustituir por este valor, el sistema de ecuaciones (a) y (b) da

$$T = 3252 \text{ N} \qquad \alpha = 3{,}44 \text{ rad/s}^2 \qquad a = 1{,}031 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

La reacción en el cojinete se obtiene de sus componentes. Como $\bar{a} = 0$, podemos emplear las ecuaciones de equilibrio

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad O_x - 1800 \cos 45^\circ = 0 \qquad O_x = 1273 \text{ N}$$

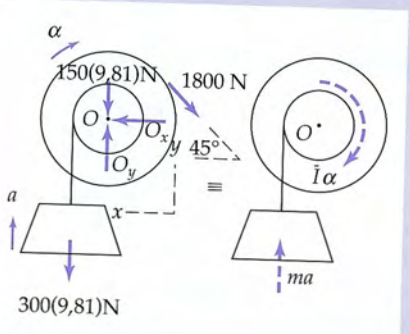
$$[\Sigma F_y = 0] \qquad O_y - 150(9{,}81) - 3252 - 1800 \text{ sen } 45^\circ = 0$$

$$O_y = 5996 \text{ N}$$

$$O = \sqrt{(1273)^2 + (5996)^2} = 6130 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

(1) **Atención al hecho de que la tensión T no es 300(9,81) N. Si lo fuera el bloque no se aceleraría.**

(2) **No hay que descuidar expresar k_O en metros si g se expresa en m/s^2.**



Solución II. Podemos seguir un procedimiento más resumido trazando el diagrama para sólido libre del sistema completo, con lo que se elimina toda referencia a T, que pasa a ser interior al nuevo sistema. Del diagrama cinético del

http://gratislibrospdf.com/

sistema vemos que la suma de momentos respecto a O debe ser igual al momento resultante $\bar{I}\alpha$ en los tambores más el momento de la resultante ma en el bloque. Entonces, según las ecuaciones 7.3 tenemos

$$[\Sigma M_O = \bar{I}\alpha + mad] \qquad 1800(0{,}600) - 300(9{,}81)(0{,}300) = 30{,}4\alpha + 300a(0{,}300)$$

Con $a = 0{,}300\alpha$, al resolver resulta $a = 1{,}031\ \text{m/s}^2$ como antes.

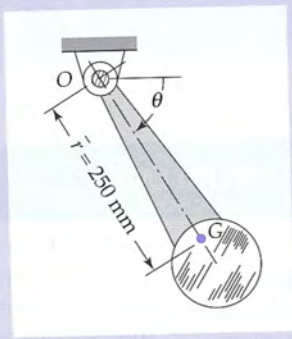
Podemos igualar las sumas de las fuerzas que actúan sobre todo el sistema a las sumas de las resultantes. Así pues,

$$[\Sigma F_y = \Sigma m\bar{a}_y] \qquad O_y - 150(9{,}81) - 300(9{,}81) - 1800 \operatorname{sen} 45^\circ =$$
$$= 150(0) + 300(1{,}031) \qquad O_y = 5996\ \text{N}$$

$$[\Sigma F_x = \Sigma m\bar{a}_x] \qquad O_x - 1800 \cos 45^\circ = 0 \qquad O_x = 1273\ \text{N}$$

PROBLEMA TIPO 6.4

El péndulo de 7,5 kg con centro de masa en G tiene un radio de giro de 295 mm respecto al centro de suspensión O. Si se suelta partiendo del reposo en $\theta = 0$, hallar la fuerza total que soporta el cojinete en el instante en que $\theta = 60°$. El rozamiento en el cojinete es despreciable.



Solución. Se presentan el diagrama para sólido libre del péndulo, en una posición cualquiera, y el correspondiente diagrama de las fuerzas resultantes donde las componentes de la fuerza resultante se han dibujado pasando por G.

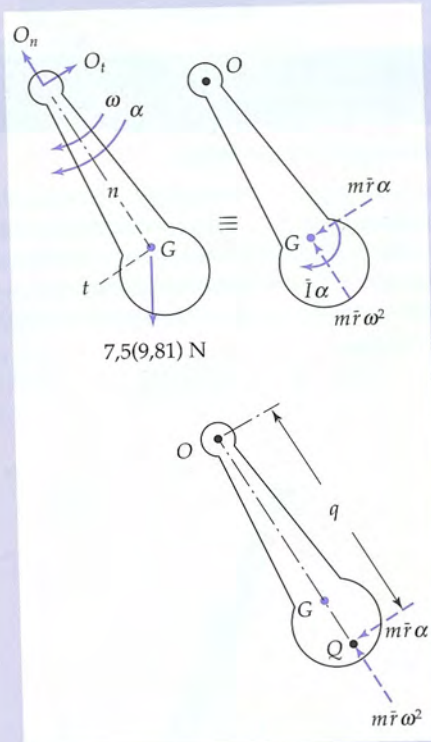
(1) La componente normal O_n se obtiene de una ecuación de fuerzas en la dirección n, ecuación en la que interviene la aceleración normal $\bar{r}\omega^2$. Como la velocidad angular ω del péndulo se halla a partir de la integral de la aceleración y como O_t depende de la aceleración tangencial $\bar{r}\alpha$, se deduce que deberá obtenerse primeramente α. A tal fin, la ecuación de momentos respecto a O da

(2) $$[\Sigma M_O = I_O\alpha] \qquad 7{,}5(9{,}81)(0{,}25)\cos\theta = (0{,}295)^2(7{,}5)\alpha$$
$$\alpha = 28{,}2\cos\theta\ \text{rad/s}^2$$

y para $\theta = 60°$

$$[\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta] \qquad \int_0^\omega \omega\, d\omega = \int_0^{\pi/3} 28{,}2\cos\theta\, d\theta$$
$$\omega^2 = 48{,}8\ (\text{rad/s})^2$$

(1) **Las componentes de la aceleración de G son, por supuesto, $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$ y $\bar{a}_t = \bar{r}\alpha$.**



(2) **Repasar otra vez la teoría hasta convencerse bien de que $\Sigma M_O = I_O\alpha = \bar{I}\alpha + m\bar{r}^2\alpha = m\bar{r}\alpha q$**

http://gratislibrospdf.com/

Las dos restantes ecuaciones del movimiento aplicadas a la posición $\theta = 60°$ dan

$$[\Sigma F_n = m\bar{r}\omega^2] \qquad O_n - 7{,}5(9{,}81)\ \text{sen}\ 60° = 7{,}5(0{,}25)(48{,}8)$$

$$O_n = 155{,}2\ \text{N}$$

$$[\Sigma F_t = m\bar{r}\alpha] \qquad -O_t + 7{,}5(9{,}81)\cos 60° = 7{,}5(0{,}25)(28{,}2)\cos 60°$$

$$O_t = 10{,}37\ \text{N}$$

$$O = \sqrt{(155{,}2)^2 + (10{,}37)^2} = 155{,}6\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

③ Aquí se observará en particular que los sumatorios de las fuerzas se toman en los sentidos positivos de las componentes de la aceleración del centro de masa G.

El sentido adecuado de O_t puede observarse desde un principio aplicando la otra ecuación de momentos $\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$, donde el momento respecto a G debido a O_t debe tener sentido horario para que concuerde con α. La fuerza O_t podría también haberse obtenido inicialmente tomando momentos respecto a Q, con lo que se habría evitado la necesidad de calcular α. Primero debe obtenerse la distancia q, que es

$$[q = k_O^2/\bar{r}] \qquad q = \frac{(0{,}295)^2}{0{,}250} = 0{,}348\ \text{m}$$

$$[\Sigma M_Q = 0] \qquad O_t(0{,}348) - 7{,}5(9{,}81)(\cos 60°)(0{,}348 - 0{,}250) = 0$$

$$O_t = 10{,}37\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

6.35 La viga uniforme de 100 kg está articulada libremente en su extremo superior A e incialmente se halla en reposo en la posición vertical con $\theta = 0$. Hallar su aceleración angular inicial α y la fuerza F_A que soporta el pasador en A a consecuencia de la aplicación repentina de una fuerza $P = 300$ N en el cable unido a la viga.

Resp. $\alpha = 1{,}193\ \text{rad/s}^2$, $F_A = 769$ N

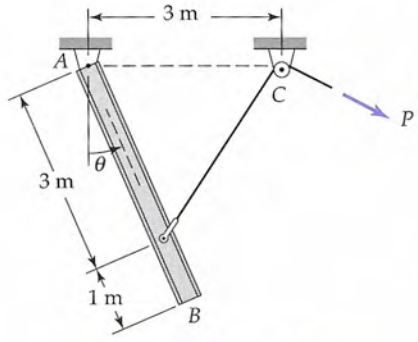


Figura problema 6.35

6.36 La barra delgada uniforme de 20 kg está suspendida en O y oscila libremente en el plano vertical. Si se suelta desde el reposo en posición horizontal, calcular el valor inicial de la fuerza R que le ejerce el cojinete un instante después de iniciarse el movimiento.

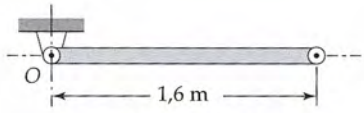


Figura problema 6.36

6.37 Cada uno de los tornos con su cubo respectivo tiene una masa de 250 kg y un radio de giro respecto a su eje de 375 mm. Calcular la aceleración angular de cada uno. Se desprecia el rozamiento en los cojinetes.

Resp. $\alpha_a = 3{,}20\ \text{rad/s}^2$, $\alpha_b = 3{,}49\ \text{rad/s}^2$

6.38 Calcular la aceleración descendente a del cilindro de 10 kg. El tambor es un cilindro uniforme y el rozamiento en el eje es despreciable. Comparar el resultado con el que se obtiene ignorando el efecto de la inercia del tambor.

http://gratislibrospdf.com/

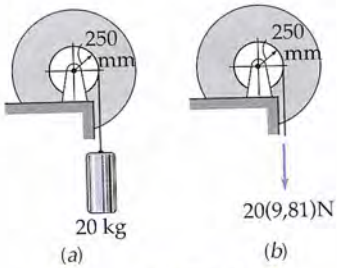


Figura problema 6.37

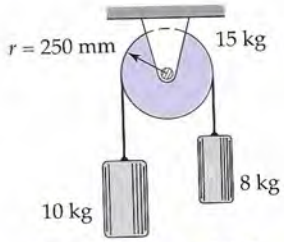


Figura problema 6.38

6.39 Si el momento por rozamiento en el pivote O vale 2 m·N, hallar la aceleración angular del tambor con garganta, el cual tiene una masa de 8 kg y un radio de giro $k_O = 225$ mm.

Resp. $\alpha = 0{,}622$ rad/s^2 AH

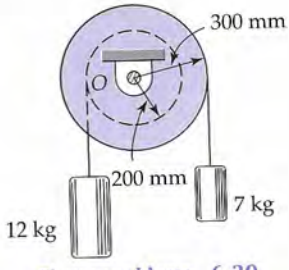


Figura problema 6.39

6.40 La barra delgada uniforme de masa 8 kg oscila en el plano vertical en torno al punto de suspensión A. Si $\dot{\theta} = 2$ rad/s cuando $\theta = 30°$, calcular la fuerza que soporta el pasador en A en ese instante.

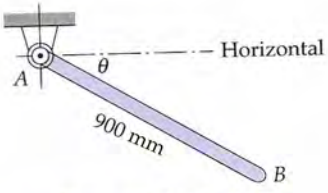


Figura problema 6.40

6.41 La barra delgada uniforme se suelta desde el reposo en la posición horizontal indicada. Hallar el valor de x para el que es máxima la aceleración angular y el correspondiente valor α de la misma.

Resp. $x = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$, $\alpha = \sqrt{3}\,\dfrac{g}{l}$

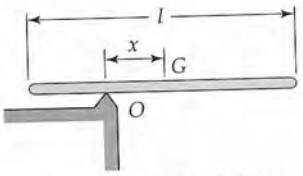


Figura problema 6.41

6.42 La losa rectangular uniforme se suelta estando en reposo en la posición indicada. Hallar el valor de x para el cual es máxima la aceleración angular y el valor de ésta. Comparar los resultados con los del problema anterior.

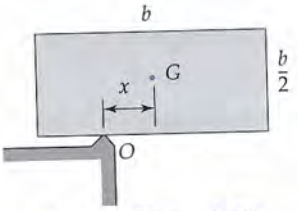


Figura problema 6.42

6.43 El bastidor cuadrado se compone de cuatro trozos iguales de varilla delgada uniforme y la esfera O está suspendida de un zócalo (no representado). A partir de la posición indicada, el conjunto recibe un giro de 45° en torno al eje A-A y se suelta. Hallar la aceleración angular inicial del bastidor. Repetir los cálculos para una rotación de 45° en torno al eje B-B. Despreciar la pequeña masa de la esfera, su descentrado y el rozamiento en ella.

Resp. $\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}\,\dfrac{g}{b}$, $\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{7}\,\dfrac{g}{b}$

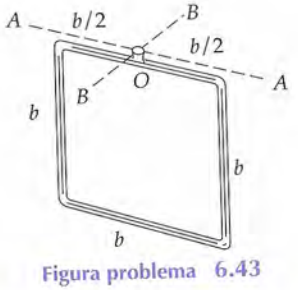


Figura problema 6.43

http://gratislibrospdf.com/

Problemas representativos

6.44 La barra está soldada a la plancha de contorno irregular en el centro de masa G de la misma. Demostrar que la aceleración angular que se origina cuando se corta la cuerda S es independiente de la orientación angular θ de la plancha respecto a la barra.

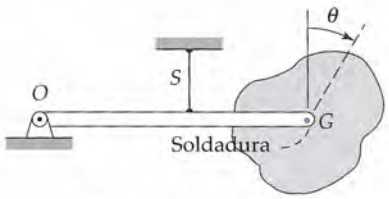


Figura problema 6.44

6.45 El dinamómetro de automoción es capaz de simular unas condiciones de aceleración en marcha de $0{,}6g$ para la camioneta cargada de 2,8 Mg de masa total. Calcular el momento de inercia que debe tener el tambor del dinamómetro respecto a su centro O suponiendo que gire libremente durante la fase de aceleración del ensayo.

Resp. $I_O = 2{,}27\ \text{Mg}\cdot\text{m}^2$

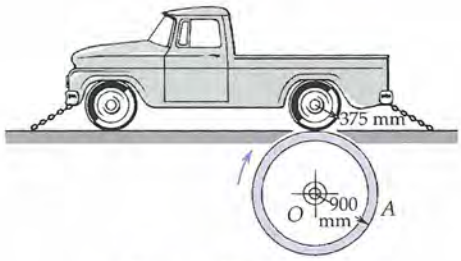


Figura problema 6.45

6.46 Para estudiar el movimiento elástico de modelos flexibles de ingenios espaciales se emplea una *mesa de aire*. En ésta, para generar un colchón de apoyo neumático que elimine prácticamente los rozamientos, se emplea aire a presión que mana de un gran número de orificios practicados en la superficie horizontal. El modelo representado se compone de un cubo cilíndrico de radio r y cuatro apéndices de longitud l y pequeño espesor t. El cubo y los cuatro apéndices tienen la misma altura d y están construidos del mismo material de densidad ρ. Suponiendo que el ingenio espacial sea rígido, calcular el momento M que debe aplicarse al cubo para hacer girar al modelo desde el reposo hasta una velocidad angular ω en un tiempo de τ segundos. (Téngase en cuenta que para un ingenio espacial de apéndices altamente flexibles, el momento hay que aplicarlo con prudencia al cubo rígido para evitar que los apéndices sufran grandes deformaciones elásticas indeseables.)

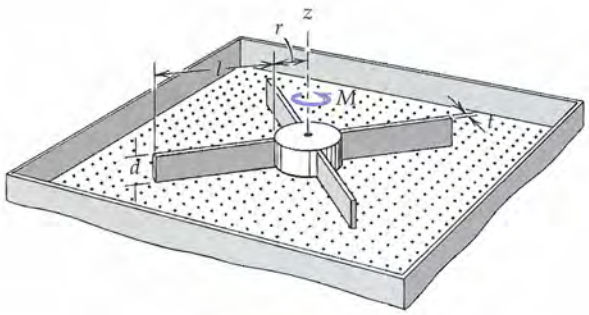


Figura problema 6.46

6.47 El anillo de radio medio r y dimensiones transversales pequeñas gira dentro de un plano horizontal a la velocidad angular constante ω alrededor de su centro O. Hallar la tensión T en el anillo. Encontrar la solución primero estudiando una mitad del anillo como cuerpo libre aislado y, después, estudiando un elemento diferencial de arco como cuerpo libre aislado.

Resp. $T = \rho r^2\omega^2$

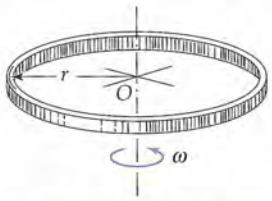


Figura problema 6.47

6.48 Cuando la barra delgada uniforme se encuentra en la posición vertical representada el resorte está sin comprimir. Hallar la aceleración angular inicial α de la barra cuando ésta se suelta desde el reposo en una posición en que la misma está girada 30° en sentido horario respecto a la posición de la figura. Se supone que el resorte es de masa despreciable y que no se comba.

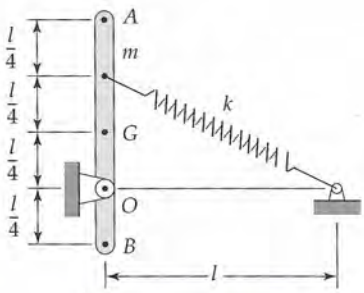


Figura problema 6.48

http://gratislibrospdf.com/

6.49 La barra A de masa m se curva en forma de arco cuarto-circular de radio r y está unida al cubo mediante las varillas livianas. Bajo la acción del resorte de torsión B oscila en torno al eje vertical. En el instante considerado la velocidad angular es ω y la aceleración angular es α. Escribir la expresión del momento M que ejerce el resorte sobre el cubo y la fuerza horizontal R que ejerce el eje sobre el cubo.

$$Resp.\ M = mr^2\alpha,\ R = \frac{2\sqrt{2}mr}{\pi}\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

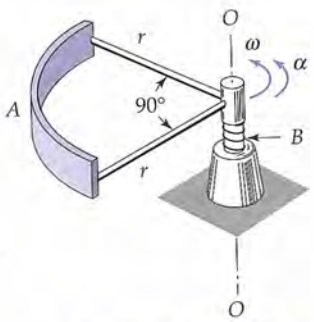


Figura problema 6.49

6.50 El aro estrecho de masa m puede girar libremente en el plano vertical alrededor de O. Si se suelta estando en reposo en la posición $\theta = 0$, hallar las expresiones de las componentes n y t de la fuerza en O en función de θ.

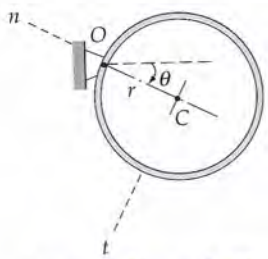


Figura problema 6.50

6.51 El disco semicircular de masa m y radio r se suelta desde el reposo en $\theta = 0$ y rota libremente en el plano vertical en torno del cojinete fijo en O. Deducir las expresiones en función de θ de las componentes n y t de la fuerza F actuante en el cojinete.

$$Resp.\ F_n = 1{,}721mg \operatorname{sen}\theta,$$
$$F_t = 0{,}640mg\cos\theta$$

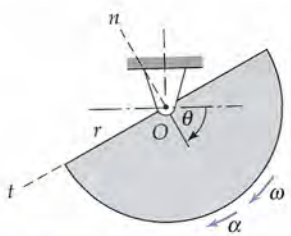


Figura problema 6.51

6.52 Una barra uniforme de masa m y longitud $2b$ está montada en una escuadra isósceles de masa despreciable. La barra y la escuadra giran en el plano vertical en torno a un eje fijo en O. Si la barra se suelta desde el reposo en la posición vertical ($\theta = 0$), deducir, en función de θ, una expresión para el módulo de la fuerza que el cojinete en O ejerce sobre la escuadra.

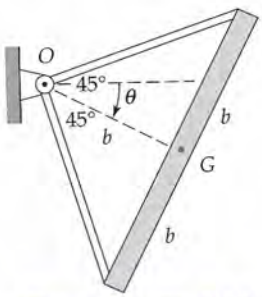


Figura problema 6.52

6.53 El radio de giro centroidal del engranaje A de 20 kg vale 150 mm. El radio de giro centroidal del engranaje B de 10 kg vale 100 mm. Calcular la aceleración angular del engranaje B cuando al eje del engranaje A se aplica un par de momento 12 m·N. Se desprecia el rozamiento.

$$Resp.\ \alpha_B = 25{,}5\ \text{rad/s}^2\ \text{AH}$$

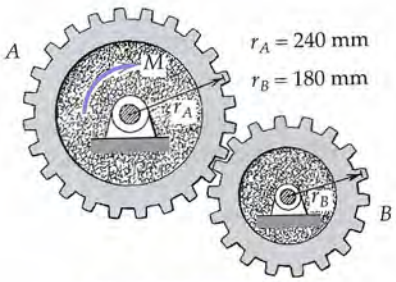


Figura problema 6.53

6.54 El rotor cilíndrico macizo B tiene una masa de 43 kg y esta montado sobre su eje geométrico C-C. El bastidor A gira en torno al eje fijo vertical O-O bajo la acción del par aplicado M = 30 m·N. El rotor puede destrabarse del bastidor retirando el pasador de trinca P. Calcular la aceleración angular α del bastidor A cuando (a) el pasador está colocado y (b) cuando no lo está. Se desprecian todos los rozamientos y la masa del bastidor.

http://gratislibrospdf.com/

Figura problema 6.54

6.55 Se ilustra la plataforma de descarga por rodadura de un camión de transporte de contenedores. El contenedor cargado de 120 Mg puede tratarse como un bloque rectangular macizo y homogéneo con centro de masa en G. Si la rueda de apoyo A está inmovilizada, calcular la fuerza F_B que ejerce la plataforma sobre la rueda de apoyo B cuando el camión arranca hacia adelante con una aceleración de 3 m/s^2. Se desprecia el rozamiento en B.

Resp. $F_B = 310$ kN

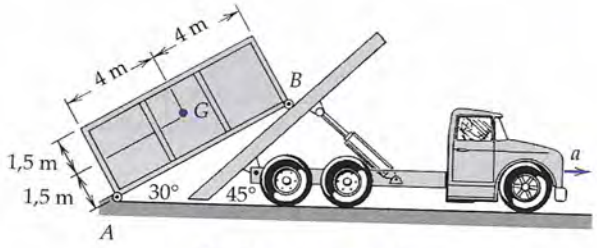


Figura problema 6.55

6.56 Un carrete de cable de transmisión eléctrica está montado sobre una carretilla, la cual se halla inmovilizada. En el carrete, de radio 375 mm, hay 60 m de cable de masa 0,65 kg por metro. En vacío, la masa del carrete es de 28 kg y su radio de giro respecto a su eje geométrico vale 300 mm. Para vencer la resistencia por rozamiento a la rotación hay que ejercer una tracción T de 90 N. Calcular la aceleración angular α del carrete si al extremo libre del cable se aplica una tracción de 180 N.

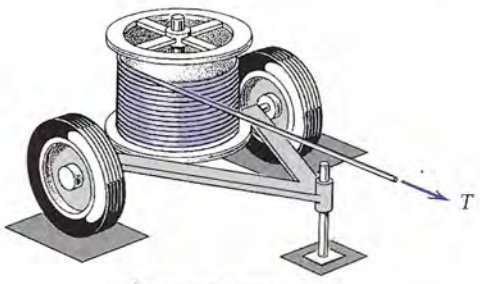


Figura problema 6.56

6.57 El panel rectangular uniforme está embisagrado en A y B a un eje fijo inclinado un ángulo β respecto al plano vertical y-z. Si el panel se suelta desde el reposo con sus bordes superior e inferior horizontales, hallar su aceleración angular inicial α.

Resp. $\alpha = \dfrac{3g}{2b} \operatorname{sen} \beta$

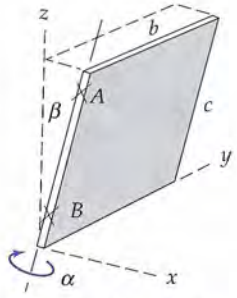


Figura problema 6.57

6.58 En la lanzadera espacial, la carga útil que transporta está instalada en un soporte con cardan que la despliega al abrirse las compuertas del compartimiento de carga durante el vuelo orbital. La carga útil puede asimilarse a un bloque rectangular homogéneo de 6000 kg de masa. Sobre el eje O-O de la articulación cardan actúa un par de momento 30 m·N producido por un motor de c.c. sin escobillas. Con el vehículo en ór-

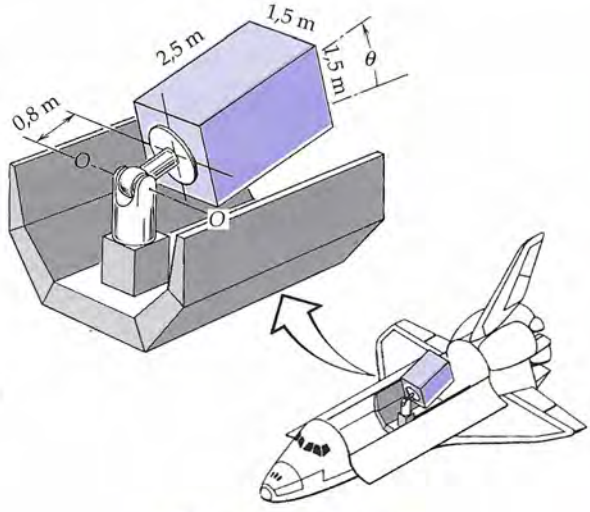


Figura problema 6.58

http://gratislibrospdf.com/

bita en estado de "ingravidez", hallar el tiempo t necesario para que la carga pase desde su posición de estiba, con $\theta = 0$, hasta la de despliegue, con $\theta = 90°$, si el par se aplica durante los primeros 45° y luego se invierte durante los 45° hasta detener la carga ($\dot{\theta} = 0$).

6.59 Una máquina para ensayos de resiliencia consta de un péndulo de 34 kg con centro de masa en G y un radio de giro respecto a O de 620 mm. La distancia b se toma de modo que la fuerza actuante sobre el cojinete O sea lo menor posible durante el choque con la probeta, que se coloca en el punto más bajo de la oscilación. Hallar b y el módulo de la fuerza total R actuante en el cojinete O un instante después de soltar el péndulo en la posición $\theta = 60°$.

Resp. $b = 40{,}7$ mm, $R = 167{,}8$ N

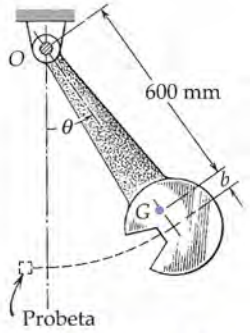


Figura problema 6.59

6.60 El mecanismo robótico se compone del pedestal estático OA, el brazo AB articulado en A y el brazo BC articulado en B. Los ejes de rotación son normales al plano de la figura. Calcular (*a*) el momento M_A a aplicar al brazo AB para hacerlo girar, en sentido horario, alrededor de la articulación A, a 4 rad/s^2 a partir de la posición indicada con la articulación B inmovilizada y (*b*) el momento M_B a aplicar al brazo BC para hacerlo girar con la misma aceleración alrededor de la articulación B estando la A inmovilizada. Las masas de los brazos AB y BC son de 25 y 5 kg, respectivamente, de las que se excluyen la de la parte estática de la articulación A por completo, y la de la articulación B repartida a partes iguales entre los dos brazos. Se supone que los centros de masa G_1 y G_2 se hallan en los centros geométricos de los brazos y éstos se asimilan a varillas delgadas.

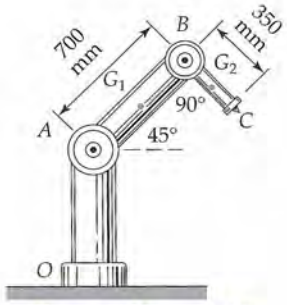


Figura problema 6.60

6.61 El poste uniforme de 24 m tiene una masa de 300 kg y está articulado por su extremo inferior al soporte fijo O. Si el torno C desarrolla un par de 1300 m·N en el arranque, calcular la fuerza total que soporta el pasador en O cuando el poste comienza a separarse de su apoyo B. Determinar también la correspondiente aceleración angular α del poste. En A el cable está horizontal y se desprecian las masas de las poleas y el torno.

Resp. $\alpha = 0{,}071$ rads^2, $O = 5260$ N

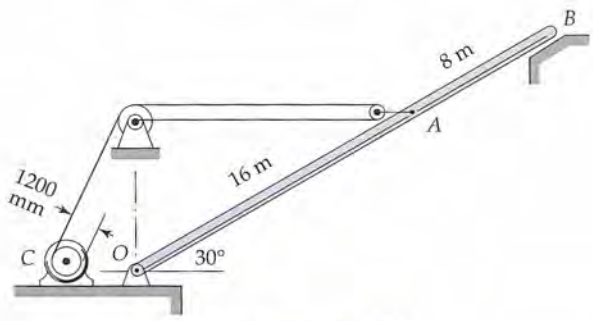


Figura problema 6.61

6.62 El cilindro de 12 kg montado en los soportes con cojinetes en A y B posee un momento de inercia de 0,080 kg·m^2 respecto al eje vertical z_O que pasa por su centro de masa G. El disco y los soportes tienen un momento de inercia de 0,60 kg·m^2 respecto al eje vertical de rotación z. Si al disco se aplica un par de momento $M = 16$ m·N a través de su árbol y estando inicialmente en reposo, calcular las componentes horizontales x de las fuerzas que soportan los cojinetes A y B.

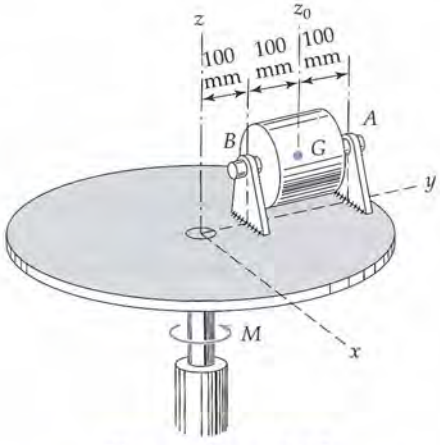


Figura problema 6.62

http://gratislibrospdf.com/

6.63 Las barras esbeltas uniformes OA y BC tienen una masa de 8 kg cada una. Las barras están soldadas en A formando un miembro en T y giran libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por O. Si las barras tienen una velocidad angular ω de 4 rad/s cuando OA pasa por la posición horizontal indicada, calcular la fuerza total R que soporta el cojinete O.

Resp. $R = 101{,}3$ N

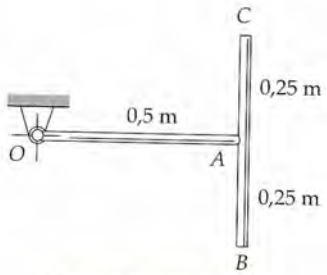


Figura problema 6.63

6.64 El cilindro macizo homogéneo tiene una masa de 100 kg y está montado en un árbol acodado en ángulo recto que gira libremente en torno al eje horizontal O-O. Si el cilindro se abandona desde el reposo con su eje geométrico en el plano horizontal, calcular la aceleración angular inicial del conjunto y la fuerza resultante F que el cojinete A ejerce sobre el árbol. La masa de éste es despreciable.

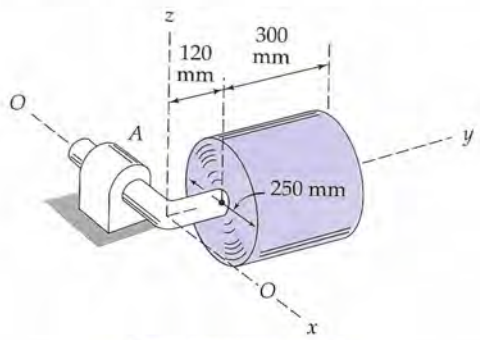


Figura problema 6.64

6.65 La barra semicircular uniforme de masa m y radio r gira libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por A. Si la barra parte del reposo en la posición representada, donde AB es horizontal, hallar la aceleración angular α de la barra y la expresión de la fuerza ejercida sobre la barra por el pasador en A. (Obsérvese que la aceleración tangencial inicial del centro de masa no es vertical.)

Resp. $\alpha = \frac{g}{2r}$, $A = 0{,}593mg$

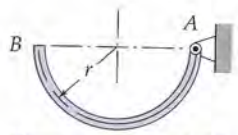


Figura problema 6.65

6.66 La placa doblada en ángulo recto está formada a partir de una placa plana de masa ρ por unidad de superficie y está soldada al árbol horizontal montado en el cojinete O. Si el árbol puede girar libremente, hallar la velocidad angular inicial α de la placa cuando ésta se suelta partiendo del reposo con su superficie superior en el plano horizontal. Hallar también las componentes y y z de la fuerza resultante que actúa en O sobre el árbol.

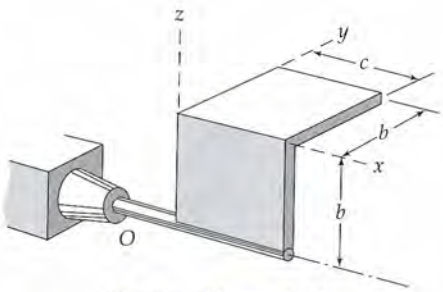


Figura problema 6.66

6.67 El carrete tiene arrollado un cable flexible de 60 m de longitud y una masa de 0,160 kg por metro de longitud. Con $y = 0$, el peso del cilindro de 4 kg se aprovecha para que el carrete se ponga en movimiento venciendo el rozamiento en los cojinetes. Hallar la aceleración descendente a, en metros por segundo al cuadrado, del cilindro en función de y (en metros). En vacío, el carrete tiene una masa de 16 kg con un radio de giro de 200 mm respecto a sus cojinetes.

Resp. $a = 0{,}0758y$

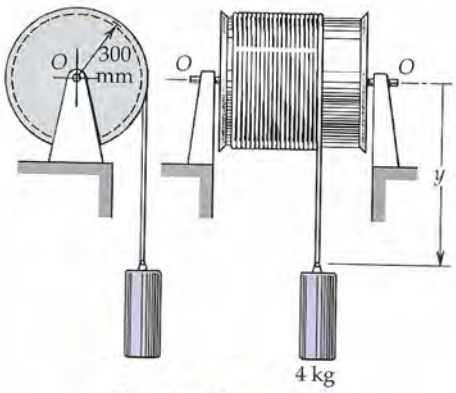
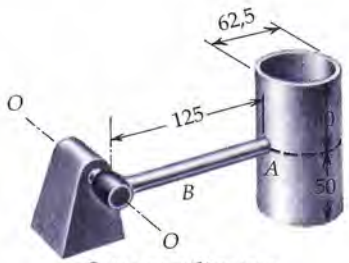


Figura problema 6.67

http://gratislibrospdf.com/

6.68 La biela B de 0,4 kg, con su centro de masa a 55 mm de O-O, tiene un radio de giro de 69 mm respecto a O-O. Está soldada al tubo de acero y puede rotar libremente en torno al árbol horizontal fijo sobre O-O. Si el tubo se suelta partiendo del reposo con la biela en posición horizontal, calcular la aceleración angular inicial α del conjunto y la correspondiente reacción O que el árbol ejerce sobre la biela.



Cotas en milímetros

Figura problema 6.68

6.69 Antes de extender sus dos brazos instrumentales AB, la nave espacial representada en la parte superior de la figura gira en torno a sí misma a la velocidad de una vuelta por segundo. Cada brazo instrumental, como el que se muestra en la ilustración inferior, tiene una masa de 100 kg con centro de masa en G. Calcular la tracción T que sufre cada cable de maniobra antes de soltarse. Hallar también la fuerza sobre el pasador A. Despreciar la aceleración del centro O de la nave.

Resp. $T = 987$ N, $A = 1{,}007$ kN

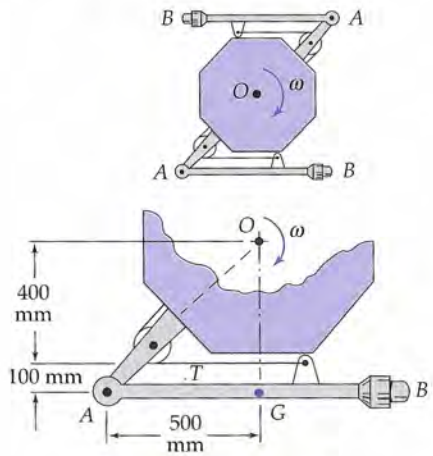


Figura problema 6.69

6.70 El disco B tiene una masa de 22 kg y un radio de giro centroidal de 200 mm. El grupo motor C se compone de un motor eléctrico M y un disco A, el cual es accionado a una velocidad angular constante de 1600 rpm. Entre ambos discos los coeficientes de rozamiento estático y cinético son, respectivamente, $\mu_e = 0{,}8$ y $\mu_c = 0{,}6$. El disco B se halla inicialmente inmóvil cuando entra en contacto con el disco A a consecuencia de la aplicación de la fuerza constante $P = 14$ N. Hallar la aceleración angular α de B y el tiempo t que tarda B en alcanzar su velocidad estacionaria.

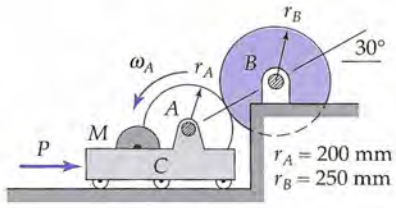


Figura problema 6.70

6.71 Dos barras esbeltas AB, de masa m y longitud l cada una, están articuladas en A a la placa. Ésta gira en el plano horizontal alrededor de un eje vertical fijo que pasa por su centro O y que recibe una aceleración angular constante α. (*a*) Hallar la fuerza F que sufre cada rodillo cuando el conjunto se pone en movimiento. (*b*) Hallar la fuerza total sobre el pasador A y demostrar que permanece constante mientras que $F > 0$. (*c*) Hallar la velocidad angular ω a la que cesa el contacto con los rodillos.

Resp. $(a) F = ml\alpha/6$

$(b) A = \frac{\sqrt{10}}{6} ml\alpha$

$(c) \omega = \sqrt{\alpha/3}$

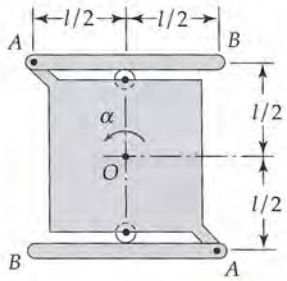


Figura problema 6.71

6.72 Una barra metálica uniforme de masa 0,60 kg por metro de longitud se curva recibiendo la forma representada en el plano vertical y pudiendo girar libremente en torno al eje horizontal en O perpendicular al plano. Si la barra se abandona

http://gratislibrospdf.com/

desde el reposo en la posición indicada, en la que la sección recta está horizontal, calcular las componentes iniciales x e y de la reacción **R** que soporta el cojinete en O.

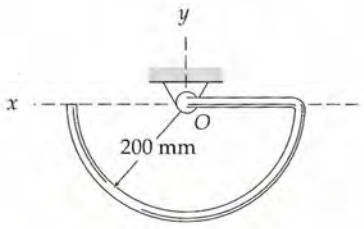


Figura problema 6.72

6.73 La barra curvada de masa m puede girar libremente en torno al eje O solidario al disco giratorio y se apoya sin rozamiento contra uno de los dos muñones lisos A y B fijos al disco. Si éste gira en torno a su eje vertical C, hallar la fuerza que ejerce el eje O sobre la barra y la reacción A o B de ésta (a) si el disco tiene una velocidad angular constante ω y (b) cuando el disco parte del reposo con aceleración angular α en sentido antihorario.

Resp. (a) $O = \dfrac{2mr\omega^2}{\pi}$, $A = \dfrac{2mr\omega^2}{\pi}$

(b) $O = mr\alpha\sqrt{1+\dfrac{4}{\pi^2}}$, $B = mr\alpha\left(1-\dfrac{2}{\pi}\right)$

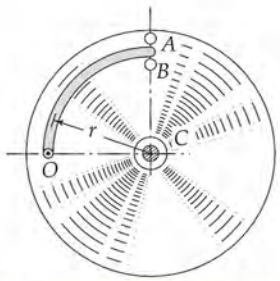


Figura problema 6.73

6.74 La viga en doble T tiene una masa de 900 kg y se mantiene en posición horizontal mediante la articulación O y el cable vertical que pasa por la polea A y alrededor del torno mecánico B de 200 kg. Si el motor del torno tiene un par útil de arranque de 800 m·N, calcular la fuerza vertical inicial que soporta el pasador de O. Tratar la viga como una barra esbelta y el conjunto del torno como una masa puntual concentrada en el centro de la polea. ¿Es nula la componente horizontal de la fuerza sobre el pasador?

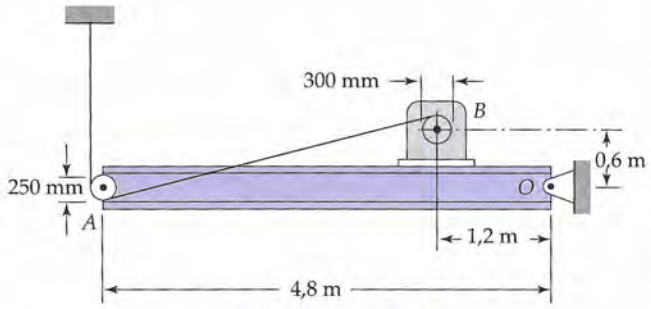


Figura problema 6.74

6.75 La barra esbelta uniforme de masa m y longitud l se abandona desde el reposo, cuando está vertical, de manera que gira sobre su extremo en torno a la esquina O. (a) Si se observa que resbala cuando $\theta = 30°$, hallar el coeficiente de rozamiento estático μ_e entre la barra y la esquina. (b) Si el extremo de la barra se entalla de modo que no pueda resbalar, hallar para qué ángulo θ cesa su contacto con la esquina.

Resp. (a) $\mu_e = 0{,}188$, (b) $\theta = 53{,}1°$

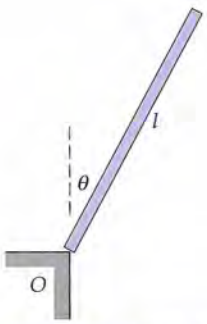


Figura problema 6.75

6.76 La viga esbelta de 3 m tiene una masa de 50 kg y se suelta desde el reposo en posición horizontal con $\theta = 0$. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el apoyo fijo en O y la viga vale 0,30, hallar el ángulo θ para el que se produce deslizamiento en O. ¿Depende el resultado de la masa de la viga?

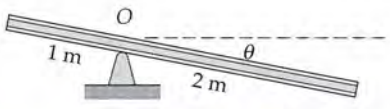


Figura problema 6.76

http://gratislibrospdf.com/

6.5 MOVIMIENTO PLANO GENERAL

En la dinámica del movimiento plano general de un cuerpo rígido se combinan la traslación y la rotación. En la figura 6.4 se representó, en relación con el apartado 6.2, un cuerpo rígido con su diagrama para sólido rígido y su diagrama cinético, en el que se indicaban las resultantes dinámicas de las fuerzas aplicadas. Aquella figura se repite aquí por comodidad, así como las ecuaciones 6.1 aplicables ahora al movimiento plano general:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \qquad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \qquad [6.1]$$

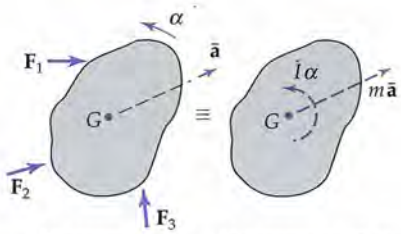


Diagrama para sólido libre — Diagrama cinético

Figura 6.4

Como antes, las dos componentes escalares de la ecuación se expresan en aquel sistema de coordenadas que mejor describa la aceleración del centro de masa. La aplicación directa de estas ecuaciones expresa la equivalencia entre las fuerzas externamente aplicadas, que figuran en el diagrama para sólido libre, y su fuerza y momento resultantes, que se representan en el diagrama cinético.

En el apartado 6.2 vimos asimismo, en relación con la figura 6.5, que si se toma un centro de momentos distinto del centro de masa, tal como un punto P, la ecuación del momento resultante adquiere la forma 6.2. Por comodidad se repiten aquí la ecuación 6.2 y la figura 6.5:

$$\Sigma M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \qquad [6.2]$$

En ocasiones puede resultar más práctico emplear la ecuación de momentos en su forma 6.3, si se toman momentos respecto a un punto P cuya aceleración se conozca. Recordemos también que la ecuación de momentos respecto a un punto O no acelerado del cuerpo (ec. 6.4) constituye otra posibilidad y que, a veces, puede ser ventajoso utilizarla.

Al acometer la resolución de un problema de movimiento plano general, lo primero a observar es si se trata de un movimiento libre o de un movimiento vinculado, tal como se ilustró en la figura 6.6. Si el movimiento es vinculado, hemos de tener en cuenta la relación cinemática entre las aceleraciones lineal y angular e incorporarla a las ecuaciones de fuerzas y momentos del movimiento. Si el movimiento es libre, las aceleraciones pueden determinarse independientemente unas de otras aplicando directamente las tres ecuaciones 6.1 del movimiento.

Queremos hacer hincapié en lo importante que es elegir claramente el cuerpo a aislar y la representación de ese aislamiento mediante un diagrama para sólido libre correcto. Tan sólo después de este paso crucial puede evaluarse adecuadamente la equivalencia entre las fuerzas exteriores y sus resultantes. De igual importancia en el movimiento plano es la comprensión clara de la cinemática del sistema. Muy a menudo, las dificultades que en este punto se les presentan a los principiantes se deben a la cinemática y será aquí de gran utilidad un repaso a fondo de las relaciones de la aceleración relativa para el movimiento plano. Al formular la solución de un problema hay que darse cuenta de que al inicio pueden no saberse las direcciones de ciertas fuerzas y aceleraciones, por lo que acaso haya que formular hipótesis iniciales cuya validez será confirmada o anulada al llevar a cabo la resolución. Sin embargo, es necesario

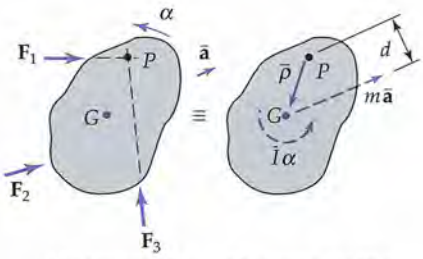


Diagrama para sólido libre — Diagrama cinético

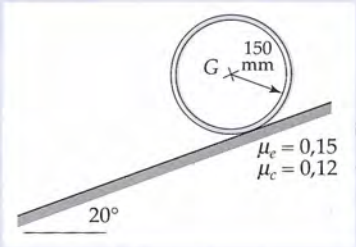
Figura 6.5

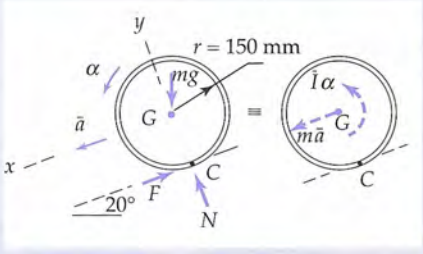
http://gratislibrospdf.com/

que todas las hipótesis que se hagan sean compatibles con el principio de igualdad entre acción y reacción y con todos los requisitos cinemáticos, también conocidos como condiciones de vinculación o de ligadura. Así, si una rueda está rodando por una superficie horizontal, su centro estará obligado a moverse siguiendo una recta horizontal. Es más, si la aceleración lineal desconocida a del centro de la rueda se supone positiva hacia la derecha, la aceleración angular conocida α deberá ser positiva en el sentido horario para que $a = +r\alpha$, suponiendo que la rueda no se deslice. Además, debe notarse que en el caso de una rueda que ruede sin deslizamiento, $a \neq r\alpha$, pero la fuerza F de rozamiento estático entre la rueda y su superficie de apoyo suele ser *menor* que su valor máximo, por lo que $F \neq \mu_e N$. Pero si la rueda se desliza al rodar, es $a \neq r\alpha$, y aparece un rozamiento cinético dado por $F = \mu_c N$. En un problema dado podrá ser necesario comprobar la validez de una u otra hipótesis. A veces se ignora la diferencia entre los coeficientes de rozamiento estático y cinético, μ_e y μ_c, en cuyo caso, para representar a uno u otro coeficiente, o a ambos, se emplea el símbolo μ.

PROBLEMA TIPO 6.5

Sobre el plano inclinado 20° se abandona desde el reposo el aro metálico de radio $r = 150$ mm. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético son $\mu_e = 0{,}15$ y $\mu_c = 0{,}12$, hallar la aceleración angular α del aro y el tiempo t que tarda en descender una distancia de 3 m a lo largo del plano.





Solución. En el diagrama para sólido libre se muestran el peso no especificado mg, la fuerza normal N y la de rozamiento F, actuantes las dos en el punto de contacto C con el plano inclinado. En el diagrama cinético se muestran la fuerza resultante $m\bar{a}$, aplicada en el punto G y en la dirección de la aceleración del mismo, y el par $\bar{I}\alpha$. La aceleración angular, al ser antihoraria, requiere que el momento respecto a G lo sea también, por lo que F está dirigida plano arriba.

Se supone que el aro no se desliza y, entonces, $\bar{a} = r\alpha$. Aplicando las ecuaciones 6.1, para los ejes x-y indicados, resulta

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad mg \operatorname{sen} 20^\circ - F = m\bar{a}$$

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y = 0] \qquad N - mg \cos 20^\circ = 0$$

$$[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha] \qquad Fr = mr^2\alpha \quad (1)$$

Eliminando F entre las ecuaciones primera y segunda e introduciendo la hipótesis cinemática $\bar{a} = r\alpha$ se obtiene

$$\bar{a} = \frac{g}{2} \operatorname{sen} 20^\circ = \frac{9{,}81}{2}(0{,}3420) = 1{,}678 \text{ m/s}^2 \quad (2)$$

(1) Como toda la masa del aro está a una distancia r de su centro G, su momento de inercia respecto a G debe ser mr^2.

(2) Obsérvese que $\bar{a}$ es independiente tanto de m como de r.

http://gratislibrospdf.com/

Otra posibilidad es tomar C como centro de momentos y, con la hipótesis de $\bar{a} = r\alpha$ para rodadura pura, la ecuación 6.2 dará directamente $\bar{a}$; o sea,

$$[\Sigma M_C = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d] \qquad mgr \operatorname{sen} 20^\circ = mr^2 \frac{\bar{a}}{r} + m\bar{a}r \qquad \bar{a} = \frac{g}{2} \operatorname{sen} 20^\circ$$

Para verificar la validez de la hipótesis de la ausencia de deslizamiento, calculamos F y N y comparamos F con su valor límite. De las ecuaciones anteriores

$$F = mg \operatorname{sen} 20^\circ - m\frac{g}{2} \operatorname{sen} 20^\circ = 0{,}1710mg$$

$$N = mg \cos 20^\circ = 0{,}9397mg$$

Pero la fuerza de rozamiento máxima posible es

$$[F_{\max} = \mu_e N] \qquad F_{\max} = 0{,}15(0{,}9397mg) = 0{,}1410mg$$

Como el valor calculado de $0{,}1710mg$ excede al valor límite de $0{,}1410mg$, resulta que la hipótesis de rodadura pura es incorrecta. Por tanto, el aro se desliza al rodar y $\bar{a} \neq r\alpha$. Entonces, la fuerza de rozamiento tiene su valor cinético

$$[F = \mu_c N] \qquad F = 0{,}12(0{,}9397mg) = 0{,}1128mg$$

Las ecuaciones del movimiento dan ahora

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad mg \operatorname{sen} 20^\circ - 0{,}1128mg = m\bar{a}$$

$$\bar{a} = 0{,}229(9{,}81) = 2{,}25 \text{ m/s}^2$$

$$[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha] \qquad 0{,}1128mg(r) = mr^2\alpha$$

③ Obsérvese que α es independiente de m pero no de r.

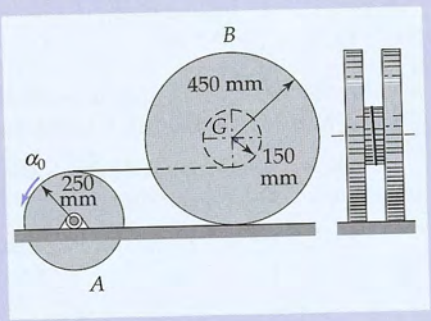
$$\alpha = \frac{0{,}1128(9{,}81)}{0{,}150} = 7{,}37 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

El tiempo que tarda el centro G del aro en recorrer 3 m desde el reposo bajo aceleración constante es

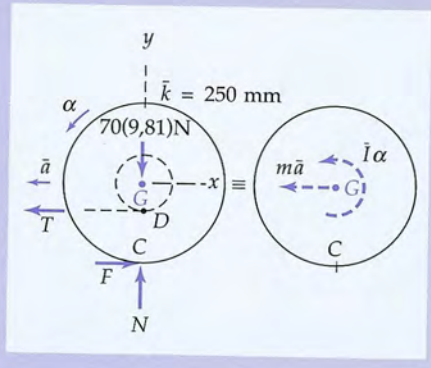
$$[x = \tfrac{1}{2}at^2] \qquad t = \sqrt{\frac{2x}{\bar{a}}} = \frac{\sqrt{2(3)}}{2{,}25} = 1{,}633 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 6.6

El tambor A recibe una aceleración angular constante α_0 de 3 rad/s² y mediante un cable fuertemente arrollado a la garganta del carrete B de 70 kg hace que éste ruede por la superficie horizontal. El radio de giro $\bar{k}$ del carrete B respecto a su eje de revolución (que pasa por G) es 250 mm y el coeficiente de rozamiento estático entre el carrete y la superficie horizontal es 0,25. Hallar la tracción T que sufre el cable y la fuerza de rozamiento F ejercida por la superficie horizontal sobre el carrete.



http://gratislibrospdf.com/



Solución. Se representan los diagramas para sólido libre y cinético del carrete. En este problema el sentido correcto de la fuerza de rozamiento puede asignarse teniendo en cuenta que, según ambos diagramas, una aceleración angular antihoraria impone que la suma de momentos respecto a G (y también respecto a D) sea antihoraria. Un punto del tramo del cable de enlace tiene una aceleración $a_t = r\alpha = 0{,}25(3) = 0{,}75\ \text{m/s}^2$, que es también la componente horizontal de la aceleración del punto D del carrete. Supondremos inicialmente que éste rueda sin deslizamiento, en cuyo caso tendrá una aceleración angular antihoraria
(1) $\alpha = (a_D)_x/\overline{DC} = 0{,}75/0{,}30 = 2{,}5\ \text{rad/s}^2$. La aceleración del centro de masa G es, por tanto, $\bar{a} = r\alpha = 0{,}45(2{,}5) = 1{,}125\ \text{m/s}^2$.

Conocida ya la cinemática, podemos aplicar ahora las tres ecuaciones 6.1 del movimiento

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad F - T = 70(-1{,}125) \tag{a}$$

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y] \qquad N - 70(9{,}81) = 0 \qquad N = 687\ \text{N}$$

(2) $$[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha] \qquad F(0{,}450) - T(0{,}150) = 70(0{,}250)^2(2{,}5) \tag{b}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (a) y (b) se obtiene

$$F = 75{,}8\ \text{N} \qquad \text{y} \qquad T = 154{,}6\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

Para establecer la validez de la hipótesis de ausencia de rozamiento, veamos que las superficies son capaces de soportar una fuerza de rozamiento máxima $F_{\max} = \mu_e N = 0{,}25(687) = 171{,}7$ N. Como para mantener la rodadura pura basta con una fuerza de 75,8 N, la conclusión es que la hipótesis de rodadura sin deslizamiento es válida.

Si el coeficiente de rozamiento estático hubiese sido, por ejemplo, 0,1 la fuerza de rozamiento hubiese estado limitada a $0{,}1(687) = 68{,}7$ N, que es menor que 78,5 N, y el carrete hubiese deslizado. En este caso la relación cinemática $\bar{a} = r\alpha$ ya no sería válida. Conocida $(a_D)_x$, la aceleración angular sería $\alpha =$
(3) $[\bar{a} - (a_D)_x]/\overline{GD}$. Empleando esta relación junto con $F = \mu_c N < 68{,}7\ N$, volveríamos a resolver las tres ecuaciones del movimiento en las incógnitas T, $\bar{a}$ y α.

Existe la posibilidad de tomar C como centro de momentos y obtener T directamente mediante la ecuación 6.2. En tal caso,

$$[\Sigma M_C = \bar{I}\alpha + m\bar{a}r] \qquad 0{,}3T = 70(0{,}25)^2(2{,}5) + 70(1{,}125)(0{,}45)$$

$$T = 154{,}6\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

donde se ha incorporado la condición cinemática de no deslizamiento $\bar{a} = r\alpha$.
(4) Podríamos asimismo escribir una ecuación de momentos respecto a D y obtener F directamente.

(1) La relación entre r y α es la condición cinemática que representa la limitación al movimiento impuesta por la hipótesis de que el carrete rueda sin deslizamiento.

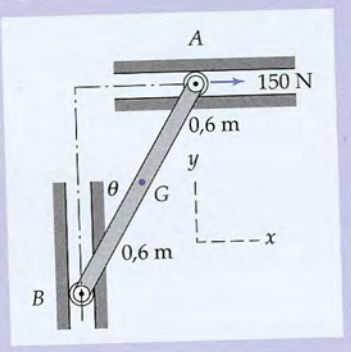
(2) Debe eludirse el error de emplear $\frac{1}{2}mr^2$ para $\bar{I}$ del carrete, ya que no se trata de un disco circular uniforme.

(3) Aquí son imprescindibles las fórmulas de la aceleración relativa. Por ello debe reconocerse la relación $(a_{G/D})_t = \overline{GD}\,\alpha$.

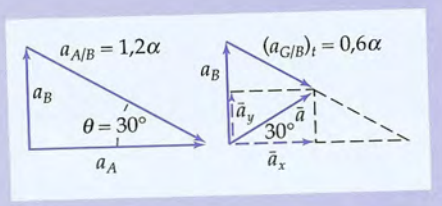
(4) La flexibilidad en la elección de los centros de momentos que proporciona el diagrama cinético puede habitualmente aprovecharse para simplificar el análisis.

http://gratislibrospdf.com/

La barra esbelta AB de masa 30 kg se mueve en el plano vertical estando sus extremos obligados a deslizarse por las guías horizontal y vertical lisas. Si la fuerza de 150 N se aplica al extremo A cuando la barra está inicialmente en reposo, en la posición $\theta = 30°$, calcular la aceleración angular resultante de la barra y la fuerza actuante sobre los pequeños rodillos A y B.



Solución. La barra ejecuta un movimiento vinculado, por lo que debemos establecer la relación entre la aceleración del centro de masa y la aceleración angular. Primero debe resolverse la ecuación de la aceleración relativa $\mathbf{a} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$ y a continuación se resuelve la ecuación $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{G/B}$ para obtener expresiones que relacionen $\bar{a}$ con α. Se han representado los correspondientes polígonos de aceleraciones, con α en su sentido horario real, cuyas soluciones dan

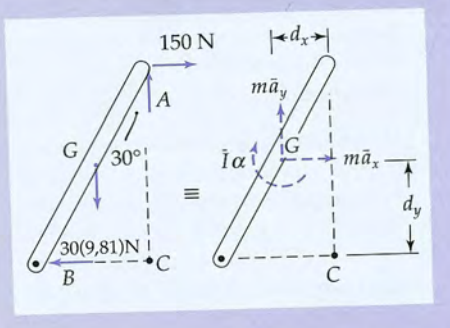


(1) **Si en este momento no se comprende perfectamente la aplicación de las ecuaciones de la aceleración relativa, deberá repasarse el apartado 5.6. Obsérvese que no aparece el término de la aceleración normal relativa, ya que la barra no tiene velocidad angular.**

$$\bar{a}_x = \bar{a}\cos 30° = 0{,}6\alpha \cos 30° = 0{,}520\alpha \text{ m/s}^2$$
$$\bar{a}_y = \bar{a}\,\text{sen}\,30° = 0{,}6\alpha\,\text{sen}\,30° = 0{,}3\alpha \text{ m/s}^2$$

Seguidamente construimos, tal como se muestra, los diagramas para sólido libre y cinético. Conocidas ahora $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_y$ en función de α, las incógnitas que quedan son α y las fuerzas A y B. La aplicación de las ecuaciones 6.1 nos da

(2) $$[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha]$$
$$150(0{,}6\cos 30°) - A(0{,}6\,\text{sen}\,30°) + B(0{,}6\cos 30°) = \frac{1}{12}30(1{,}2)^2\alpha$$
$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad 150 - B = 30(0{,}520\alpha)$$
$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y] \qquad A - 30(9{,}81) = 30(0{,}3\alpha)$$



(2) **Recuérdese que el momento de inercia de una barra esbelta respecto a su centro es $\frac{1}{12}ml^2$.**

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones se obtiene

$$A = 337 \text{ N} \qquad B = 76{,}8 \text{ N} \qquad \alpha = 4{,}69 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Existe la posibilidad de tomar C como centro de momentos y emplear la ecuación 6.2, con lo cual se evita la necesidad de resolver un sistema de tres ecuaciones. De este modo quedan automáticamente eliminadas dos de las incógnitas, A y B, lo que nos permite hallar α directamente. Es decir

(3) $$[\Sigma M_C = \bar{I}\alpha + \Sigma m\bar{a}d]$$
$$150(1{,}2\cos 30°) - 30(9{,}81)(0{,}6\,\text{sen}\,30°) = \frac{1}{12}30(1{,}2)^2\alpha$$
$$+ 30(0{,}520\alpha)(0{,}6\cos 30°) + 30(0{,}3\alpha)(0{,}6\,\text{sen}\,30°)$$
$$6{,}76 = 14{,}40\alpha \qquad \alpha = 4{,}69 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

(3) **Según el diagrama cinético, los términos Σmad son $m\bar{a}_x d_y + m\bar{a}_y d_x$. Como ambos son horarios, en el sentido de $\bar{I}\alpha$, son positivos.**

http://gratislibrospdf.com/

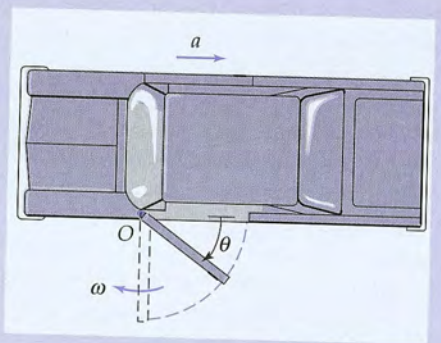
Conocida ya α podemos aplicar independientemente las ecuaciones de las fuerzas y obtener

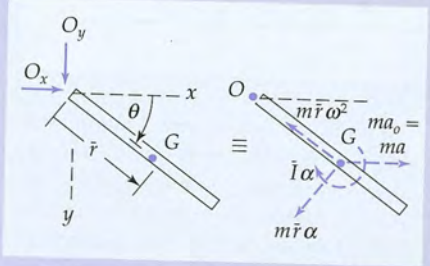
$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y] \qquad A - 30(9{,}81) = 30(0{,}3)(4{,}69) \qquad A = 337 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad 150 - B = 30(0{,}520)(4{,}69) \qquad B = 76{,}8 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 6.8

Inadvertidamente la puerta del automóvil ha quedado ligeramente abierta cuando se aplican los frenos para dar al vehículo una aceleración constante hacia atrás a. Deducir las expresiones de la velocidad angular ω de la puerta cuando ésta pasa por la posición $\theta = 90°$ y las componentes de la reacción en la bisagra para cualquier valor de θ. La masa de la puerta es m, su centro de masa está a una distancia $\bar{r}$ del eje de la bisagra O y el radio de giro respecto a O es k_O.





Solución. Como la velocidad angular ω aumenta con θ, es preciso hallar como varía con θ la aceleración angular α de forma que podamos integrar ésta en todo el intervalo para obtener ω. La aceleración α la podemos obtener de una ecuación de momentos respecto a O. Primero dibujamos el diagrama para sólido libre de la puerta en el plano horizontal en una posición genérica θ. En dicho plano las únicas fuerzas son las componentes de la reacción en la bisagra que aquí se representan en las direcciónes x e y. En el diagrama cinético, además del par resultante $\bar{I}\alpha$, que se representa en el mismo sentido que α, la fuerza resultante (1) $m\bar{\mathbf{a}}$ la representamos en términos de sus componentes empleando una ecuación de aceleraciones relativas respecto a O. Esta ecuación se convierte en la ecuación cinemática de ligadura y es

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_O + (\mathbf{a}_{G/O})_n + (\mathbf{a}_{G/O})_t$$

Los módulos de las componentes de $m\bar{\mathbf{a}}$ son, pues,

(2) $$ma_O = ma \qquad m(a_{G/O})_n = m\bar{r}\omega^2 \qquad m(a_{G/O})_t = m\bar{r}\alpha$$

donde $\omega = \dot{\theta}$ y $\alpha = \ddot{\theta}$.

Para un ángulo dado θ, las tres incógnitas son α, O_x y O_y. Podemos eliminar O_x y O_y mediante una ecuación de momentos respecto a O, lo que da

(3) $$[\Sigma M_O = \bar{I}\alpha + \Sigma m\bar{a}d] \qquad 0 = m(k_O^2 - \bar{r}^2)\alpha + m\bar{r}\alpha(\bar{r}) - ma(\bar{r} \text{ sen } \theta)$$

(4) Despejando α tenemos $$\alpha = \frac{a\bar{r}}{k_O^2} \text{ sen } \theta$$

(1) Se ha elegido el punto O porque es el único punto de la puerta cuya aceleración se conoce.

(2) Téngase cuidado en colocar $m\bar{r}\alpha$ en el sentido α positivo con relación al giro en torno a O.

(3) El diagrama para sólido libre muestra que el momento respecto a O es nulo. Aquí aplicamos el teorema de Steiner y hacemos la sustitución $k_O^2 = \bar{k}^2 + \bar{r}^2$. Si esta relación no resulta familiar, repasar el apartado B.1 del apéndice B.

(4) Podríamos también haber tomado O como centro de momentos y empleado la ecuación 6.3

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O\boldsymbol{\alpha} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\mathbf{a}_O$$

donde los valores escalares de los términos son $I_O\alpha = m\bar{k}_O^2\alpha$ y $\bar{\rho} \times ma_O$ se convierte en $-\bar{r}ma$ sen θ.

http://gratislibrospdf.com/

Primero integramos α hasta una posición genérica y obtenemos

$$[\omega\, d\theta = \alpha\, d\theta] \qquad \int_0^{\omega} \omega\, d\omega = \int_0^{\theta} \frac{a\bar{r}}{k_O^2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$\omega^2 = \frac{2a\bar{r}}{k_O^2}(1 - \cos\theta)$$

Para $\theta = \pi/2$, $\qquad \omega = \frac{1}{k_O}\sqrt{2a\bar{r}}$ *Resp.*

(5) Para hallar O_x y O_y para cualquier valor dado de θ, las ecuaciones de la fuerza dan

(5) **El diagrama de las fuerzas resultantes muestra claramente los términos que forman $m\bar{a}_x$ y $m\bar{a}_y$.**

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad O_x = ma - m\bar{r}\omega^2 \cos\theta - m\bar{r}\alpha \operatorname{sen}\theta$$

$$= m\left[a - \frac{2a\bar{r}^2}{k_O^2}(1 - \cos\theta)\cos\theta - \frac{a\bar{r}^2}{k_O^2}\operatorname{sen}^2\theta\right]$$

$$= ma\left[1 - \frac{\bar{r}^2}{k_O^2}(1 + 2\cos\theta - 3\cos^2\theta)\right] \qquad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y] \qquad O_y = m\bar{r}\alpha\cos\theta - m\bar{r}\omega^2 \operatorname{sen}\theta$$

$$= m\bar{r}\frac{a\bar{r}}{k_O^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - m\bar{r}\frac{2ar}{k_O^2}(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta$$

$$= \frac{ma\bar{r}^2}{k_O^2}(3\cos\theta - 2)\operatorname{sen}\theta \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

6.77 La placa cuadrada uniforme de masa m reposa sobre la superficie horizontal cuando en A se le aplica la fuerza P, tal como se muestra. Hallar la consiguiente aceleración inicial del punto B. Se desprecia el rozamiento.

Resp. $\mathbf{a}_B = \frac{P}{2m}(-3\mathbf{i} - \mathbf{j})$

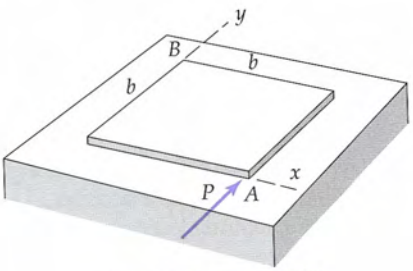


Figura problema 6.77

6.78 La barra acodada de masa m reposa sobre la superficie horizontal cuando en A se le aplica la fuerza P, tal como se muestra. Hallar la aceleración inicial del punto A. Se desprecia el rozamiento y las dimensiones transversales de la barra.

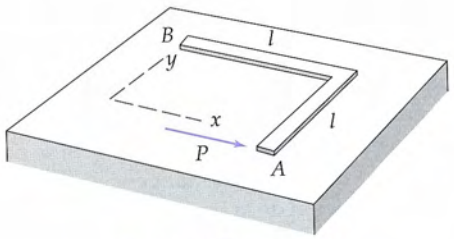


Figura problema 6.78

6.79 El radio de giro de la rueda de 30 kg es 150 mm. Si el rozamiento es suficiente para impedir el deslizamiento, calcular

http://gratislibrospdf.com/

la fuerza de rozamiento F que actúa sobre la rueda durante su rodada cuesta abajo. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento mínimo capaz de impedir el deslizamiento?

Resp. $F = 34{,}8$ N, $\mu_e = 0{,}128$

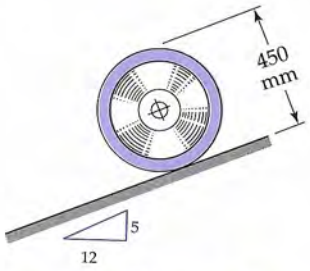


Figura problema 6.79

6.80 El disco macizo de 30 kg reposa inicialmente sobre la superficie horizontal cuando a la cuerda arrollada firmemente en su periferia se le aplica una fuerza P de 12 N, de módulo y dirección constantes. El disco descansa sobre un colchón de aire formado por chorros de aire que pasan por un gran número de orificios existentes en la superficie y, por tanto, se desliza sobre ésta prácticamente sin rozamiento. Calcular la velocidad angular ω del disco a los dos segundos de haberle aplicado la fuerza de 12 N y la velocidad v de su centro de masa tras haberse trasladado 1,2 metros a partir del reposo.

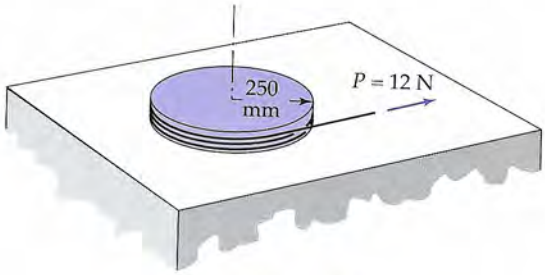


Figura problema 6.80

6.81 La cápsula espacial está girando en torno a su eje z con velocidad angular constante ω, mientras su centro de masa O se desplaza con velocidad v_0 en la dirección y. Si se proyecta un chorro de peróxido de hidrógeno tangencialmente cuando la cápsula está en la posición de la figura, hallar la aceleración absoluta de un punto A de la periferia de la cápsula, en el instante en que la fuerza del chorro es F. El radio de giro de la cápsula alrededor del eje z es k y su masa es m.

Resp. $\mathbf{a}_A = -\dfrac{Fr^2}{mk^2}\mathbf{i} - \left(\dfrac{F}{m} - r\omega^2\right)\mathbf{j}$

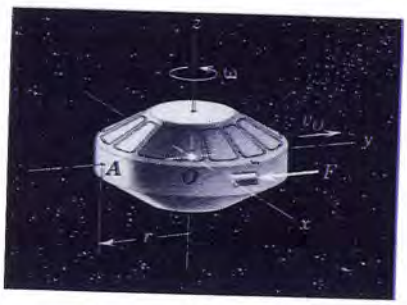


Figura problema 6.81

6.82 El cilindro macizo homogéneo se suelta desde el reposo sobre el plano inclinado. Si $\theta = 40°$, $\mu_e = 0{,}30$ y $\mu_c = 0{,}20$, hallar la aceleración del centro de masa G y la fuerza de rozamiento que el plano ejerce sobre el cilindro.

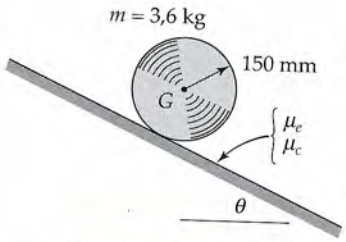


Figura problema 6.82

6.83 Repetir el problema 6.82 con los datos $\theta = 30°$, $\mu_e = 0{,}15$ y $\mu_c = 0{,}10$.

Resp. $a = 4{,}06$ m/s^2, $F = 3{,}06$ N

6.84 El disco de masa m y radio r se abandona en reposo siendo θ esencialmente cero y rueda sin deslizamiento por la guía circular de radio R. Hallar la expresión de la fuerza normal N entre el disco y la guía en función de θ y calcular el ángulo θ' para el que cesa el contacto entre ambos.

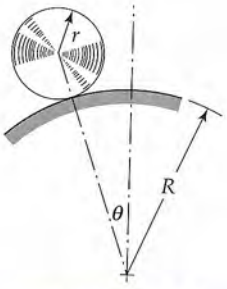


Figura problema 6.84

http://gratislibrospdf.com/

6.85 Por encima de la atmósfera terrestre y a una altura de 400 km, donde la aceleración de la gravedad es 8,69 m/s^2, un cohete posee una masa remanente de 300 kg y una orientación que forma 30° con la vertical. Si el empuje T de su motor es 4 kN y si la tobera está inclinada 1° tal como se muestra, calcular la aceleración angular α y las componentes x e y de la aceleración del centro de masa. El radio de giro centroidal del cohete vale 1,5 m.

Resp. $\alpha = 0{,}310$ rad/s^2
$\bar{a}_x = 6{,}87$ m/s^2
$\bar{a}_y = 2{,}74$ m/s^2

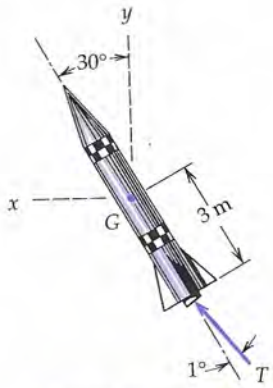


Figura problema **6.85**

Problemas representativos

6.86 ¿Cuál debe ser el radio r_0 de la garganta circular para que no actúe fuerza de rozamiento alguna entre la rueda y la superficie horizontal cualquiera que sea el valor de la fuerza P aplicada a la cuerda? El radio de giro centroidal de la rueda es $\bar{k}$.

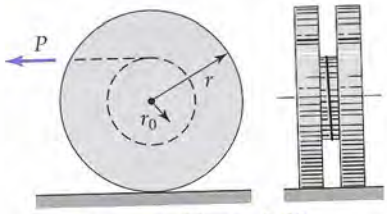


Figura problema **6.86**

6.87 El centro de masa G de la rueda de 10 kg está separado 10 mm del centro geométrico. Si G está en la posición indicada cuando la rueda pasa rodando sin deslizamiento por el fondo de la trayectoria circular de 1,2 m de radio a la velocidad angular ω de 10 rad/s, calcular la fuerza P ejercida por el suelo sobre la rueda. (Préstese atención a la utilización de la aceleración correcta del centro de masa.)

Resp. $P = 100{,}3$ N

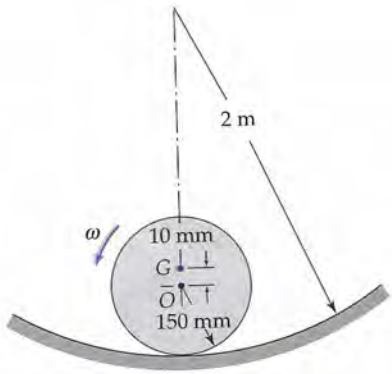


Figura problema **6.87**

6.88 La cáscara semicilíndrica uniforme de masa m y radio r se abandona desde el reposo en la posición representada con el borde inferior apoyado en la superficie horizontal. Hallar el coeficiente de rozamiento estático mínimo μ_e necesario para que la cáscara no se deslice inicialmente.

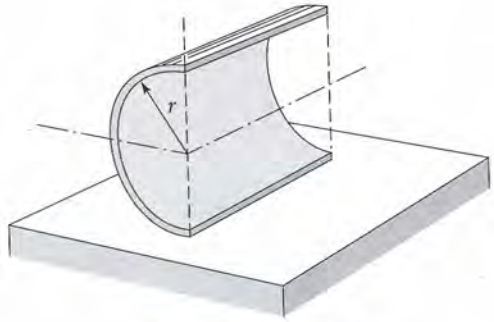


Figura problema **6.88**

6.89 Hallar la aceleración angular de cada una de las dos ruedas cuando van hacia abajo sin resbalar por los planos inclinados. Para la rueda A estudiar el caso en que la masa de la llanta y radios sea despreciable y la masa de la barra esté concentrada a lo largo de su eje. Para la rueda B suponer que el grosor de la llanta es despreciable comparado con su radio de modo que toda la masa esté concentrada en la llanta. Hallar también el coeficiente mínimo de rozamiento μ_e que evita el deslizamiento de cada rueda.

Resp. $\alpha_A = \frac{g}{r} \operatorname{sen} \theta$, $\mu_e = 0$

$\alpha_B = \frac{g}{2r} \operatorname{sen} \theta$, $\mu_e = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta$

http://gratislibrospdf.com/

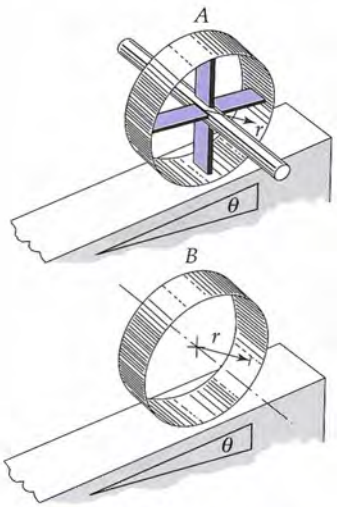


Figura problema 6.89

6.90 El disco de 200 mm de radio tiene una masa de 25 kg con un radio de giro centroidal $\bar{k} = 175$ mm y una acanaladura circular concéntrica de 75 mm de radio. Tal como se muestra, a una cuerda arrollada en la acanaladura se aplica una fuerza constante T bajo un ángulo θ. Si $T = 30$ N, $\theta = 0$, $\mu_e = 0{,}10$ y $\mu_c = 0{,}08$, hallar la aceleración angular α del disco, la aceleración a de su centro de masa G y la fuerza de rozamiento F que la superficie ejerce sobre el disco.

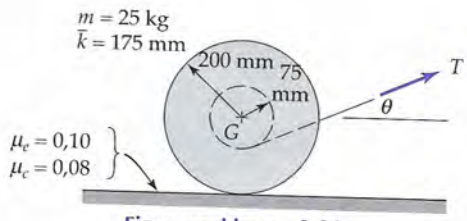


Figura problema 6.90

6.91 Repetir el problema 6.90, pero con $T = 50$ N y $\theta = 30°$.

Resp. $\alpha = 0{,}295$ rad/s^2 AH
$\alpha = 1{,}027$ m/s^2, hacia la derecha
$F = 17{,}62$ N

6.92 Repetir el problema 6.90, pero con $T = 30$ N y $\theta = 70°$.

6.93 Pequeños rodamientos de bolas montados en los extremos de la barra esbelta de masa m y longitud l vinculan el movimiento de la misma a las ranuras horizontales x e y. Si a la barra, inicialmente en reposo en $\theta = 45°$, se aplica un par de momento M, hallar las fuerzas que se ejercen sobre los rodamientos A y B cuando la barra empieza a moverse.

Resp. $\mathbf{A} = \dfrac{3M}{2\sqrt{2}l}\,\mathbf{i}$, $\mathbf{B} = -\dfrac{3M}{2\sqrt{2}l}\,\mathbf{j}$

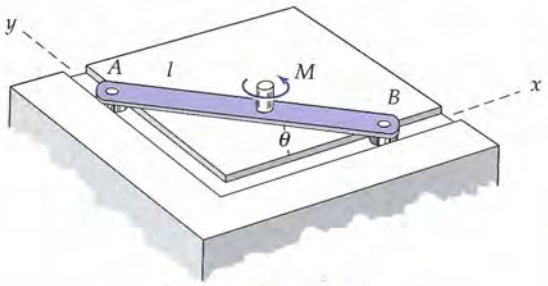


Figura problema 6.93

6.94 El extremo A de la barra uniforme de 5 kg está articulado al collarín cuya aceleración es $a = 4$ m/s^2 en la dirección del eje horizontal fijo. Si la barra está animada de una velocidad angular horaria $\omega = 2$ rad/s cuando pasa por la posición vertical, hallar las componentes de la fuerza que actúa sobre la barra en dicho instante.

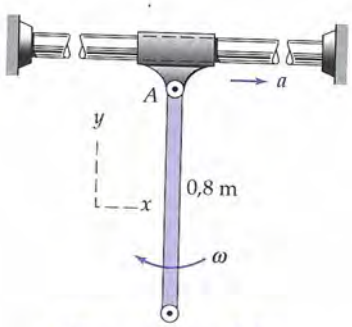


Figura problema 6.94

6.95 Durante una prueba, el automóvil describe un círculo horizontal de radio R y posee una aceleración tangencial hacia

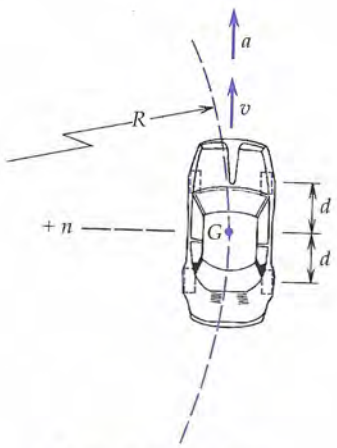


Figura problema 6.95

http://gratislibrospdf.com/

adelante a. Hallar las reacciones laterales en las parejas de ruedas delanteras y traseras si la celeridad del vehículo es (*a*) $v = 0$ y (*b*) $v \neq 0$. La masa del automóvil es m y su momento de inercia polar (respecto a un eje que pasa por G) es $\bar{I}$. Supóngase $R >> d$.

$$(a) R_d = \frac{\bar{I}a}{2dR}, \; R_t = -\frac{\bar{I}a}{2dR} \text{ (un par)}$$

Resp.

$$(b) R_d = \frac{mv^2d + \bar{I}a}{2Rd}, \; R_t = \frac{mv^2d - \bar{I}a}{2Rd}$$

6.96 La barra uniforme AB, de masa m, se mueve sobre los rodillos ligeros de sus extremos a lo largo de la horizontal, con celeridad v, cuando el extremo A pasa por el punto C y empieza a moverse por la porción curva del camino de radio r. Determinar la fuerza ejercida por el camino sobre el rodillo A inmediatamente después de que pase por C.

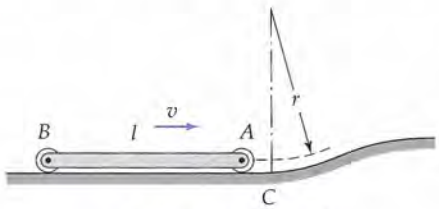


Figura problema 6.96

6.97 Al estudiar los efectos de las sacudidas producidas por los alcances (choques por detrás), la rotación brusca de la cabeza se modela mediante una esfera maciza homogénea de masa m y radio r articulada en un eje tangencial (el cuello). Si ese eje O recibe una aceleración constante a estando la cabeza inicialmente en reposo, hallar las expresiones de la velocidad angular inicial α de la cabeza y su velocidad angular inicial ω en función del ángulo de rotación θ. Se supone que el cuello está relajado, por lo que en O no hay ningún momento aplicado a la cabeza.

$$Resp. \; \alpha = \frac{5a}{7r}, \; \omega = \sqrt{\frac{10}{7r}}\sqrt{g(1 - \cos\theta) + a \operatorname{sen}\theta}$$

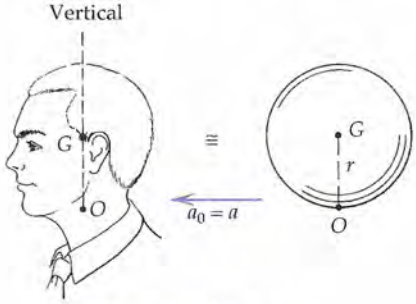


Figura problema 6.97

6.98 La viga uniforme de acero de masa m y longitud l cuelga de los cables amarrados en A y B. Si éste último se rompe repentinamente, hallar la tracción T que experimenta el otro inmediatamente después de la rotura. La viga puede tratarse como una barra esbelta y demostrar que el resultado es independiente de la longitud de la misma.

Figura problema 6.98

6.99 Hallar la fuerza horizontal máxima P que puede aplicarse al carro de masa M sin que la rueda se deslice al comenzar a rodar sobre el carro. La rueda tiene una masa m, un radio de rodadura r y un radio de giro $\bar{k}$. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre la rueda y el carro son, respectivamente, μ_e y μ_c.

$$Resp. \; P = \mu_e g\left[m + M\left(1 + \frac{r^2}{\bar{k}^2}\right)\right]$$

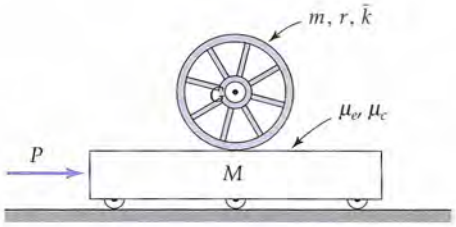


Figura problema 6.99

6.100 El cuadro homogéneo de 12 kg cuelga del punto C mediante los dos cables amarrados a A y B. Si éste último se rompe repentinamente, calcular la tracción T que experimenta el otro un instante después de la rotura.

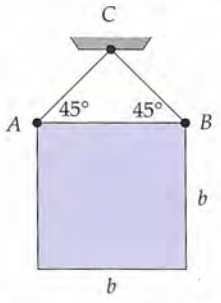


Figura problema 6.100

http://gratislibrospdf.com/

6.101 El péndulo compuesto de masa m y radio de giro k_O respecto a O está articulado libremente al carrito, que recibe una aceleración horizontal constante a partiendo del reposo con el péndulo inicialmente en reposo con $\theta = 0$. Hallar la expresión de la aceleración angular $\ddot{\theta}$ y las componentes n y t de la fuerza en O como funciones de θ. Calcular el valor máximo que alcanza θ si $a = 0{,}5g$.

Resp.
$$\ddot{\theta} = \frac{\bar{r}}{k_O^2}(a\cos\theta - g\,\text{sen}\,\theta)$$
$$O_t = m(g\,\text{sen}\,\theta - a\cos\theta)\left(1 - \frac{\bar{r}^2}{k_O^2}\right)$$
$$O_n = m\left[(g\cos\theta + a\,\text{sen}\,\theta)\left(1 + \frac{2\bar{r}^2}{k_O^2}\right) - 2g\frac{\bar{r}^2}{k_O^2}\right]$$
$$\theta_{\max} = 53{,}1^\circ$$

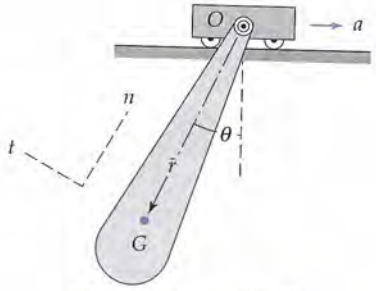


Figura problema **6.101**

6.102 El camión, inicialmente en reposo con un rollo macizo de papel en la posición indicada, se mueve hacia adelante con una aceleración constante a. Determinar la distancia s que recorre el camión antes de que el rollo ruede por el borde de la plataforma. El rozamiento es suficiente para que no haya deslizamiento.

Figura problema **6.102**

6.103 Se repite aquí el mecanismo robótico del problema 6.60. El miembro AB está girando en torno a la articulación A con una velocidad angular antihoraria de 2 rad/s^2 que aumenta a razón de 4 rad/s^2. Hallar el momento M_B que el brazo AB ejerce sobre el BC si la articulación B se mantiene bloqueada. El brazo BC tiene una masa de 4 kg y puede tratarse como si fuera una varilla delgada uniforme.

Resp. $M_B = 3{,}55$ m·N AH

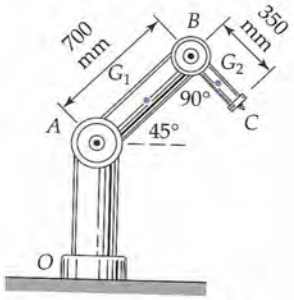


Figura problema **6.103**

6.104 El fuselaje que cubre la nave espacial situada en el extremo del cohete de lanzamiento se desprende cuando la atracción gravitatoria es despreciable. Un actuador mecánico mueve lentamente las dos mitades desde la posición I a la II a partir de la cual los fuselajes giran libremente alrededor de los goznes, tal como el O, bajo la influencia de una aceleración a constante del cohete. Cuando se alcanza la posición III, los goznes se sueltan y el fuselaje se desprende del cohete. Hallar la velocidad angular ω del fuselaje en la posición de 90°. La masa de cada fuselaje es m, su centro de masa está en G y el radio de giro respecto de O es k_O.

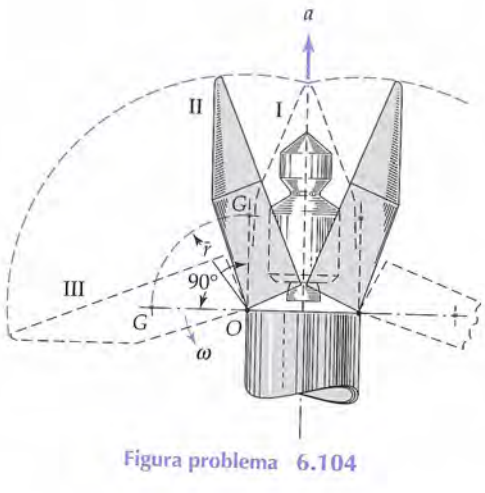


Figura problema **6.104**

6.105 La viga en doble T de 50 kg está sujeta en la posición representada mediante la fuerza P. Si el cable sujeto en B se rompe de repente, calcular la tracción T en cable vertical sujeto en A inmediatamente después de la rotura.

Resp. $T = 137{,}9$ N

http://gratislibrospdf.com/

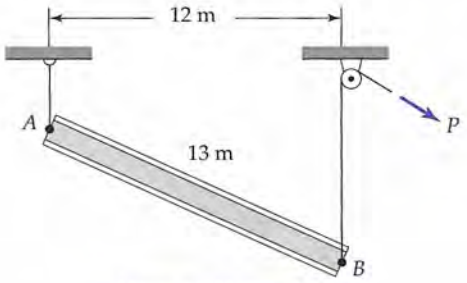


Figura problema 6.105

6.106 El poste de 3,6 m está articulado a la plataforma del camión y se suelta en reposo desde la posición vertical cuando el camión arranca con una aceleración de 0,9 m/s^2. Si la aceleración permanece constante durante el movimiento del poste, calcular la velocidad angular ω del poste cuando el mismo llega a la horizontal.

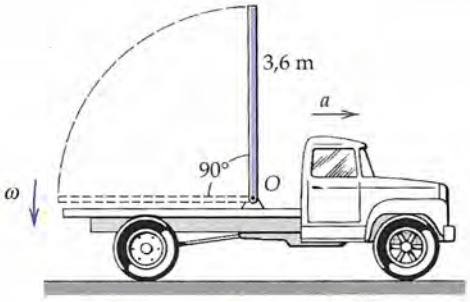
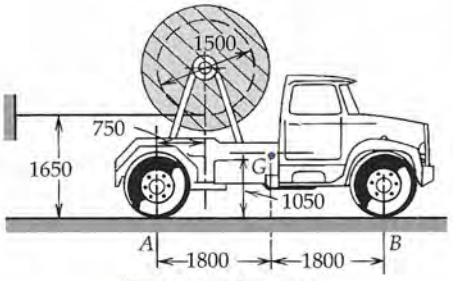


Figura problema 6.106

6.107 El camión transporta un carrete de 1500 mm de cable cuya masa es de 0,75 kg por metro de longitud. El carrete alberga un total de 150 vueltas de cable y, en vacío, tiene una masa de 140 kg con un radio de giro de 530 mm. El camión solo tiene una masa de 2030 kg con centro de masa en G. Si el vehículo se pone en marcha con una aceleración inicial de $0{,}2g$, hallar (*a*) la tracción T en el cable en el punto donde se une al muro y (*b*) la reacción normal bajo cada pareja de ruedas. Se desprecia la inercia rotacional de las ruedas del camión.



Cotas en milímetros

Figura problema 6.107

Resp. $T = 1177$ N, $N_A = 17\,980$ N, $N_B = 8500$ N

6.108 La barra esbelta uniforme AB tiene una masa de 0,8 kg y es movida por la manivela OA y bajo la vinculación de la barra sin masa CB. Si OA tiene una aceleración angular $\alpha_0 = 4$ rad/s^2 y una velocidad angular $\omega_0 = 2$ rad/s cuando OA y CB están ambas perpendiculares a AB, calcular la fuerza en CB en ese instante. (*Sugerencia*: Considérese la utilización de la ecuación 6.3 tomando A como centro de momentos.)

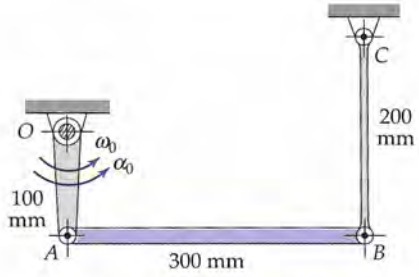


Figura problema 6.108

6.109 La manivela OA rota en el plano vertical con una velocidad angular horaria constante ω_0 de 4,5 rad/s. Para la posición en que OA está horizontal, calcular la fuerza bajo el rodillo de masa despreciable B de la barra esbelta AB.

Resp. $B = 36{,}4$ N

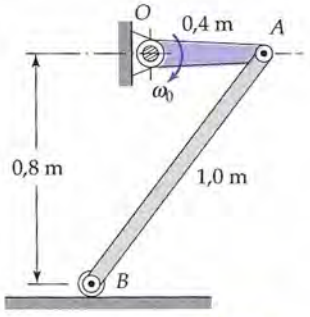


Figura problema 6.109

6.110 La barra uniforme de 15 kg se apoya en la superficie horizontal a través de un rodillo A de masa despreciable. Si es 0,30 el coeficiente de rozamiento cinético entre el extremo B y la superficie vertical, calcular la aceleración inicial del extremo A cuando la barra se abandona en reposo desde la posición de la figura.

http://gratislibrospdf.com/

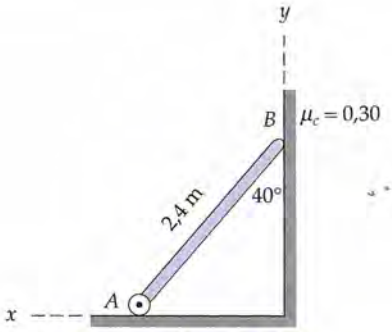


Figura problema 6.110

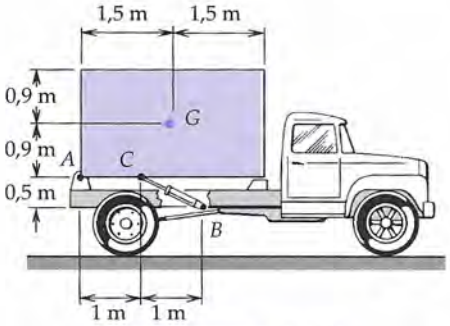


Figura problema 6.113

6.111 El bloque rectangular, macizo y homogéneo, está soportado en sus vértices por pequeños rodillos que descansan sobre superficies horizontales. Si la superficie soportante en B se suprime bruscamente, hallar la aceleración inicial del vértice A.

Resp. $a_A = \dfrac{3g}{4\dfrac{b}{h} + \dfrac{h}{b}}$

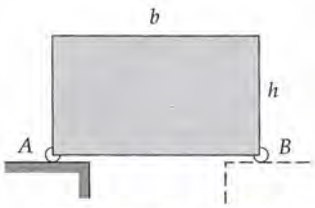


Figura problema 6.111

6.112 Los dos discos, de masa m cada uno, están conectados mediante una barra liviana pero rígida de longitud l. El conjunto se lanza desde una superficie horizontal, tal como se muestra, con una celeridad v. Si ésta es suficiente elevada para que la barra no haga contacto con la esquina después de que A abandone la superficie, hallar aproximadamente el valor de la velocidad angular ω del conjunto después de que B se separe de la superficie. Se tratarán los discos como masas concentradas y formular las hipótesis simplificadoras necesarias.

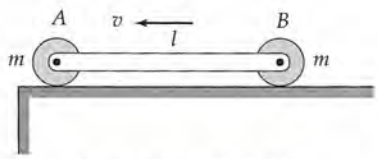


Figura problema 6.112

6.113 El cilindro hidráulico BC del camión volquete se rompe y desconecta. El conductor (que ha aprobado un curso de Dinámica) decide calcular la mínima aceleración a que necesita el camión para voltear la caja de carga en torno a su eje de giro. Se pone así a calcular la aceleración angular inicial α de la caja si el camión recibe una aceleración de $1{,}2a$. ¿Qué valores correctos encuentra para a y α? ¿Sería capaz de llevar a cabo la experiencia? El contenedor puede asimilarse a un bloque rectangular homogéneo y macizo de centro de masa G.

Resp. $a = 16{,}35$ m/s^2 (no factible), $\alpha = 0{,}72$ rad/s^2

6.114 La barra esbelta uniforme de masa m y longitud L dotada de pequeños rodillos en los extremos se abandona en reposo desde la posición representada con el rodillo inferior en contacto con el plano horizontal. Hallar la fuerza normal N bajo ese rodillo y la aceleración angular α de la barra inmediatamente tras iniciarse el movimiento.

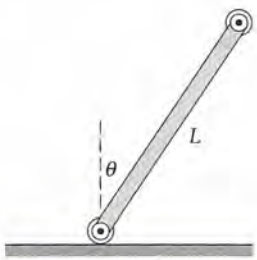


Figura problema 6.114

6.115 La biela AB de 0,6 kg de un motor de combustión interna tiene su centro de masa en G y un radio de giro respecto al mismo de 28 mm. El pistón y su eje de pie de biela A tienen una masa total de 0,82 kg. El motor está funcionando al régimen constante de 3000 rpm, de modo que la velocidad angular del cigüeñal es $3000(2\pi)/60 = 100\pi$ rad/s. Despreciar los pesos de los componentes y la fuerza que ejerce el gas encerrado en el cilindro, en comparación con las fuerzas dinámicas engendradas y calcular el módulo de la fuerza que soporta el eje de pie de biela A cuando el ángulo de la manivela es $\theta = 90°$. (*Sugerencia*: Emplear la ecuación 6.3 tomando B como centro de momentos.)

Resp. $A = 1522$ N

http://gratislibrospdf.com/

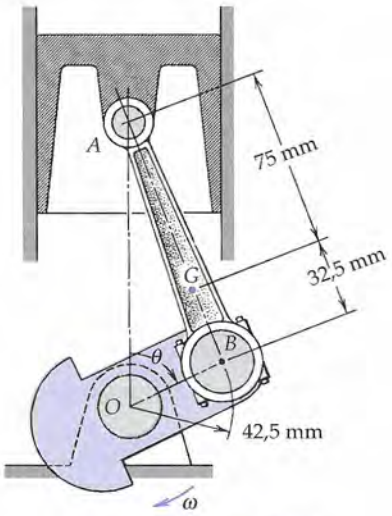


Figura problema 6.115

6.116 La puerta elevable de garaje está constituida por un tablero rectangular homogéneo de masa m guiado por cuatro rodillos instalados en las esquinas y que corren por las pistas que se representan en trazo discontinuo. Si la puerta se suelta desde el reposo en la posición indicada, hallar la fuerza que ejercen sobre ella cada uno de los rodillos A y B. Despreciar el rozamiento.

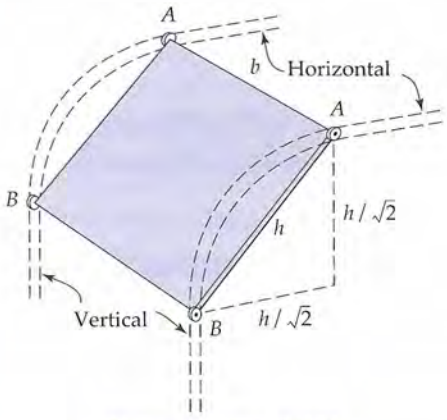


Figura problema 6.116

6.117 La pieza en T de masa m se compone de dos barras esbeltas iguales soldadas. Si el cuerpo se abandona en reposo desde la posición representada, hallar la aceleración inicial del punto A. Se desprecian la pequeña masa del rodillo y el rozamiento en él.

Resp. $a_A = \frac{14}{109}g$ ranura abajo

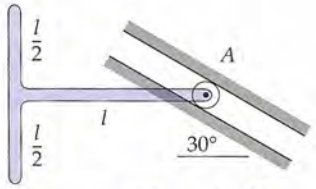


Figura problema 6.117

6.118 En un estudio de las lesiones de cabeza contra el salpicadero de un automóvil en marcha en paradas súbitas o choques, se usa un cinturón de regazo sin las bandas de los hombros y se analiza el maniquí articulado que se muestra en la figura. La junta O de la cadera se supone que permanece fija respecto al vehículo, y el torso se trata como un sólido rígido de masa m que pivota libremente en torno a O. El centro de masa del torso está en G, con una posición inicial tal que OG está vertical. El radio de giro del torso alrededor de O es k_0. Si se lleva el automóvil a una parada brusca con una desaceleración constante a, hallar la velocidad v relativa al vehículo con que la cabeza del maniquí golpea al panel de instrumentos. Trabajar con lo siguientes valores: $m = 50$ kg, $\bar{r} = 450$ mm, $r = 800$ mm, $k_O = 550$ mm, $\theta = 45°$ y $\alpha = 45°$ y calcular v.

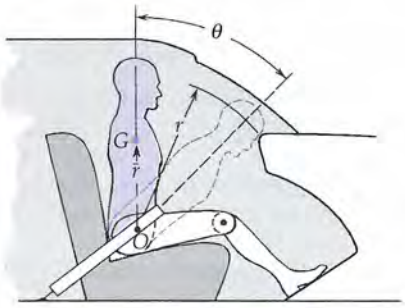


Figura problema 6.118

6.119 La placa cuadrada uniforme de masa m cuelga en el plano vertical mediante los rodillos instalados en las esquinas A y B y se mueve horizontalmente hacia la derecha con una velocidad v. Hallar la fuerza que cada rodillo ejerce en la placa un

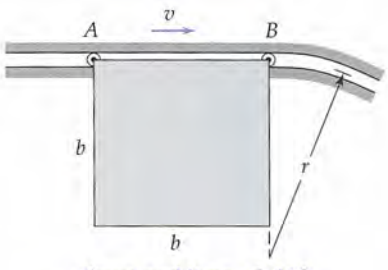


Figura problema 6.119

http://gratislibrospdf.com/

instante después de que la esquina B penetre en la parte circular de la guía.

$$Resp.\ A = \frac{m}{2}\left(g - \frac{v^2}{6r}\right),\ B = \frac{m}{2}g - \left(\frac{5v^2}{6r}\right)$$

6.120 Los pequeños rodillos extremos de la barra esbelta uniforme de 3,6 kg están limitados a moverse por las ranuras que hay en el plano vertical. En el instante en que $\theta = 30°$, la velocidad angular de la barra es de 2 rad/s en sentido antihorario. Hallar la aceleración angular de la barra, las reacciones en A y B y las aceleraciones de los puntos A y B bajo la acción de la fuerza P de 26 N. Se desprecian las masas de los rodillos y el rozamiento en ellos.

$Resp.\ \alpha = 18{,}27\ rad/s^2$
$R_A = 5{,}05\ N,\ R_B = 1{,}208\ N$
$a_A = 19{,}56\ m/s^2,\ a_B = 17{,}17\ ms^2$

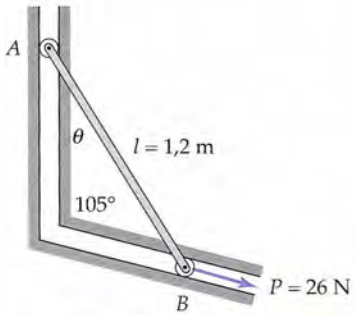


Figura problema 6.120

▶**6.121** Los pequeños rodillos de los extremos de la barra esbelta uniforme están vinculados a la ranura circular de la superficie vertical. Si la barra se suelta en reposo desde la posición indicada, hallar la aceleración angular inicial α. Se desprecian las masas de los rodillos y el rozamiento en ellos.

$$Resp.\ \alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\ H$$

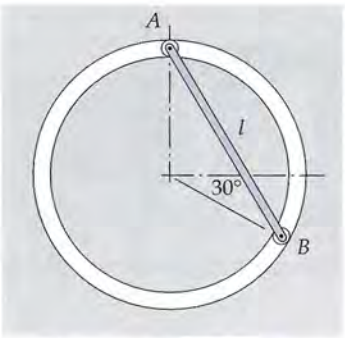


Figura problema 6.121

▶**6.122** Se representa de nuevo el camión de contenedores del problema 6.55. El contenedor cargado de 120 Mg puede tratarse como un sólido rectangular homogéneo de centro de masa en G. En la posición representada, las dos ruedas A están inmovilizadas y los frenos del vehículo aplicados para evitar que éste se mueva. Si súbitamente se liberan las ruedas A para permitir que ruede el contenedor, calcular la fuerza de rozamiento total F que se aplica a las ruedas del camión inmediatamente tras el desbloqueo.

$Resp.\ F = 340kN$

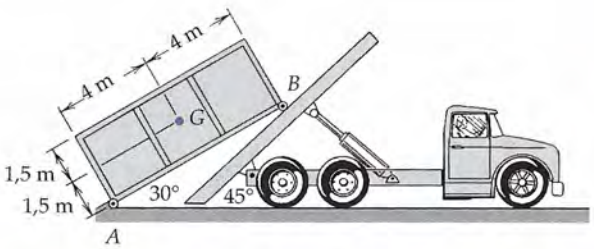


Figura problema 6.122

SECCIÓN B. TRABAJO Y ENERGÍA

6.6 RELACIONES ENTRE EL TRABAJO Y LA ENERGÍA

En los apartados 3.6 y 3.7 se desarrolló y aplicó el teorema de las fuerzas vivas al movimiento del punto material y a unos cuantos casos escogidos de puntos materiales conectados. Vimos entonces que el teorema de las fuerzas vivas resulta particularmente útil para describir los movimientos que resultan del efecto acumulado de fuerzas que actúan a lo largo de distancias. Además de ello, cuando las fuerzas son conservativas, pueden determinarse cambios de velocidad estudiando el estado de la energía al comienzo y al final del intervalo del

http://gratislibrospdf.com/

movimiento. Para desplazamientos finitos el teorema de las fuerzas vivas elimina la necesidad de calcular la aceleración e integrarla a lo largo del intervalo para obtener la variación de velocidad. Estas mismas ventajas se tienen cuando se amplía el teorema de las fuerzas vivas a la descripción del movimiento de los cuerpos rígidos. Antes de acometer esta ampliación, recomendamos vivamente un repaso minucioso de las definiciones y conceptos de trabajo, energía cinética, energía potencial gravitatoria y elástica, fuerzas conservativas y potencia, tratados en los apartados 3.6 y 3.7, ya que se supone que el lector está completamente familiarizado con ellos cuando se aplican a los problemas de cuerpos rígidos. En los apartados 4.3 y 4.4 acerca de la cinética de los sistemas de puntos materiales, se ampliaron los contenidos de los apartados 3.6 y 3.7 para que abarcasen los sistemas generales de puntos materiales, en los que se incluyen los cuerpos rígidos, y esa discusión debe también repasarse.

(a) Trabajo de las fuerzas y de los pares de fuerzas. El trabajo efectuado por una fuerza **F** se trató con detalle en el apartado 3.6 y está dado por

$$U = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad \text{o sea} \qquad U = \int (F \cos \alpha) ds$$

siendo $d\mathbf{r}$ el vector desplazamiento infinitesimal del punto de aplicación de **F** durante el tiempo dt. En la forma escalar equivalente de la integral, α es el ángulo formado por **F** y la dirección del desplazamiento y ds es el módulo del vector desplazamiento $d\mathbf{r}$. Son muy frecuentes las ocasiones en que debe calcularse el trabajo efectuado por un par de fuerzas de momento M que actúa sobre un cuerpo rígido durante el movimiento de éste. En la figura 6.11 se representa un par de momento $M = Fb$ que actúa sobre un cuerpo que se mueve en el plano del par. Durante el tiempo dt el cuerpo gira un ángulo $d\theta$, pasando la recta AB a ocupar la posición $A'B'$. Este movimiento podemos considerarlo formado por dos partes: primero una traslación hasta $A'B''$ y luego una rotación $d\theta$ en torno a A'. Vemos de inmediato que, durante la traslación, el trabajo efectuado por una de las fuerzas se anula con el efectuado por la otra, por lo que el trabajo efectuado neto es $dU = F(b\, d\theta) = M\, d\theta$ y se debe a la parte del movimiento constituida por la rotación. Si el par actuase en sentido contrario a la rotación, el trabajo efectuado sería negativo. Por consiguiente, durante una rotación finita el trabajo efectuado por un par de momento M cuyo plano sea paralelo al plano del movimiento es

$$U = \int M\, d\theta$$

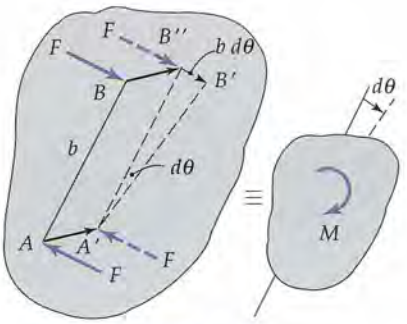


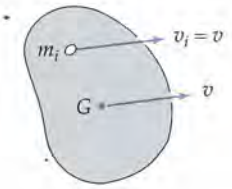
Figura 6.11

(b) Energía cinética. A continuación, utilizaremos la conocida expresión de la energía cinética de un punto material para obtener las expresiones de la energía cinética de un cuerpo rígido en cada uno de los tres casos de movimiento que se ilustran en la figura 6.12.

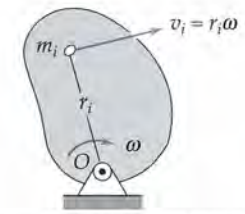
(Traslación) El cuerpo rígido en traslación de la figura 6.12*a* tiene una masa m y todos sus puntos tienen una velocidad común v. La energía cinética de un punto cualquiera de masa m_i del cuerpo es $T_i = \frac{1}{2}\, m_i v^2$, y para todo el cuerpo será, pues, $T = \Sigma\, \frac{1}{2}\, m_i v^2 = \frac{1}{2}\, v^2 \Sigma\, m_i$, o sea

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2 \qquad (6.7)$$

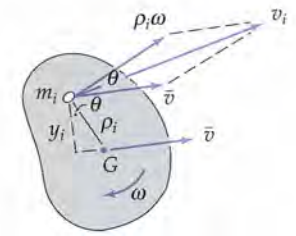
Esta expresión es válida para las traslaciones tanto rectilíneas como curvilíneas.



(*a*) Traslación



(*b*) Rotación en torno a un eje fijo



(*c*) Movimiento plano general

Figura 6.12

http://gratislibrospdf.com/

(Rotación en torno a un eje fijo) El cuerpo rígido de la figura 6.12*b* gira con una velocidad angular ω alrededor del eje fijo que pasa por O. La energía cinética de un punto genérico de masa m_i es $T_i = \frac{1}{2}\, m_i(r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\, \omega^2 \Sigma m_i r_i^2$. Luego, para el cuerpo completo, $T = \frac{1}{2}\omega^2 \Sigma\, m_i r_i^2$. Pero el momento de inercia del cuerpo de respecto a O es $I_O = \Sigma\, m_i r_i^2$; luego

$$T = \tfrac{1}{2} I_O \omega^2 \tag{6.8}$$

Obsérvese la semejanza formal de las expresiones de la energía cinética para rotación y traslación. El lector puede comprobar que las dimensiones de ambas expresiones son las mismas.

(Movimiento plano general) El cuerpo rígido de la figura 6.12*c* ejecuta un movimiento plano en el cual, en el instante considerado, la velocidad de su centro de masa G es $\bar{v}$ y la velocidad angular es ω. La velocidad v_i de un punto genérico de masa m_i puede expresarse en función de la velocidad $\bar{v}$ del centro de masa y de la velocidad $\rho_i\omega$ relativa al centro de masa tal como se indica. Con ayuda del teorema del coseno podremos escribir la energía cinética del cuerpo como la suma ΣT_i de las energías cinéticas de todos sus puntos. Así

$$T = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i v_i^{\,2} = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i(\bar{v}^2 + \rho_i^{\,2}\omega^2 + 2\bar{v}\rho_i w \cos\theta)$$

Como ω y $\bar{v}$ son comunes a todos los términos del tercer sumatorio, podemos sacarlas como factor común. Entonces, el tercer término de la expresión de T resulta ser

$$\omega\bar{v}\Sigma m_i\rho_i \cos\theta = \omega\bar{v}\Sigma m_i y_i = 0$$

puesto que $\Sigma m_i y_i = m\bar{y} = 0$. La energía cinética del cuerpo será, pues, $T = \frac{1}{2}\ \bar{v}^{\,2}\ \Sigma\, m_i + \frac{1}{2}\,\omega^2 \Sigma m_i\, \rho_i^{\,2}$; o sea

$$T = \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \tag{6.9}$$

donde $\bar{I}$ es el momento de inercia del cuerpo respecto a su centro de masa. Esta expresión de la energía cinética presenta claramente por separado las contribuciones a la energía cinética total de la velocidad de traslación $\bar{v}$ del centro de masa y de la velocidad de rotación ω en torno al centro de masa.

La energía cinética del movimiento plano puede también expresarse en función de la velocidad de rotación alrededor del centro instantáneo de rotación C. Como C tiene instantáneamente una velocidad nula, la demostración que lleva a la ecuación 6.8 valdrá lo mismo para el punto C que para el punto fijo O, por lo que la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano podrá escribirse también en la forma

$$T = \tfrac{1}{2} I_C \omega^2 \tag{6.10}$$

En el apartado 4.3 se dedujo la ecuación 4.4 para la energía cinética de un sistema material cualquiera, rígido o no. Vemos ahora que esa expresión es equivalente a la 6.9 cuando el sistema material es rígido. En el caso de un cuerpo rígido, la cantidad $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ de la ecuación 4.4 es la velocidad del punto representativo respecto al centro de masa y es el vector $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$ de módulo $\rho_i\omega$. El término sumatorio de la ecuación 4.4 se convierte en $\Sigma \frac{1}{2} m_i(\rho_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \Sigma m_i \rho_i^2 = \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$, con lo cual la ecuación 4.4 concuerda con la 6.9.

http://gratislibrospdf.com/

(c) Energía potencial. En el apartado 3.7 se trató detalladamente de la energía potencial gravitatoria V_g y de la energía potencial elástica V_e. Recordemos que el símbolo U' (y no U) se emplea para representar el trabajo realizado por todas las fuerzas salvo el peso y las fuerzas elásticas, los cuales se incluyen en los términos de la energía potencial.

Teorema de las fuerzas vivas. El teorema de las fuerzas vivas (ec. 3.17) fue presentado en el apartado 3.7 para el movimiento del punto material y en el apartado 4.3 se amplió al movimiento de los sistemas generales de puntos materiales. La expresión

$$U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \qquad [4.3]$$

es aplicable a todo sistema mecánico conservativo. Al ser aplicada a un único cuerpo rígido, desaparece el término ΔV_e y el trabajo total $U'_{1\text{-}2}$ que sobre el cuerpo efectúan las fuerzas exteriores (que no sean gravitatorias) resulta igual a la variación ΔT de la energía cinética del cuerpo más la variación ΔV_g de su energía potencial de posición en el campo gravitatorio. Si se incluyera en U el trabajo de las fuerzas gravitatorias, la ecuación quedaría en la forma $U'_{1\text{-}2} = \Delta T$.

Cuando se aplique a un sistema de cuerpos rígidos interconectados, la ecuación 4.3 comprenderá la variación ΔV_e de la energía elástica almacenada en las conexiones. El término $U'_{1\text{-}2}$ contendrá el trabajo de todas las fuerzas exteriores al sistema (que no sean gravitatorias) incluyendo el trabajo negativo de las fuerzas de rozamiento internas si las hay. El término ΔT es la suma de las variaciones de energía cinética de todas las partes móviles durante el intervalo de movimiento en cuestión, y ΔV_g es la suma de las variaciones de energía potencial gravitatoria de los distintos miembros.

El teorema de las fuerzas vivas puede asimismo escribirse en la forma de la ecuación 3.17*a*, donde los términos se corresponden con la secuencia natural de los acontecimientos.

Al aplicar a un cuerpo rígido aislado los principios referentes a trabajo y energía, debe emplearse un *diagrama para sólido libre* o un *diagrama de fuerzas activas*. En el caso de un sistema de cuerpos rígidos interconectados, deberá dibujarse un diagrama de fuerzas activas del sistema completo a fin de aislarlo y poner de manifiesto todas las fuerzas que realizan trabajo sobre el sistema. Conviene asimismo dibujar unos diagramas que representen las posiciones inicial y final del sistema en el intervalo de movimiento dado.

El teorema de las fuerzas vivas proporciona una relación directa entre las fuerzas que realizan trabajo y los consiguientes cambios en el movimiento del sistema mecánico. Sin embargo, si hay un rozamiento mecánico interno apreciable, el sistema hay que desmembrarlo al objeto de poner de manifiesto las fuerzas de rozamiento cinético y tener en cuenta el trabajo negativo que las mismas realizan. Cuando un sistema se desmembra, automáticamente se pierde una de las ventajas primordiales del teorema de las fuerzas vivas. Los procedimientos basados en el teorema de las fuerzas vivas son de la máxima utilidad para analizar sistemas conservativos de cuerpos interconectados en los que pueda despreciarse la pérdida de energía debida al trabajo negativo de las fuerzas de rozamiento.

(d) Potencia. El concepto de potencia se presentó en el apartado 3.6, cuando se trató del trabajo y la energía en el movimiento del punto material. Recordemos aquí que potencia es la cantidad de trabajo realizado por unidad de tiempo. Para una fuerza **F** que actúe sobre un cuerpo rígido en movimiento plano,

http://gratislibrospdf.com/

la potencia que desarrolla esa fuerza en un instante dado lo da la ecuación 3.12 y es el trabajo que efectúa por unidad de tiempo; o sea

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

donde $d\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ son, respectivamente, el desplazamiento infinitesimal y la velocidad del punto de aplicación de la fuerza. Análogamente, para un par de momento M aplicado al cuerpo, la potencia que desarrolla el par de fuerzas en un instante dado es la cantidad de trabajo que el mismo efectúa por unidad de tiempo; o sea

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{M\, d\theta}{dt} = M\omega$$

donde $d\theta$ y ω son, respectivamente, el desplazamiento angular infinitesimal y la velocidad angular del cuerpo. Si los sentidos de M y ω son iguales, la potencia es positiva y el cuerpo recibe energía. A la inversa, si M y ω tienen sentidos contrarios, la potencia es negativa y el cuerpo cede energía. Si una fuerza $\mathbf{F}$ y un par de momento M actúan simultáneamente, la potencia instantánea total será

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + M\omega$$

La potencia puede asimismo expresarse mediante la variación por unidad de tiempo que exprimenta la energía mecánica total de un cuerpo rígido o de un sistema de cuerpos rígidos. Para un desplazamiento infinitesimal la ecuación 4.3 del teorema de las fuerzas vivas es

$$dU' = dT + dV_g + dV_e$$

donde dU' es el trabajo de las fuerzas y pares de fuerzas activos aplicados al cuerpo o sistema de cuerpos. En dU' no están incluidos los trabajos de las fuerzas gravitatorias ni elásticas, los cuales se tienen en cuenta en los términos dV_g y dV_e. Dividiendo por dt se obtiene la potencia total P de las fuerzas y pares de fuerzas activos

$$P = \frac{dU'}{dt} = \dot{T} + \dot{V}_g + \dot{V}_e = \frac{d}{dt}(T + V)$$

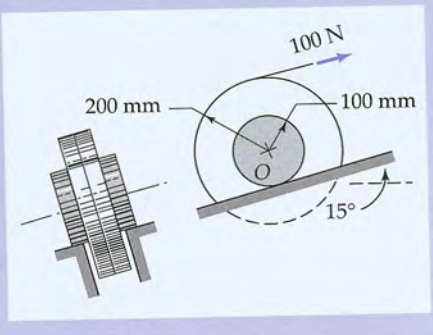
Vemos así que la potencia que desarrollan las fuerzas y los pares de fuerzas activos es igual a la variación por unidad de tiempo de la energía mecánica total del cuerpo o sistema de cuerpos. Véase que, según la ecuación 6.9, para un cuerpo dado, el primer término puede escribirse

$$\begin{aligned} \dot{T} = \frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{a}}) + \bar{I}\omega\dot{\omega} \\ &= m\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{I}\alpha(\omega) = \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \overline{M}w \end{aligned}$$

donde $\mathbf{R}$ es la resultante de *todas* las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y $\overline{M}$ es el momento resultante respecto al centro de masa G de todas las fuerzas. El producto escalar tiene en cuenta el caso en que el centro de masa ejecute un movimiento curvilíneo y $\bar{\mathbf{a}}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ no tengan la misma dirección.

http://gratislibrospdf.com/

La rueda sube por el plano inclinado rodando sin deslizamiento apoyada en sus cubos merced a la fuerza de 100 N aplicada a la cuerda arrollada en su perímetro externo. Si el cuerpo parte del reposo, calcular su velocidad angular ω cuando su centro ha avanzado 3 m a lo largo del plano inclinado. La rueda tiene una masa de 40 kg con centro de masa en O y un radio de giro centroidal de 150 mm. Hallar la potencia desarrollada por la fuerza de 100 N al final de los tres metros.



Solución. De las cuatro fuerzas incluidas en el diagrama para sólido libre, sólo trabajan la tracción de 100 N y el peso de $40(9{,}81) = 392$ N. La fuerza de rozamiento no trabaja en tanto la rueda no se deslice. Empleando el concepto de centro instantáneo de rotación C, se ve que un punto A de la cuerda al que se le aplique la fuerza de 100 N tiene una velocidad $v_A = [(200 + 100)/100]v$. Por ello, el punto A de la cuerda se moverá una distancia de $(200 + 100)/100 = 3$ veces mayor que el centro O. Así, con el efecto del peso incluido en el término U, el trabajo efectuado sobre la rueda se hace

(1)

$$U_{1\text{-}2} = 100\,\frac{200+100}{100}(3) - (392 \operatorname{sen} 15^\circ)(3) = 595 \text{ J}$$

(2)

La rueda ejecuta un movimiento general plano, por lo que la variación de su energía cinética es

(3)

$$[T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2] \qquad \Delta T = \left[\frac{1}{2}40(0{,}10\,\omega)^2 + \frac{1}{2}40(0{,}15)^2\omega^2\right] - 0 = 0{,}650\,\omega^2$$

El teorema de las fuerzas vivas da

$$[U_{1\text{-}2} = \Delta T] \qquad 595 = 0{,}650\,\omega^2 \qquad \omega = 30{,}3 \text{ rad/s}$$

La energía cinética de la rueda puede también escribirse

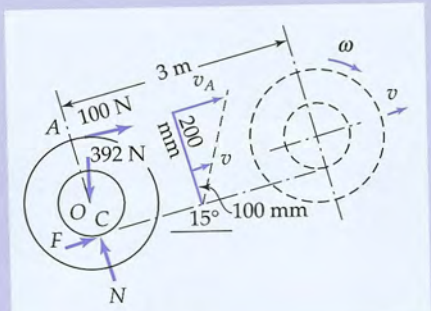
(4)

$$\left[T = \frac{1}{2}I_C w^2\right] \qquad T = \frac{1}{2}40[(0{,}15)^2 + (0{,}10)^2]w^2 = 0{,}650w^2$$

La potencia que desarrolla la fuerza de 100 N cuando $\omega = 30{,}3$ rad/s es

(5)

$$[P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}] \qquad P_{100} = 100(0{,}3)(30{,}3) = 908 \text{ W} \qquad \textit{Resp.}$$



(1) Como la velocidad del centro instantáneo de rotación C de la rueda es nula, resulta que la velocidad a la que la fuerza de rozamiento efectúa trabajo es nula en todo instante. Entonces, F no realizará trabajo en tanto que la rueda no se deslice. Sin embargo, si la rueda se moviera sobre una plataforma móvil, la fuerza de rozamiento sí realizaría un trabajo aunque la rueda no se deslizase.

(2) Obsérvese que la componente del peso paralela al plano efectúa un trabajo negativo.

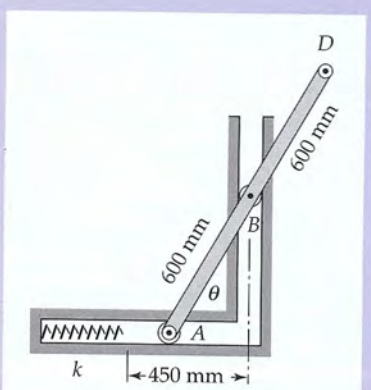
(3) Atención a utilizar el valor correcto del radio en la expresión $v = r\omega$ del centro de la rueda.

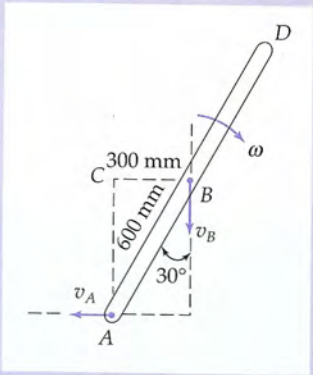
(4) Recuérdese que $I_C = \bar{I} + m\overline{OC}^2$, donde $\bar{I} = I_O = mk_O^2$.

(5) Aquí la velocidad es la del punto de aplicación de la fuerza de 100 N

http://gratislibrospdf.com/

La barra delgada de 1200 mm tiene una masa de 20 kg con centro de masa en B y se suelta en reposo en la posición en que θ es prácticamente cero. El punto B está limitado a moverse por la guía vertical lisa, mientras que el extremo A se mueve por la guía horizontal lisa comprimiendo el resorte cuando la barra cae. Determinar (*a*) la velocidad angular de la barra en el momento en que ésta pasa por la posición $\theta = 30°$ y (*b*) la velocidad a la que B golpea la superficie horizontal si la constante del resorte vale 5 kN/m.





Solución. Al despreciarse el rozamiento y las masas de los rodillos A y B, el sistema puede considerarse conservativo.

Parte (a). Durante el primer intervalo del movimiento, desde $\theta = 0$ a $\theta = 30°$, el resorte no interviene y en la expresión de la energía no habrá término V_e. Si ① adoptamos la decisión de incluir el trabajo del peso en el término V_g, no habrá otras fuerzas que trabajen y $U'_{1\text{-}2} = 0$.

Como estamos ante un caso de movimiento plano vinculado, hay una relación cinemática entre la velocidad v_B del centro de masa y la velocidad angular ω de la barra. Esa relación se obtiene fácilmente empleando el centro instantáneo de rotación C y teniendo en cuenta que $v_B = \overline{CB}\,\omega$. Así pues, la energía cinética de la barra en la posición $\theta = 30°$ es

$$[T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2] \qquad T = \frac{1}{2}(20)(0{,}300\ \omega^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}20[1{,}2]^2\right)\omega^2 = 2{,}10\omega^2$$

La variación de energía potencial gravitatoria es el peso multiplicado por la variación de altura experimentada por el centro de masa y vale

$$[\Delta V_g = W\Delta h] \qquad \Delta V_g = 20(9{,}81)(0{,}600\cos 30° - 0{,}600) = -15{,}77\ \text{J}$$

Aplicándola ahora en la expresión del teorema de las fuerzas vivas tenemos

$$[U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta V_g] \qquad 0 = 2{,}10\omega^2 - 15{,}77 \qquad \omega = 2{,}74\ \text{rad/s} \quad \textit{Resp.}$$

Parte (b). Para el intervalo de movimiento completo debe incluirse el resorte como parte del sistema, donde

② $$[V_e = \tfrac{1}{2}kx^2] \qquad \Delta V_e = \tfrac{1}{2}(5000)(0{,}600 - 0{,}450)^2 - 0 = 56{,}25\ \text{J}$$

En la posición final horizontal, el punto A no tiene velocidad, por lo que en realidad la barra está girando alrededor de A. Por tanto, la energía cinética de la barra es

$$[T = \tfrac{1}{2}I_A\omega^2] \qquad T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}20[1{,}2]^2\right)\left(\frac{v_B}{0{,}600}\right)^2 = 13{,}33v_B^2$$

① **Véase que las fuerzas actuantes sobre la barra en A y B son perpendiculares a las respectivas direcciones de movimiento y por ello no trabajan.**

② **Nótese que las cantidades se toman todas en las mismas unidades fundamentales**

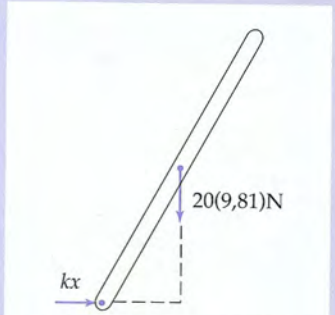


Diagrama cinético alternativo

http://gratislibrospdf.com/

La variación de energía potencial gravitatoria es

$$[\Delta V_g = W\Delta h] \qquad \Delta V_g = 20(9{,}81)(-0{,}600) = -117{,}7\ \text{J}$$

Llevando estos tres valores a la expresión del teorema de las fuerzas vivas resulta

$$[U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e]$$

$$0 = (13{,}33v_B^2 - 0) - 117{,}7 + 56{,}25 \qquad v_B = 2{,}15\ \text{m/s} \quad \textit{Resp.}$$

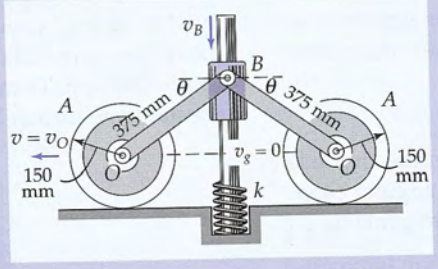
Otro procedimiento consiste en suponer que la barra aislada constituye el sistema, en cuyo caso el diagrama de fuerzas activas muestra que el peso hace un trabajo positivo y que la fuerza del resorte kx hace un trabajo negativo. Entonces, escribiríamos

$$[U_{1\text{-}2} = \Delta T] \qquad 117{,}7 - 56{,}25 = 13{,}33v_B^2$$

cuyo resultado es idéntico al anterior.

PROBLEMA TIPO 6.11

En el mecanismo de la figura, cada una de las dos ruedas tiene una masa de 30 kg y un radio de giro centroidal de 100 mm. Cada barra OB tiene una masa de 10 kg y puede tomarse como delgada. El cursor B tiene una masa de 7 kg y corre por el árbol vertical fijo con rozamiento despreciable. El resorte tiene una constante k = 30 kN/m y entra en contacto con la base del cursor cuando las barras llegan a la posición horizontal. Si el cursor se abandona en reposo con θ = 45° y si el rozamiento basta para que las ruedas no se deslicen, hallar (a) la velocidad v_B del cursor cuando éste inicia el contacto con el resorte y (b) la deformación máxima x del resorte.



Solución. El mecanismo ejecuta un movimiento plano y es conservativo si se deprecian las pérdidas por rozamiento cinético. Por comodidad, el origen de la energía potencial gravitatoria debe estar en la horizontal que va de O a O.

(a) Para el intervalo de $\theta = 45°$ a $\theta = 0$, vemos que ΔT_{ruedas} es cero, puesto que cada rueda parte del reposo y se detiene momentáneamente cuando $\theta = 0$. Además, en la posición inferior cada barra simplemente rota en torno a su respectivo punto O, por lo que

$$\Delta T = [2(\tfrac{1}{2}I_O\omega^2) - 0]_{\text{barras}} + [\tfrac{1}{2}mv^2 - 0]_{\text{cursor}}$$

$$= \frac{1}{3}10(0{,}375)^2\left(\frac{v_B}{0{,}375}\right)^2 + \frac{1}{2}7v_B^2 = 6{,}38v_B^2$$

http://gratislibrospdf.com/

El cursor B cae una distancia $0{,}375/\sqrt{2} = 0{,}265$ m, con lo cual

$$\Delta V = \Delta V_g = 0 - 2(10)(9{,}81)\frac{0{,}265}{2} - 7(9{,}81)(0{,}265) = -44.2 \text{ J}$$

① **Con el trabajo del peso del cursor B dentro del término ΔV_g, no habrá más fuerzas exteriores al sistema que realicen trabajo. La fuerza de rozamiento existente bajo cada rueda no trabaja, ya que la rueda no se desliza y, por supuesto, la fuerza normal aquí no trabaja. Por tanto, $U'_{1\text{-}2} = 0$.**

① Además, $U'_{1\text{-}2} = 0$. Luego

$$[U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta V] \qquad 0 = 6{,}83v_B^2 - 44{,}2 \qquad v_B = 2{,}54 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

(b) En el estado de deformación máxima x del resorte, todas las piezas se encuentran momentáneamente en reposo, con lo que $\Delta T = 0$. O sea,

$$[U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta v_g + \Delta V_e]$$

$$0 = 0 - 2(10)(9{,}81)\left(\frac{0{,}265}{2} + \frac{x}{2}\right) - 7(9{,}81)(0{,}265 + x) + \tfrac{1}{2}(30)(10^3)x^2$$

La raíz positiva de esta ecuación da

$$x = 60{,}1 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Debe observarse que los resultados de los apartados (*a*) y (*b*) entrañan una variación total de energía muy pequeña a pesar de que el mecanismo ha realizado una sucesión de movimientos relativamente complicada. Este problema y otros similares no deben tratar de resolverse más que por este método energético.

PROBLEMAS

(Salvo que se indique otra cosa, en los problemas siguientes se despreciarán las pérdidas de energía debidas al rozamiento cinético.)

Problemas introductorios

6.123 La barra esbelta uniforme se suelta en reposo desde la posición indicada. Si $x = l/4$, hallar su velocidad angular cuando pasa por la posición vertical. Se desprecia el rozamiento en el eje O.

$$\textit{Resp. } \omega = \sqrt{\frac{24g}{7l}}$$

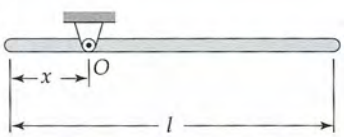


Figura problema 6.123

6.124 En cierto instante la velocidad del cilindro de 8 kg es de 0,3 m/s. ¿Cuál será su velocidad v tras haber descendido 1,5 m más? El tambor acanalado tiene una masa de 12 kg con un radio de giro centroidal $\bar{k} = 210$ mm y el radio de la acanaladura es $r_i = 200$ mm. El momento en O debido al rozamiento vale constantemente 3 m·N.

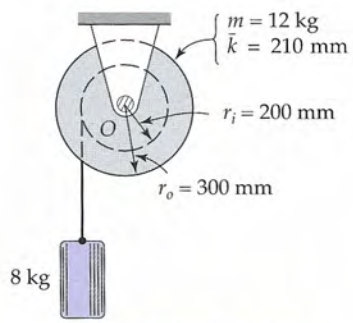


Figura problema 6.124

6.125 Las dos ruedas del problema 6.89, que vuelven a representarse aquí, significan dos situaciones extremas de distribución de masa. En el caso A toda la masa m se supone

http://gratislibrospdf.com/

concentrada en el centro de la barra axial de diámetro despreciable. En el caso B toda la masa m se supone concentrada en la llanta. Hallar la velocidad del centro de cada aro después de que se hayan trasladado una distancia x plano inclinado abajo partiendo del reposo. Los aros ruedan sin deslizamiento.

Resp. Caso A: $v_A = \sqrt{2gx \operatorname{sen} \theta}$

Caso B: $v_B = \sqrt{gx \operatorname{sen} \theta}$

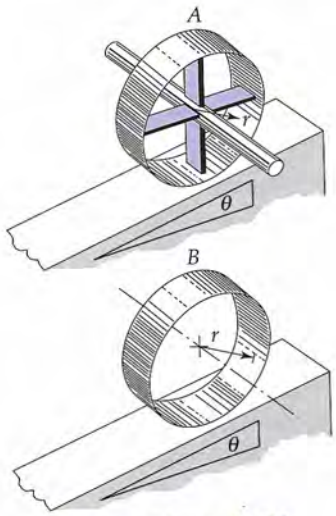


Figura problema 6.125

6.126 La placa rectangular uniforme se suelta en reposo desde la posición indicada. Hallar la velocidad angular máxima ω del movimiento que ejecuta. Se desprecia el rozamiento en el eje de suspensión.

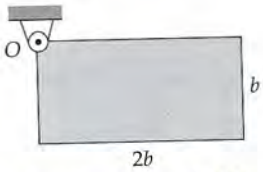


Figura problema 6.126

6.127 Un volante de inercia de 1200 kg y 400 mm de radio de giro reduce su velocidad de 5000 a 3000 rpm en un intervalo de 2 minutos. Calcular la potencia media que desarrolla. Expresar el resultado en kilowatts y en caballos de vapor.

Resp. $P = 140{,}4$ kW, $P = 191$ cv

6.128 La barra esbelta OA de 15 kg se suelta en reposo desde la posición vertical y comprime el resorte de constante $k = 20$ kN/m al pasar por la posición horizontal. Hallar que ajuste debe darse al resorte, especificado por la distancia h, para que la barra tenga una velocidad angular $\omega = 4$ rad/s cuando cruza por la posición horizontal ¿Qué efecto ejerce x en la dinámica del problema?

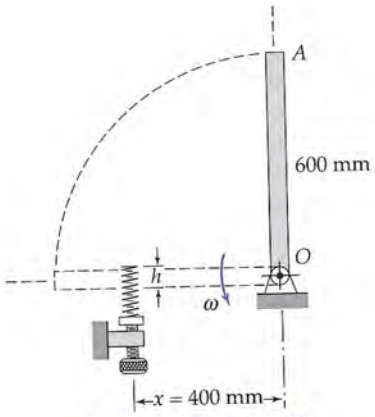


Figura problema 6.128

6.129 El volante de inercia de 50 kg tiene un radio de giro respecto al eje de su árbol de $\bar{k} = 0{,}4$ m y está sometido al par de momento $M = 2(1 - e^{-0{,}1\theta})$ m·N, donde θ está en radianes. Si el volante se halla en reposo cuando $\theta = 0$, hallar su velocidad angular al cabo de cinco vueltas.

Resp. $\omega = 3{,}31$ rad/s

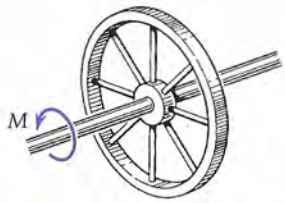


Figura problema 6.129

6.130 El disco uniforme de 6 kg rota libremente en torno al eje horizontal que pasa por O. Al disco está sujeta una barra delgada de 2 kg tal como se muestra. Si, estando en reposo en la posición indicada, el sistema recibe un leve impulso, hallar su velocidad angular tras haber girado 180°.

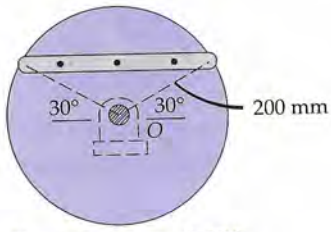


Figura problema 6.130

http://gratislibrospdf.com/

6.131 Para la barra esbelta del problema 6.123, hallar la distancia x para la cual será máxima la velocidad angular cuando pase por la posición vertical tras partir del reposo desde la posición indicada. Expresar la correspondiente velocidad angular.

Resp. $x = 0{,}211l$, $\omega_{max} = 1{,}861\sqrt{\frac{g}{l}}$

Problemas representativos

6.132 Las dos barras iguales, de las misma longitud b y la misma masa m, pueden suponerse uniformes y delgadas. Si se sueltan en reposo desde la posición indicada estando el extremo A vinculado a la guía vertical lisa, hallar la velocidad v con que A llega a O con θ prácticamente cero.

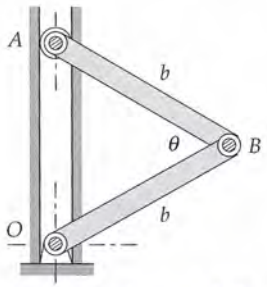


Figura problema 6.132

6.133 El torno de 375 mm de radio y su árbol tienen una masa de 41 kg y un radio de giro de 300 mm respecto al eje de rotación. Alrededor del torno hay arrollados 18 m de cable flexible de acero de 3,08 kg por metro de longitud, con un extremo sujeto a la superficie del tambor. El extremo libre del cable cuelga inicialmente una distancia $x = 0{,}6$ cuando el dispositivo se abandona en reposo. Hallar la velocidad angular ω del torno en el instante en que $x = 6$ m. Se supone que el centro de masa de la porción de cable que queda en el torno se encuentra siempre en el eje del árbol. Se desprecia el rozamiento.

Resp. $\omega = 9{,}68$ rad/s

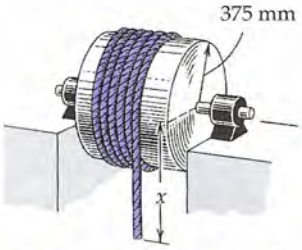


Figura problema 6.133

6.134 El resorte de torsión, de constante 30 m·N/rad, está sin deformar cuando la barra delgada uniforme de 6 kg se encuentra en posición vertical. Si la barra se suelta en reposo en la posición horizontal indicada, hallar su velocidad angular ω cuando pasa por la vertical. Se desprecia el rozamiento.

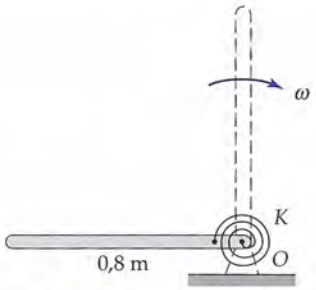


Figura problema 6.134

6.135 La barra uniforme ABC de 3 kg está inicialmente en reposo con su extremo A contra el tope de la guía horizontal. Al aplicarse un par de momento constante $M = 8$ m·N al extremo C, la barra gira haciendo que el extremo A choque con el lado de la guía vertical a la velocidad de 3 m/s. Calcular la pérdida de energía ΔQ a causa del rozamiento en guías y rodillos. Pueden despreciarse las masas de los rodillos.

Resp. $\Delta Q = 0{,}059$ J

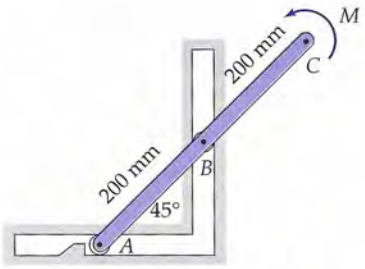


Figura problema 6.135

6.136 El disco B rueda hacia abajo sin deslizamiento por el plano inclinado A, que se mueve con una celeridad v. Expresar el trabajo que realizan las fuerzas normal y de rozamiento que actúan sobre el disco en los casos (*a*) $v = 0$ y (*b*) $v \neq 0$.

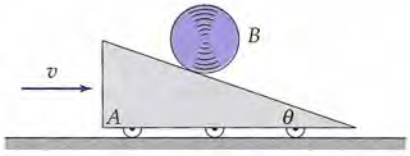


Figura problema 6.136

http://gratislibrospdf.com/

6.137 El semicilindro macizo homogéneo se suelta en reposo desde la posición representada. Si el rozamiento basta para que no haya deslizamiento, hallar la velocidad angular máxima ω que alcanza el sólido al rodar por la superficie horizontal.

Resp. $\omega = 4\sqrt{\dfrac{g(1-\cos\theta)}{(9\pi-16)r}}$

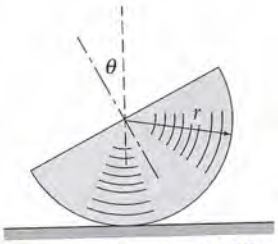


Figura problema 6.137

6.138 Una instalación para comprobar las prestaciones de carros de golf consiste en una banda sin fin cuyo ángulo θ es ajustable. El carro de masa m se lleva poco a poco hasta su velocidad nominal de marcha v mientras el momento M del par de frenado sobre la polea superior se ajusta constantemente de modo que el carro permanezca en una posición fija A respecto al banco de ensayos. Sin carro en la banda, se requiere que sobre la polea actúe un par de momento M_0 para vencer el rozamiento y hacer que las poleas giren cualquiera que sea la velocidad. El rozamiento es suficiente para impedir que las ruedas se deslicen sobre la banda. Hallar la expresión de la potencia P que absorbe el par de frenado M. ¿Trabajan las fuerzas de rozamiento estático entre las ruedas y la banda?

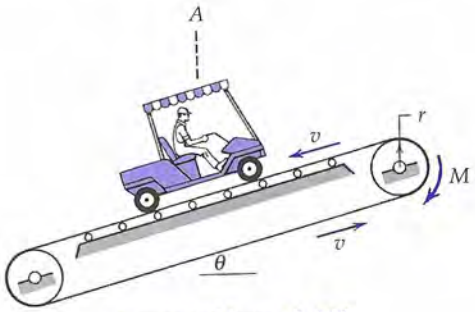


Figura problema 6.138

6.139 La manivela OA de 8 kg, de centro de masa en G y radio de giro de 0,22 m respecto a O, está conectada a la barra delgada uniforme AB de 12 kg. Si el sistema se suelta en reposo desde la posición indicada, calcular la velocidad v del extremo B cuando OA pasa por la vertical.

Resp. $v = 2{,}29$ m/s

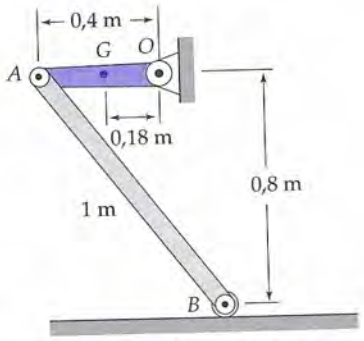


Figura problema 6.139

6.140 Una barra delgada de longitud l y masa m está soldada a la llanta de un aro de radio l. Si el aro se suelta en reposo desde la posición representada, hallar la celeridad v del centro del aro después de que ésta haya dado una vuelta y media. Se supone que no hay resbalamiento y que el contacto entre el aro y la superficie de apoyo es continuo. Asimismo se desprecia la masa del aro.

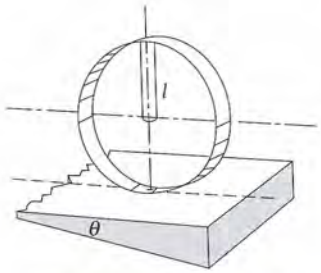


Figura problema 6.140

6.141 El motor eléctrico de la figura entrega una potencia de 4 kW a 1725 rpm a la bomba que acciona. Calcular el ángulo de inclinación δ del motor bajo carga si la constante de cada uno de sus cuatro soportes elásticos es 15 kN/m. ¿En qué sentido gira el motor?

Resp. $\delta = 2{,}11°$, en sentido horario

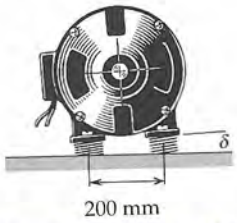


Figura problema 6.141

http://gratislibrospdf.com/

6.142 El centro de la rueda de 100 kg, cuyo radio de giro centroidal es de 100 mm, tiene una velocidad de 0,6 m/s al rodar plano inclinado abajo en la posición representada. Calcular la reacción normal N bajo ella cuando pasa por el punto A. Se supone que no hay deslizamiento.

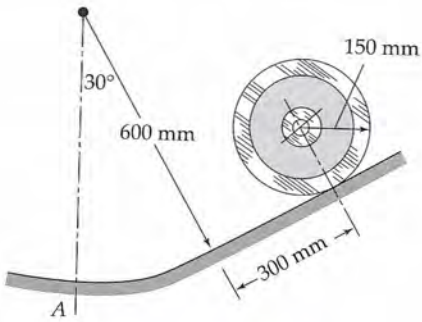


Figura problema 6.142

6.143 Al sistema articulado simétrico, que se pone en movimiento desde el reposo en la posición representada, se le aplica la fuerza vertical constante F. Hallar qué velocidad angular ω adquieren las barras, de masa m_0 cada una, cuando llegan a la posición $\theta = 0$. La rueda es un disco macizo de masa m y gira sin deslizamiento por la superficie horizontal.

$$Resp.\ \omega = \sqrt{\frac{3(F + m_0 g)\ \text{sen}\ \theta}{m_0 b}}$$

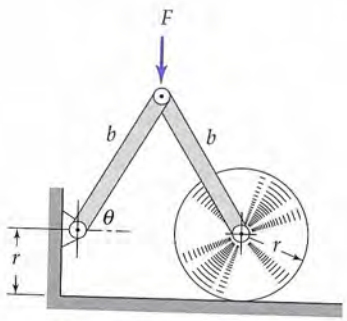


Figura problema 6.143

6.144 El soporte de la tapa del cofre de la figura se quiere diseñar de modo que la velocidad angular de la tapa de 4,5 kg quede limitada a 1,5 rad/s cuando $\theta = 0$ si se suelta en reposo con θ esencialmente igual a 90°. Para ello se dispone de dos mecanismos iguales al representado en el croquis. Especificar la constante k que debe tener cada uno de los dos resortes, los cuales están comprimidos 50 mm en la posición de cierre. Se desprecian el peso de las barras y el rozamiento en los cursores C. Además, el espesor de la tapa es pequeño en comparación a sus otras dimensiones.

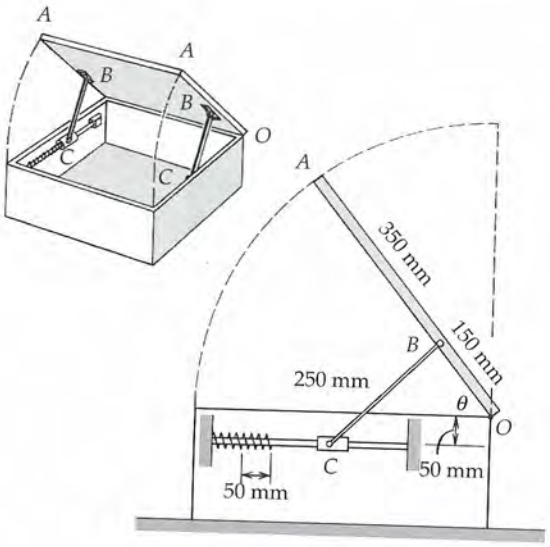


Figura problema 6.144

6.145 La polea de 400 mm de radio tiene una masa de 50 kg y un radio de giro de 300 mm. La polea y su carga de 100 kg cuelgan del cable y del resorte cuya constante es 1,5 kN/m. Si el sistema se abandona desde el reposo estando el resorte alargado 100 mm, hallar la velocidad de O tras un descenso de 50 mm.

Resp. $v = 0{,}757$ m/s

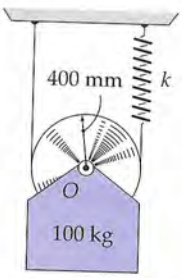


Figura problema 6.145

6.146 La barra uniforme OA de masa 50 kg y longitud $2b = 2{,}4$ m se suelta en reposo desde la posición vertical en que $\theta = 90°$. Cuando $\theta = 90°$, el resorte de constante $k = 1{,}6$ kN/m está sin alargar. Despreciando la masa de las dos barras de articulación, calcular la velocidad angular $\omega = -\dot{\theta}$ de la barra cuando llega a la posición de plegamiento de $\theta = 0$.

http://gratislibrospdf.com/

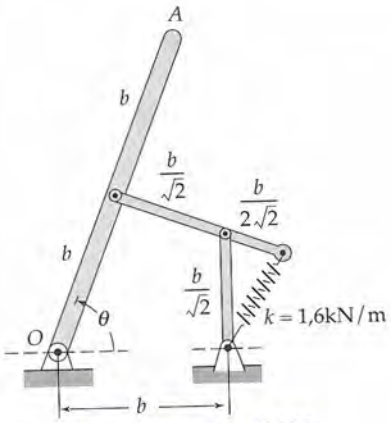


Figura problema 6.146

6.147 Especificar qué longitud no deformada l_0 ha de tener el resorte de constante $k = 1400$ N/m para que el contacto tenga una velocidad de 0,25 m/s al llegar a A partiendo de la posición neutra del conmutador en que $\theta = 0$, que abandona al recibir un leve golpecito. El contactor en T tiene una masa de 1,5 kg y un radio de giro de 55 mm respecto a O. El movimiento tiene lugar en el plano horizontal.

Resp. $l_0 = 90{,}0$ mm

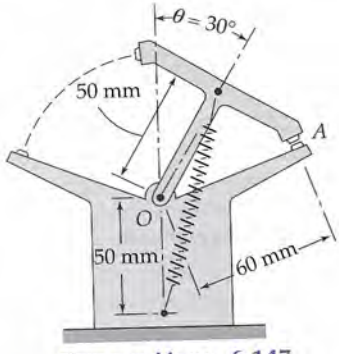


Figura problema 6.147

6.148 El cuerpo de la figura está construido de varilla delgada uniforme y se compone de un anillo de radio r sujeto a una porción recta de longitud $2r$. El cuerpo pivota libremente en torno a la rótula O. Si se encuentra en reposo en la posición vertical representada y recibe un leve impulso, calcular su velocidad angular ω tras una rotación de 90° en torno (*a*) al eje *A*-*A* y (*b*) en torno al eje *B*-*B*.

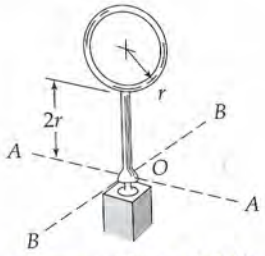


Figura problema 6.148

6.149 La potencia motriz para el autobús experimental de 10 Mg procede de la energía almacenada en un volante de inercia que lleva. La masa de éste es 1500 kg y su radio de giro es 500 mm y se le proporciona una velocidad máxima de 4000 rpm. Si el autobús parte del reposo y adquiere una velocidad de 72 km/h en la cima de la loma situada a 20 m por encima de la posición de salida, calcular la velocidad reducida N del volante. Se supondrá que se pierde el 20% de la energía cedida por el volante. Despreciar la energía cinética de rotación de las ruedas del autobús.

Resp. $N = 3720$ rpm

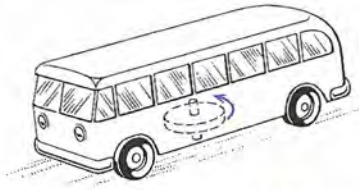


Figura problema 6.149

6.150 En la figura se representa la sección transversal de una puerta de garaje formada por un panel rectangular uniforme de 2,4 x 2,4 m cuya masa es 100 kg. La puerta está dotada de dos dispositivos de resortes, uno a cada lado, como el representado. Los resortes tienen una constante de 700 N/m cada uno y están sin alargar cuando la puerta se encuentra en la posición abierta representada. Si la puerta se suelta desde el reposo en tal posición, calcular la velocidad del borde A cuando llega al suelo del garaje.

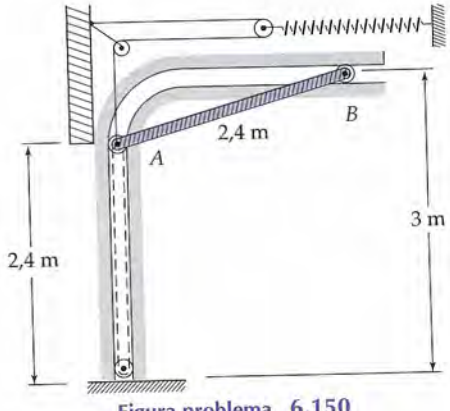


Figura problema 6.150

http://gratislibrospdf.com/

6.151 La varilla delgada uniforme de masa m y longitud L, inicialmente en reposo centrada horizontalmente sobre la superficie circular de radio R, se bascula hasta la posición representada con trazos y se suelta sin velocidad inicial. Hallar la expresión de su velocidad angular ω cuando pasa por la posición horizontal. El rozamiento es suficiente para que no haya deslizamiento.

Resp. $\omega = \frac{2}{L}\sqrt{6gR(\theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)}$

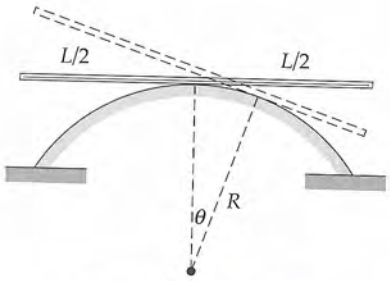


Figura problema 6.151

6.152 El pequeño vehículo se ha diseñado para viajar a gran velocidad sobre la nieve. La llanta continua tiene una masa ρ por unidad de longitud y las ruedas motrices son las delanteras. Determinar la porción M del momento aplicado al eje delantero necesario para dar a ambas llantas su movimiento, correspondiente a una velocidad v del vehículo alcanzada con aceleración constante, en una distancia s partiendo del reposo en terreno llano.

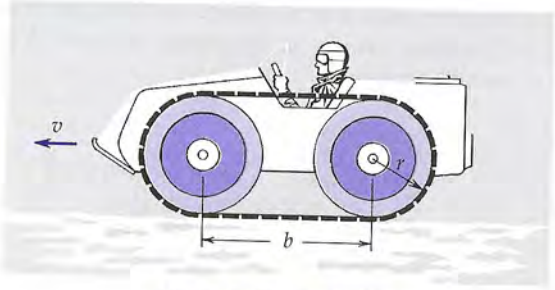


Figura problema 6.152

6.153 Las dos barras uniformes iguales se sueltan en reposo desde la posición representada en el plano vertical. Hallar la velocidad angular ω de AB cuando las barras se alinean.

Resp. $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2b}(2\sqrt{2} - 1)}$

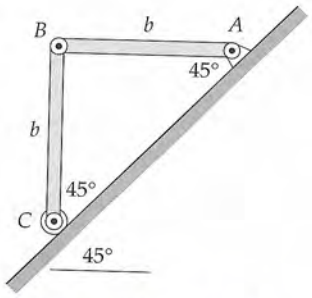


Figura problema 6.153

6.154 La rueda doble de 10 kg, cuyo radio de giro respecto a O es de 125 mm, está conectada al resorte de constante k = 600 N/m mediante una cuerda firmemente arrollada al cubo. Si la rueda se abandona en reposo sobre el plano inclinado y con el resorte alargado 225 mm, calcular la velocidad máxima v de su centro O durante el movimiento subsiguiente. No hay deslizamiento de la rueda.

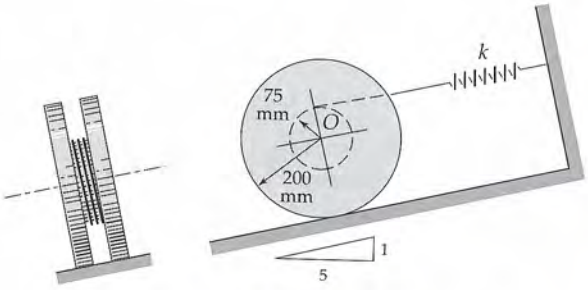


Figura problema 6.154

6.155 Las dos barras esbeltas de masa m y longitud b cada una están articuladas entre sí y se mueven en el plano vertical. Si se sueltan en reposo desde la posición indicada y se mueven jun-

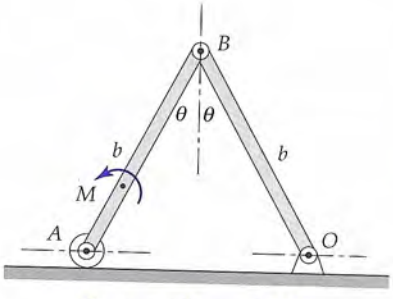


Figura problema 6.155

http://gratislibrospdf.com/

tas bajo la acción de un par de momento de módulo constante M aplicado a AB, hallar la velocidad de A cuando choca con O.

$$Resp. v_A = \sqrt{3\left[\frac{M\theta}{m} - gb(1 - \cos\theta)\right]}$$

6.156 En la figura se muestra la sección de una puerta de ventilación uniforme de 100 kg articulada con bisagras en su borde horizontal superior O. Su posición la controla el cable cargado con un resorte que pasa por la pequeña polea A. El resorte tiene una constante de 200 N por metro de alargamiento y está sin deformar cuando $\theta = 0$. Si la puerta se suelta en reposo desde la posición horizontal, hallar la velocidad angular máxima ω que alcanza y el correspondiente ángulo θ.

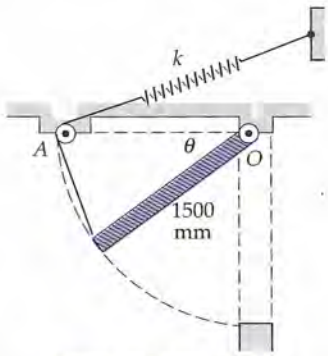


Figura problema 6.156

6.157 Cada una de las bisagras, A y B, de la tapa uniforme de masa m de un cajón de juguetes contiene un resorte de torsión que ejerce un momento resistente $M = K\theta$ sobre la tapa al cerrarse ésta. (*a*) Especificar la rigidez torsional K que debe tener cada resorte para que la velocidad angular de la tapa sea nula cuando la misma llegue a la posición horizontal de cierre ($\theta = \pi/2$) al caer desde $\theta = 0$ sin velocidad inicial. (*b*) ¿Cuál sería su aceleración angular α en la posición cerrada si se soltara desde el reposo? ¿Serían esas bisagras una solución práctica?

$$Resp.\ K = \frac{2mgl}{\pi^2},\ \alpha = 0{,}410\frac{g}{l},\ \text{No}$$

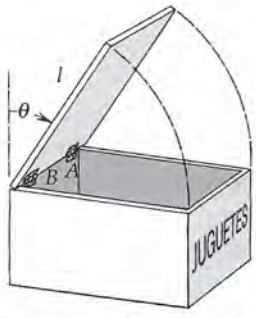


Figura problema 6.157

6.158 Un pequeño vehículo experimental tiene una masa total m de 500 kg, conductor y ruedas incluidos. Las cuatro ruedas tienen una masa de 40 kg y un radio de giro centroidal de 400 mm cada una. La resistencia R por rozamiento al movimiento es 400 N y se mide remolcando el vehículo a velocidad constante a lo largo de una calzada horizontal con el motor desembragado. Determinar la potencia útil del motor a la velocidad de 72 km/h subiendo la rampa del 10% (*a*) a aceleración nula y (*b*) a la aceleración de 3 m/s^2. (*Sugerencia*: La potencia es igual al incremento por unidad de tiempo de la energía total del vehículo más la cantidad de trabajo de rozamiento que se disipa por unidad de tiempo.)

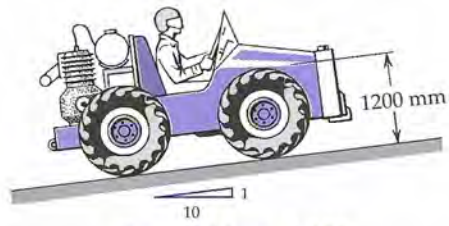


Figura problema 6.158

6.159 La biela y la manivela tienen una masa de 2 kg y un radio de giro centroidal de 60 mm cada una. La corredera B tiene una masa de 3 kg y se mueve libremente por la guía vertical. El resorte tiene una constante de 6 kN/m. Si a la manivela OA se aplica un par de fuerzas constante de momento $M = 20$ m·N, a través de O, y a partir del reposo con $\theta = 45°$, hallar la velocidad angular ω de OA cuando $\theta = 0$.

$$Resp.\ \omega = 9{,}51\ \text{rad/s}$$

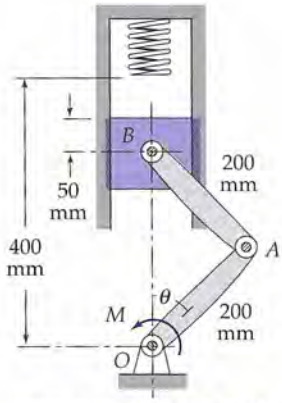


Figura problema 6.159

6.160 Un rollo macizo de papel de envolver, de radio inicial r_0, se abandona en reposo sobre el plano inclinado con su extremo libre inmovilizado en el punto más alto de la pendiente.

http://gratislibrospdf.com/

Hallar su velocidad en función de la distancia x recorrida pendiente abajo. El rollo tiene una longitud total de papel L. ¿Puede hacerse que concuerde la diferencia entre la energía inicial del rollo y la final del papel cuando ha cesado todo movimiento?

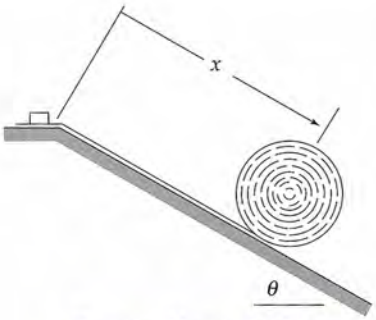


Figura problema 6.160

6.161 El bastidor cuadrado está constituido por cuatro varillas delgadas iguales de longitud b cada una. Si el bastidor se suelta en reposo desde la posición representada, hallar la celeridad de la esquina A (a) después de que A haya descendido una distancia b y (b) después de que A haya descendido una distancia $2b$. La pequeñas ruedas giran sin frotamiento por las ranuras de la superficie vertical.

Resp. (a) y (b) $v_A = \sqrt{\frac{12}{5}gb}$

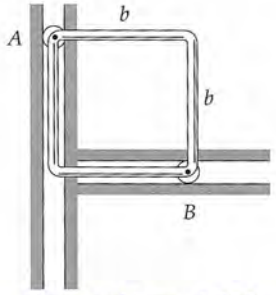


Figura problema 6.161

6.162 La varilla delgada uniforme se suelta en reposo desde la posición representada. ¿Qué celeridad v_A lleva su extremo A cuando golpea contra la rampa inclinada 30°? Se desprecia la masa de los pequeños rodillos y el rozamiento en los mismos.

▶ 6.163 Calcular la fuerza constante P requerida para dar al centro de la polea una velocidad de 1,2 m/s hacia arriba en un ascenso de 0,9 m de dicho punto a partir de la posición de reposo indicada. La polea tiene una masa de 15 kg y un radio de giro de 250 mm y el cable mide 4,5 m y tiene una masa de 3 kg/m.

Resp. $P = 178{,}3$ N

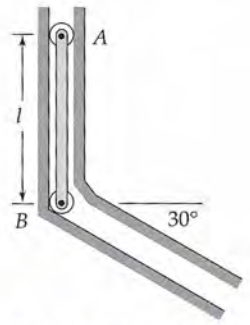


Figura problema 6.162

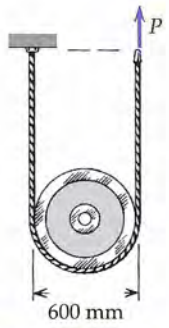


Figura problema 6.163

▶ 6.164 La barra uniforme ABC tiene una masa m y parte del reposo con $\theta = 180°$, en que A, B, C y O están alineados. Si la fuerza aplicada P es de intensidad constante, determinar la velocidad angular ω de la barra cuando B llega a O siendo $\theta = 0$. Las masas del rodillo B y del tensor OC son despreciables. (*Sugerencia:* Sustituir la fuerza P por una fuerza P aplicada en B y un par.)

Resp. $\omega = \sqrt{\frac{6P\pi}{13mb}}$

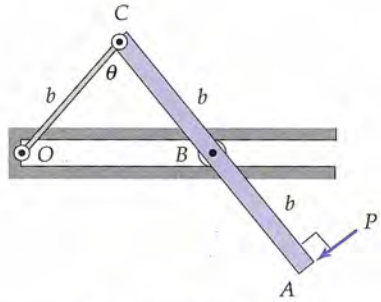


Figura problema 6.164

http://gratislibrospdf.com/

6.7 DETERMINACIÓN DE ACELERACIONES MEDIANTE EL TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS; TRABAJOS VIRTUALES

Además de determinar las velocidades resultantes de la acción de fuerzas que actúan durante intervalos finitos del movimiento, la ecuación que relaciona trabajo con energía se puede emplear para establecer las aceleraciones instantáneas de los miembros de un sistema de cuerpos interconectados debidas a las fuerzas activas aplicadas. O bien puede modificarse la ecuación para establecer la configuración de un tal sistema cuando esté sometido a aceleración constante.

La ecuación 4.3 escrita para un intervalo infinitesimal del movimiento queda en la forma

$$dU' = dT + dV$$

El término dU' representa el trabajo total de todas las fuerzas activas no conservativas que se ejercen sobre el sistema considerado durante el desplazamiento infinitesimal del sistema. En el término dV está incluido el trabajo de las fuerzas conservativas. Si se emplea el subíndice i para designar un cuerpo representativo del sistema de cuerpos interconectados, la variación infinitesimal de la energía cinética T del sistema es

$$dT = d(\Sigma \tfrac{1}{2} m_i \bar{v}_i^{\,2} + \Sigma \tfrac{1}{2} \bar{I}_i \omega_i^{\,2}) = \Sigma m_i \bar{v}_i d\bar{v}_i + \Sigma \bar{I}_i \omega_i d\omega_i$$

donde $d\bar{v}_i$ y $d\omega_i$ son las variaciones respectivas de las magnitudes de las velocidades y donde la suma se extiende a todos los cuerpos del sistema. Pero para cada cuerpo, $m_i \bar{v}_i d\bar{v}_i = m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i$ e $\bar{I}_i \omega_i \, d\omega_i = \bar{I}_i \alpha_i \, d\theta_i$, donde $d\bar{\mathbf{s}}_i$ representa el desplazamiento lineal infinitesimal del centro de masa y $d\theta_i$ representa el desplazamiento angular infinitesimal del cuerpo en el plano del movimiento. Obsérvese que $\bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i$ es igual a $(\bar{a}_i)_t \, d\bar{s}_i$, donde $(\bar{a}_i)_t$ es la componente de $\bar{\mathbf{a}}_i$ según la tangente a la curva descrita por el centro de masa del cuerpo en cuestión. Al mismo tiempo, α_i representa a $\ddot{\theta}_i$, aceleración angular del cuerpo representativo. En consecuencia, para el sistema completo

$$dT = \Sigma m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \bar{I}_i \alpha_i \, d\theta_i$$

Esta variación puede también escribirse en la forma

$$dT = \Sigma \mathbf{R}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \mathbf{M}_{G_i} \cdot d\boldsymbol{\theta}_i$$

donde $\mathbf{R}_i$ y $\mathbf{M}_{G_i}$ son la fuerza y el momento resultantes que se ejercen sobre el cuerpo i y donde $d\boldsymbol{\theta}_i = d\theta_i \mathbf{k}$. Estas dos últimas ecuaciones sólo ponen de manifiesto que la variación infinitesimal de energía cinética es igual al trabajo elemental efectuado sobre el cuerpo por la fuerza y el par resultante.

El término dV representa la variación infinitesimal de la energía potencial gravitatoria total V_g y de la energía potencial elástica total V_e y tiene la forma

$$dV = d(\Sigma m_i g h_i + \Sigma \tfrac{1}{2} k_j x_j^{\,2}) = \Sigma m_i g \, dh_i + \Sigma k_j x_j \, dx_j$$

http://gratislibrospdf.com/

donde h_i representa la distancia vertical del centro de masa del cuerpo representativo de masa m_i por encima de un plano de referencia conveniente y donde x_i representa la deformación, de tracción o de compresión, de un miembro elástico representativo del sistema (resorte) cuya constante es k_j.

La expresión completa de dU' puede ahora escribirse en la forma

$$dU' = \Sigma m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \bar{I}_i \alpha_i \, d\theta_i + \Sigma m_i g \, dh_i + \Sigma k_j x_j \, dx_j \qquad (6.11)$$

Al aplicar la ecuación 6.11 a un sistema de un grado de libertad, los términos $m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i$ e $\bar{I}_i \alpha_i \, d\theta_i$ serán positivos si las aceleraciones tienen el mismo sentido que los desplazamientos respectivos y negativos si tienen sentidos opuestos. La ecuación 6.11 tiene la ventaja de relacionar directamente las aceleraciones con las fuerzas activas, lo cual elimina la necesidad de desmembrar el sistema y eliminar después las fuerzas interiores y fuerzas reactivas al resolver el sistema de ecuaciones fuerza-masa-aceleración, escritas para cada uno de los miembros por separado.

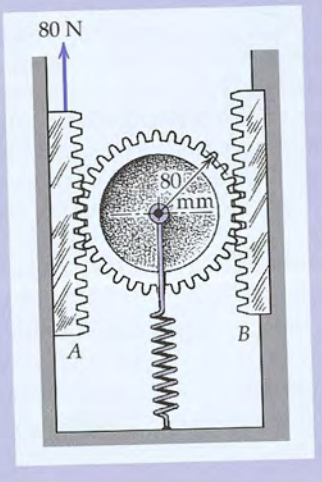
Trabajos virtuales. En la ecuación 6.11 los movimientos infinitesimales son variaciones infinitesimales de los desplazamientos reales. Para un sistema mecánico que adquiera una configuración estacionaria durante una aceleración constante suele ser conveniente introducir el concepto de *trabajo virtual*. Los conceptos de trabajo virtual y desplazamiento virtual ya se introdujeron y emplearon para resolver configuraciones de equilibrio en sistemas estáticos de cuerpos interconectados (véase el capítulo 7 del *Tomo I, Estática*). Un desplazamiento virtual es todo desplazamiento imaginado y arbitrario, lineal o angular, que aparte al sistema de la posición natural o real. En el caso de un sistema de cuerpos conectados, los desplazamientos virtuales han de ser compatibles con las ligaduras del sistema. Por ejemplo, cuando un extremo de una barra está articulado mediante un pasador fijo, el desplazamiento virtual del otro extremo debe ser perpendicular a la recta que une ambos extremos. Estos requisitos de compatibilidad de los desplazamientos con las ligaduras son puramente cinemáticos, es decir, tienen que ver con la geometría de los movimientos posibles y proporcionan las llamadas *ecuaciones de ligadura*. Si se da a un sistema mecánico un conjunto de desplazamientos virtuales que contengan las ecuaciones de ligadura y que son, por tanto, compatibles con las ligaduras, se establecerá la relación adecuada entre las coordenadas que especifican la configuración del sistema aplicando la ecuación 6.11 que expresa la relación entre el trabajo y la energía escrita en términos de variaciones virtuales. Entonces

$$\delta U' = \Sigma m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot \delta\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \bar{I}_i \alpha_i \, \delta\theta_i + \Sigma m_i g \, \delta h_i + \Sigma k_j x_j \, \delta x_j \qquad (6.11a)$$

Se acostumbra a emplear el signo d de diferencial para referirse a variaciones infinitesimales en desplazamientos reales, mientras que se emplea el signo δ para representar variaciones infinitesimales que se imaginan, o sea, variaciones *virtuales*.

http://gratislibrospdf.com/

La cremallera movible A tiene una masa de 3 kg y la cremallera B está fija. La rueda dentada tiene una masa de 2 kg y un radio de giro de 60 mm. En la posición de la figura, el resorte de constante 1,2 kN/m está alargado una longitud de 40 mm. Para el instante representado, determinar la aceleración a de la cremallera A bajo la acción de la fuerza de 80 N. El plano de la figura es vertical.



Solución. La figura representa el diagrama de fuerzas activas de todo el sistema, que es conservativo. (1)

Durante un desplazamiento ascendente infinitesimal dx de la cremallera A, el trabajo efectuado dU' sobre el sistema es 80 dx, donde x son metros, y este trabajo es igual a la suma de las variaciones correspondientes de la energía total del sistema. Estos cambios, según aparecen en la ecuación 6.11, son los siguientes

$$[dT = \Sigma m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \bar{I}_i \alpha_i \, d\theta_i]$$

$$dT_{\text{crem}} = 3a \, dx$$

$$dT_{\text{engr}} = 2\frac{a}{2}\frac{dx}{2} + 2(0{,}06)^2\frac{a/2}{0{,}08}\frac{dx/2}{0{,}08} = 0{,}781a \, dx \quad (2)$$

La variación de las energías potenciales del sistema incluidas en la ecuación 6.11 resultan

$$[dV = \Sigma m_i g \, dh_i + \Sigma k_j x_j \, dx_j]$$

$$dV_{\text{crem}} = 3g \, dx = 3(9{,}81) \, dx = 29{,}4 \, dx$$

$$dV_{\text{engr}} = 2g(dx/2) = g \, dx = 9{,}81 \, dx$$

$$dV_{\text{res}} = k_j x_j \, dx_j = 1200(0{,}04) \, dx/2 = 24 \, dx \quad (3)$$

Al aplicar estos valores en la ecuación 6.11 resulta

$$80 \, dx = 3a \, dx + 0{,}781a \, dx + 29{,}4 \, dx + 9{,}81 \, dx + 24 \, dx$$

Dividiendo por dx y despejando a obtenemos

$$a = 16{,}76/3{,}781 = 4{,}43 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Vemos pues que aplicando el teorema de las fuerzas vivas a un desplazamiento infinitesimal se obtiene directamente la relación entre la fuerza exterior y la aceleración resultante. No ha sido necesario desmembrar el sistema, dibujar dos diagramas para sólido libre, aplicar $\Sigma F = m\bar{a}$ dos veces, aplicar $\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$ y $F = kx$ ni eliminar términos indeseados y finalmente despejar a.

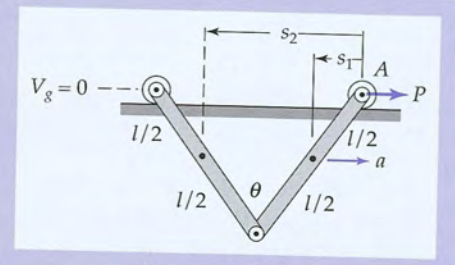
(1) **Obsérvese que ninguna de las demás fuerzas exteriores al sistema realiza trabajo. El trabajo efectuado por el peso y el resorte se incluye en los términos de la energía potencial.**

(2) **Obsérvese que $\bar{a}_i$ para la rueda dentada es la aceleración de su centro de masa, que es la mitad de la aceleración de la cremallera A. Además, su desplazamiento es $dx/2$. Para la rueda dentada, la aceleración angular que figura en $a = r\alpha$ es $\alpha_1 = (a/2)/0{,}08$ y el desplazamiento angular que figura en $ds = rd\theta$ es $d\theta_i = (dx/2)/0{,}08$.**

(3) **Obsérvese aquí que el desplazamiento del resorte es la mitad del desplazamiento de la cremallera; por tanto, $x_j = x/2$.**

http://gratislibrospdf.com/

Una fuerza constante P se aplica al extremo A de dos barras idénticas y uniformes y les origina un movimiento hacia la derecha en su plano vertical con una aceleración horizontal a. Determinar el ángulo estable θ que forman las barras entre ellas.



Solución. La figura constituye el diagrama de fuerzas activas del sistema. Para hallar la configuración estable, considerar un desplazamiento virtual de cada barra desde su supuesta posición natural durante la aceleración. La medida del desplazamiento con respecto al extremo A elimina cualquier trabajo hecho por la fuerza P durante el desplazamiento virtual; o sea,

(1) $$\delta U' = 0$$

(2) Según 6.11*a*, la variación virtual de la energía cinética es

$$\delta T = \Sigma m\bar{\mathbf{a}} \cdot \delta\bar{\mathbf{s}} = ma(-\delta s_1) + ma(-\delta s_2)$$

$$= -ma\left[\delta\left(\frac{l}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) + \delta\left(\frac{3l}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

(3) $$= -ma\left(l\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta\right)$$

Como origen de energía potencial tomamos la horizontal que pasa por A. Entonces la energía potencial de las barras será

$$V_g = 2mg\left(-\frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

y la variación virtual de energía potencial se hace

$$\delta V_g = \delta\left(-2mg\,\frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = \frac{mgl}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,\delta\theta$$

Aplicando estos valores en la ecuación 6.11*a* que expresa el teorema de las fuerzas vivas para variaciones virtuales resulta

$$[\delta U' = \delta T + \delta V_g] \qquad 0 = -mal\cos\frac{\theta}{2}\delta\theta + \frac{mgl}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,\delta\theta$$

de donde

$$\theta = 2\operatorname{arctg}\frac{2a}{g} \qquad \textit{Resp.}$$

En este problema comprobamos otra vez que el procedimiento basado en el teorema de las fuerzas vivas suprime la necesidad de desmembrar el sistema, dibujar diagramas para sólido libre separados, aplicar ecuaciones de movimiento, eliminar términos indeseados y despejar θ.

(1) **Obsérvese que el símbolo δ se emplea para representar una variación infinitesimal hipotética o virtual en lugar del símbolo d, que se refiere a una variación infinitesimal durante un desplazamiento real.**

(2) **Al calcular δT lo que buscamos es la variación de T consecuencia de una variación virtual del desplazamiento. Por tanto, hemos de emplear $m\mathbf{a}\cdot\delta\mathbf{s}$ y no la expresión $\delta(\frac{1}{2}1/2mv^2)$, que representa la variación de T consecuencia de una variación de v.**

(3) **Para describir la configuración de las barras hemos tomado el ángulo θ, aunque de la misma forma podríamos haber empleado la distancia entre ambas barras.**

http://gratislibrospdf.com/

Problemas introductorios

6.165 La carga de masa m está soportada por las barras articuladas paralelas de masa despreciable y el tope fijo A. Hallar la aceleración angular inicial α de las barras a consecuencia de la aplicación del par M a uno de los extremos del modo indicado.

Resp. $\alpha = \dfrac{M}{mb^2} - \dfrac{g}{b}\operatorname{sen}\theta$

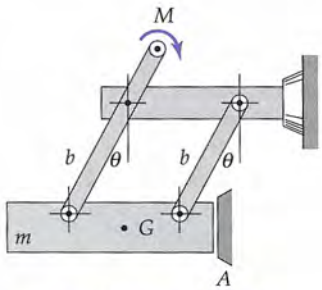


Figura problema 6.165

6.166 En la figura se muestra la barra delgada uniforme de masa m en su posición de equilibrio antes de la aplicación de la fuerza P. Calcular su aceleración angular inicial al serle aplicada la fuerza P.

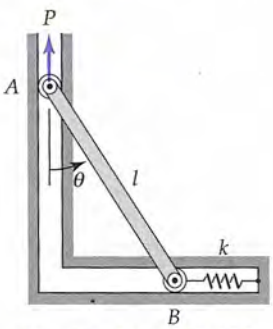


Figura problema 6.166

6.167 Las barras articuladas A y B tienen una masa de 4 kg cada una y la barra C tiene una masa de 6 kg. Calcular el ángulo θ al que se colocan las barras si el cuerpo al que están unidas recibe una aceleración horizontal constante a de 1,2 m/s^2.

Resp. $\theta = 7{,}0°$

6.168 La caja cargada del camión volquete tiene una masa m con centro de masa en G y un momento de inercia I_A respecto al eje A. Hallar la aceleración angular α de la caja cuando se pone en movimiento desde la posición indicada por la aplicación del par M a la barra CD. Se desprecian las masas de las barras.

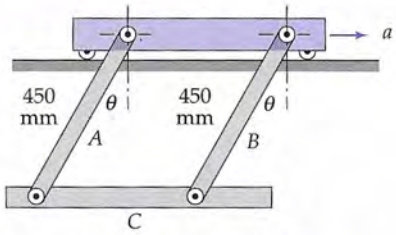


Figura problema 6.167

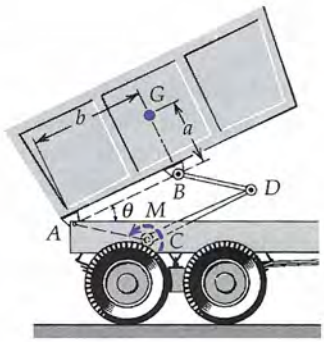


Figura problema 6.168

6.169 Si se duplica la fuerza P necesaria para mantener en equilibrio la roldana de 25 kg y su carga de 50 kg, calcular la aceleración a del centro O de la roldana. El radio de giro de ésta respecto a su centro es de 150 mm.

Resp. $a = 8{,}26$ m/s^2

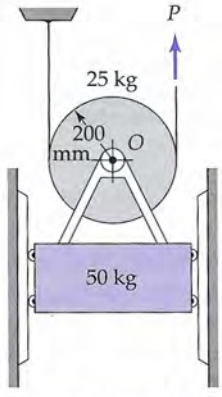


Figura problema 6.169

http://gratislibrospdf.com/

Problemas representativos

6.170 Las barras delgadas articuladas, de masa m cada una, se mueven en el plano vertical. Si el sistema se pone en movimiento en la posición $\theta = 60°$, hallar la aceleración angular inicial α de las barras.

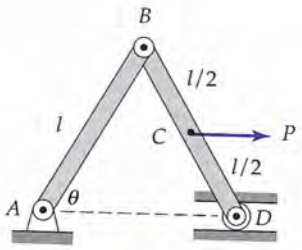


Figura problema 6.170

6.171 El bloque deslizante recibe una aceleración horizontal hacia la derecha que aumenta lentamente hasta un valor estacionario a. El péndulo a él unido, de masa m y centro de masa G, adquiere una desviación permanente θ. El resorte de torsión montado en O ejerce sobre el péndulo un momento $M = K\theta$ opuesto a la desviación. Hallar la rigidez a la torsión (constante) K correspondiente a cada desviación estacionaria θ.

$$Resp.\ K = \frac{m\bar{r}}{\theta}(a\cos\theta - g\,\text{sen}\,\theta)$$

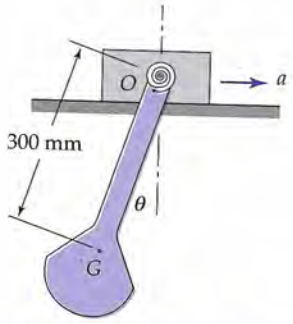


Figura problema 6.171

6.172 La caja de carga del camión de alimentos para servicio de aeronaves tiene una masa en carga m y se eleva por la aplicación de un par de momento M al extremo inferior de la barra articulada al bastidor del camión. Las ranuras horizontales permiten abrirse al sistema articulado para elevar la caja de carga. Determinar la aceleración ascendente de la caja en función de h para un valor dado de M. Despreciar la masa de las barras.

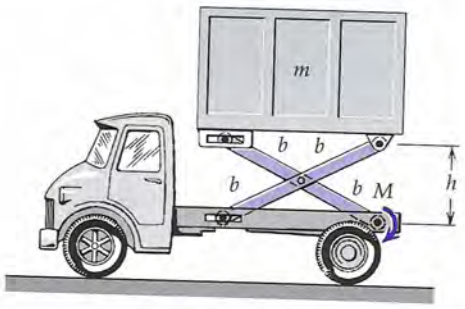


Figura problema 6.172

6.173 Los tres paneles uniformes e iguales de una puerta de taller segmentada tienen una masa m cada uno y son guiados por las pistas (que se representan a trazos). Hallar la aceleración horizontal a del panel superior bajo la acción de la fuerza P. Se desprecian los rozamientos en los rodillos de guía.

$$Resp.\ a = \frac{3}{8}\left(\frac{P}{m} - \frac{3g}{2}\right)$$

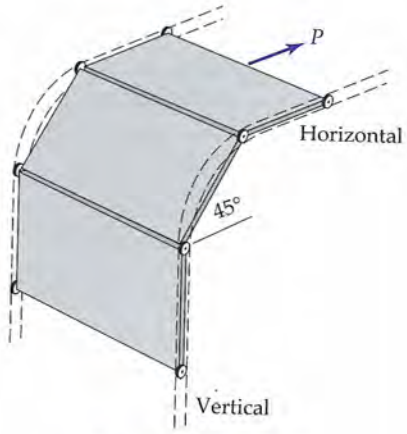


Figura problema 6.173

6.174 El cilindro hidráulico A ejerce una fuerza ascendente P sobre la articulación B de la barra uniforme BC de masa m. Des-

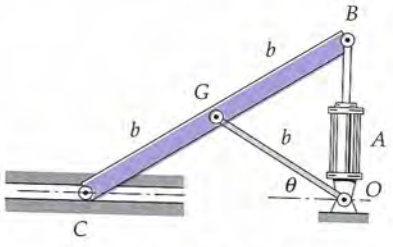


Figura problema 6.174

http://gratislibrospdf.com/

preciando la masa de la barra OG, hallar la aceleración angular α de BC cuando ésta se pone en movimiento desde la posición indicada. El movimiento se ejecuta en el plano vertical.

6.175 Merced a la aplicación de las fuerzas P la carga de masa m recibe una aceleración ascendente a cuando está en reposo en sus apoyos. Despreciando la masa del sistema de barras articuladas, hallar la aceleración inicial a.

$$Resp.\ a = \frac{2P}{5m} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - g$$

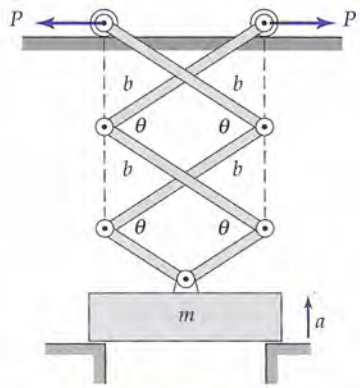


Figura problema 6.175

6.176 El sector con las ruedas unidas a él se sueltan en reposo desde la posición representada en el plano vertical. Cada rueda es una disco macizo de masa 5 kg que rueda sin deslizamiento sobre la trayectoria circular fija. El sector tiene una masa de 8 kg y puede asimilarse muy aproximadamente a un cuarto de disco macizo de 400 mm de diámetro. Hallar la aceleración angular inicial α del sector.

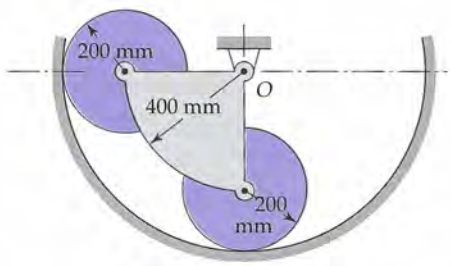


Figura problema 6.176

6.177 El andamio trasladable se eleva mediante los dos cilindros hidráulicos articulados en los puntos C. La presión hace que cada cilindro genere una fuerza F. El andamio, el operario y la carga poseen una masa conjunta m y puede despreciarse la masa del sistema de barras articuladas. Hallar la aceleración ascendente a de la plataforma y demostrar que es independiente de b y θ.

$$Resp.\ a = \frac{F}{2m} - g$$

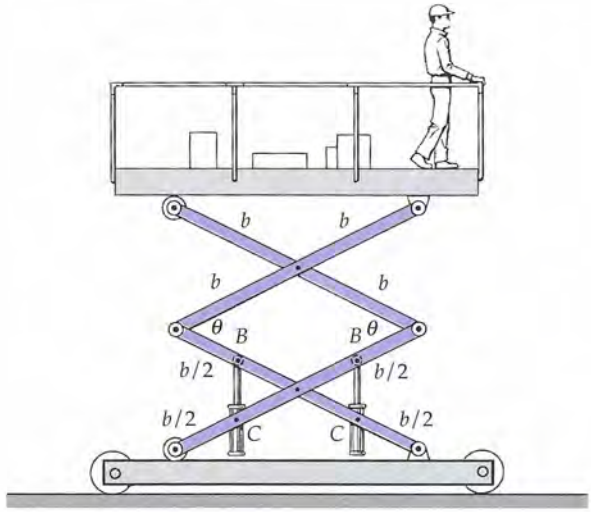


Figura problema 6.177

6.178 La plataforma horizontal de masa m está soportada por cuatro barras articuladas uniformes, dos a cada lado tal como se muestra. En la posición de reposo el borde izquierdo descansa sobre la repisa inmóvil. Hallar el momento M del par que debe aplicarse a una de las barras para que éstas adquieran una aceleración angular inicial α. Las barras pueden tratarse cada una como una barra delgada de masa m_0.

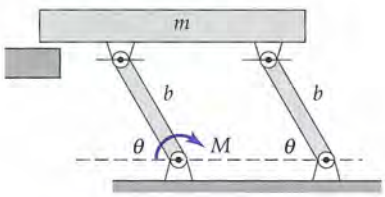


Figura problema 6.178

6.179 Las barras uniformes OA y OB tienen una masa de 2 kg cada una y están articuladas en O al eje vertical, que está animado de una aceleración ascendente $a = g/2$. Las varillas que conectan al collarín sin peso C a las barras son de peso despreciable y el collarín se desliza libremente por el eje. La constante del resorte es 130 N/m y para $\theta = 0$ está sin deformar. Calcular

http://gratislibrospdf.com/

el ángulo θ que adoptan las barras en condiciones de aceleración constante.

Resp. $\theta = 64{,}3°$

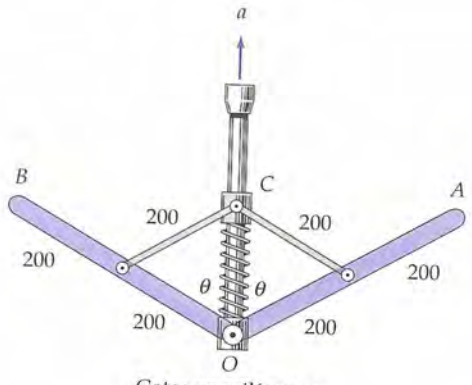


Figura problema 6.179

6.180 El piñón A del motor eléctrico acciona la corona B y a su tambor solidario C. El rotor del motor y el piñón poseen una masa conjunta de 30 kg y un radio de giro de 150 mm. La corona B y el tambor C poseen una masa conjunta de 95 kg con un radio de giro de 300 mm. El motor recibe una potencia eléctrica de 1,2 kW, el 94% de la cual convierte en potencia mecánica. Para el instante en que la velocidad ascendente del cilindro de 80 kg es de 0,9 m/s, calcular su correspondiente aceleración ascendente a.

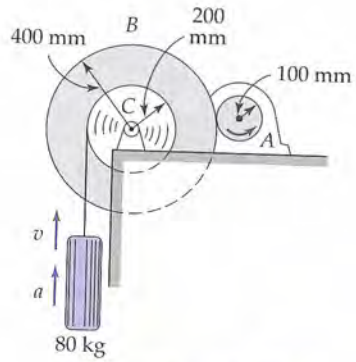


Figura problema 6.180

6.181 El tacómetro mecánico mide la velocidad de rotación N del árbol merced al movimiento horizontal del collar B a lo largo del propio árbol. Este movimiento lo causa el efecto centrífugo de las dos masas A de 350 g que giran con el árbol. El collar C está fijo al árbol. Hallar la velocidad de rotación N del árbol para una lectura $\beta = 15°$. La constante del resorte es 900 N/m y está sin comprimir cuando $\theta = 0$ y $\beta = 0$. Despreciar el peso del varillaje.

Resp. $N = 132{,}8$ rpm

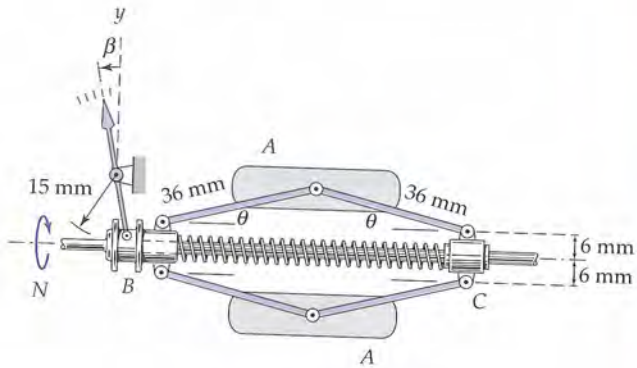


Figura problema 6.181

6.182 La barra de masa m está soportada en el plano vertical por las dos barras articuladas uniformes de masa m_0 cada una. Sin desmembrar el sistema, hallar la aceleración descendente inicial a de la barra horizontal si repentinamente se rompe el alambre que sujeta los extremos inferiores de las barras de soporte. Estas pueden tratarse como varillas delgadas y se desprecian todos los rozamientos.

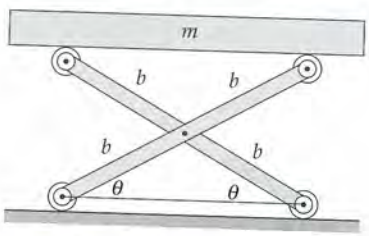


Figura problema 6.182

6.183 El elevador de la figura está diseñado para elevar un hombre en dirección vertical. Un mecanismo interno en B hace que el ángulo entre AB y BC sea doble que el ángulo θ entre BC y el suelo. Si la masa total del operario y la cabina es de 200 kg y todas las otras masas se desprecian, determinar el momento M aplicado a BC en C y el momento M_B en la unión B requeridos para dar a la cabina una aceleración vertical ascendente de 1,2 m/s^2 cuando parte del reposo en la posición $\theta = 30°$.

Resp. $M_B = 11{,}44$ kN · m, $M = 0$

http://gratislibrospdf.com/

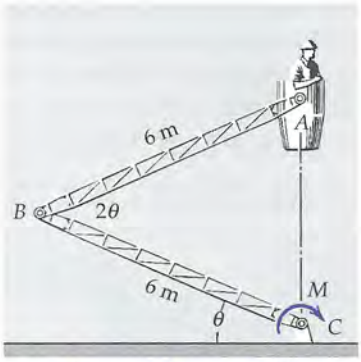


Figura problema 6.183

cualquier valor de θ. La masa de la varilla OC es despreciable y la guía lisa es horizontal.

$$Resp.\ \alpha = \left(\frac{3P}{mb}\right)\frac{2+\cos\theta}{7+6\cos\theta}$$

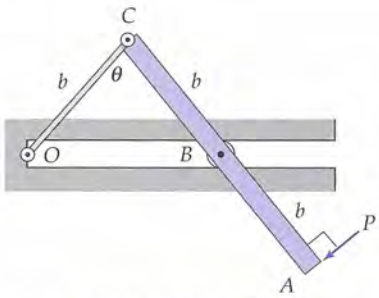


Figura problema 6.184

▶ **6.184** Se reproduce aquí la barra deslizante de masa m del problema 6.164. Hallar la aceleración angular de AC debida a la acción de la fuerza P cuando la barra parte del reposo para

SECCIÓN C. IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

6.8 RELACIONES ENTRE EL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y EL MOMENTO CINÉTICO

En los apartados 3.9 y 3.10 se desarrollaron y aplicaron los principios referentes al impulso, la cantidad de movimiento y el momento cinético para la descripción del movimiento de un punto material. Se vio entonces que tales principios eran de importancia especial cuando las fuerzas aplicadas podían expresarse en función del tiempo y cuando las acciones recíprocas entre los puntos materiales tenían lugar durante períodos muy cortos, como en el caso de los choques. Cuando esos principios se aplican al movimiento de cuerpos rígidos, las ventajas son similares.

En el apartado 4.2 se ampliaron esos principios para cubrir cualquier sistema definido de puntos materiales carente de restricciones en lo que respecta a las conexiones entre los puntos del sistema. Estas relaciones ampliadas son aplicables todas al movimiento del cuerpo rígido, pues éste no es más que un caso particular de sistema material general. Esas relaciones vamos ahora a aplicarlas al movimiento bidimensional del cuerpo rígido.

(a) Cantidad de movimiento. En el apartado 4.4 definimos que la cantidad de movimiento de un sistema material es la suma (vectorial) de las cantidades de movimiento de todos sus puntos materiales y escribimos $\mathbf{G} = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$. Si $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición del punto de masa m_i, será $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ y $\mathbf{G} = \Sigma m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ que, si la masa total del sistema permanece constante, puede escribirse $\mathbf{G} = d(\Sigma m_i \mathbf{r}_i)/dt$. Sustituyendo en ésta $\Sigma m_i \mathbf{r}_i$ por su igual $m\bar{\mathbf{r}}$, la expresión de la cantidad de movimiento queda $\mathbf{G} = d(m\bar{\mathbf{r}}\ )/dt = m\dot{\bar{\mathbf{r}}}$, donde $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ es la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ del centro de masa. Por tanto, como antes, resulta que la cantidad de movimiento del sistema material, rígido o no rígido, es

$$\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}} \qquad [4.5]$$

http://gratislibrospdf.com/

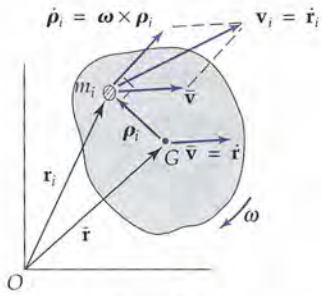


Figura 6.13

Se observará que en la deducción de la ecuación 4.5 fue innecesario emplear la condición cinemática de rigidez del sistema material (fig. 6.13), que es $\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$. En tal caso el resultado es el mismo escribiendo $\mathbf{G} = \Sigma m_i\,(\bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)$. En efecto, la primera suma es $\bar{\mathbf{v}}\Sigma m_i = m\bar{\mathbf{v}}$, y la segunda queda $\boldsymbol{\omega} \times \Sigma m_i \boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{\omega} \times m\bar{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$, ya que $\boldsymbol{\rho}_i$ se mide desde el centro de masa y $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ resulta nulo.

Siguiendo en el apartado 4.4, escribimos allí de nuevo la segunda ley de Newton generalizada bajo la forma de la ecuación 4.6. Esa ecuación y su integral son

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}} \qquad \text{y} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{F}\, dt = \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1 \tag{6.12}$$

Estas ecuaciones 6.12 pueden descomponerse en sus componentes escalares, lo que en el caso de movimiento en el plano x-y da

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \dot{G}_x \\ \Sigma F_y &= \dot{G}_y \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x\, dt &= G_{x_2} - G_{x_1} \\ \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y\, dt &= G_{y_2} - G_{y_1} \end{aligned} \tag{6.12a}$$

Expresado en palabras, las primeras de las ecuaciones 6.12 y en 6.12*a* establecen que la fuerza resultante es igual a la variación de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo. Las formas integradas de las ecuaciones 6.12 y 6.12*a* establecen que el impulso sufrido por el cuerpo en el intervalo $t_2 - t_1$ es igual a la variación correspondiente de la cantidad de movimiento. Otra manera de escribir las relaciones entre impulso y cantidad de movimiento sería la expresada por la ecuación 3.23*a*, donde el orden de los términos corresponde a la secuencia natural de los acontecimientos. Al igual que en la formulación mediante la segunda ley de Newton, en las ecuaciones 6.12 y 6.12*a* los sumatorios deben incluir *todas* las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo. Por consiguiente, hemos de recalcar que al emplear el teorema de la cantidad de movimiento, es fundamental construir el diagrama para sólido libre completo con el fin de poner de manifiesto todas las fuerzas que aparecen en el sumatorio. Al contrario de lo que ocurre con el teorema de las fuerzas vivas, aquí todas las fuerzas ejercen impulsos, trabajen o no trabajen.

(b) Momento cinético. Por definición, el momento cinético es el momento de la cantidad de movimiento. En el apartado 4.4 el momento cinético respecto al centro de masa de un sistema material cualquiera dado lo expresamos como $\mathbf{H}_G = \Sigma \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \mathbf{v}_i$, que no es más que la suma (vectorial) de los momentos respecto a G de las cantidades de movimiento de todos los puntos materiales. En el apartado 4.4 vimos que esta suma podía escribirse también como $\mathbf{H}_G = \Sigma \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$, donde $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ es la velocidad de m_i respecto a G. Aunque esta expresión la simplificamos en el apartado 6.2, en el transcurso de la deducción de la ecuación de momentos del movimiento, proseguiremos utilizándola para resaltar su significado empleando el cuerpo rígido en movimiento plano representado en la figura 6.13. La velocidad relativa se hace $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$, siendo $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ la velocidad angular del cuerpo, en la que el vector unitario $\mathbf{k}$ está dirigido *hacia* el papel en correspondencia con el sentido de $\boldsymbol{\omega}$ indicado. Como $\boldsymbol{\rho}_i$, $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ y $\boldsymbol{\omega}$ forman ángulos rectos entre sí, el módulo de $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ es $\rho_i\omega$ y el módulo de $\boldsymbol{\rho}_i \times m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ es $\rho_i^2\omega m_i$. Así pues, podemos escribir $\mathbf{H}_G = \Sigma\rho_i^2 m_i \omega\mathbf{k} = \bar{I}\,\omega\mathbf{k}$, donde $\bar{I} = \Sigma m_i\rho_i^2$ es el momento de inercia del cuerpo respecto a su centro de masa. Como el momento cinético es siempre un vector normal al plano del movi-

http://gratislibrospdf.com/

miento, la notación vectorial es generalmente innecesaria y el momento cinético respecto al centro de masa puede escribirse como el escalar

$$H_G = \bar{I}\omega \tag{6.13}$$

Este momento cinético es el que aparece en la expresión 4.9 del teorema del momento cinético, cuya forma escalar para un movimiento plano, junto con su integral, es

$$\Sigma M_G = \dot{H}_G \quad \text{y} \quad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_G \, dt = H_{G_2} - H_{G_1} \tag{6.14}$$

Expresado en palabras, la primera de las ecuaciones 6.14 establece que la suma de los momentos respecto al centro de masa de *todas* las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es igual a la variación por unidad de tiempo del momento cinético respecto al centro de masa. La forma integrada de 6.14 establece que el impulso angular en torno al centro de masa de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo durante el intervalo $t_2 - t_1$ es igual a la variación correspondiente del momento cinético respecto a G. De nuevo, lo mismo que en el caso del movimiento lineal, la relación entre el impulso angular y el momento cinético puede también escribirse en forma equivalente a la de la ecuación 3.29*a*. El sentido de rotación positivo debe especificarse con toda claridad y los signos algebraicos de ΣM_G, H_{G_2} y H_{G_1} deben ser congruentes con él. En este caso, es también fundamental un diagrama para sólido libre.

Puesto que $H_G = \bar{I}\omega$ contiene los momentos respecto a G de las cantidades de movimiento de todos los puntos materiales, se deduce que el vector cantidad de movimiento $\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}$ se debe tomar de modo que pase por el centro de masa G, según se indica en la figura 6.14*a*, Así pues, $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}_G$ tienen propiedades vectoriales análogas a las de la fuerza resultante y el momento resultante.

Establecidos en la figura 6.14*a* la cantidad de movimiento y momento cinético resultantes, el momento cinético H_0 respecto a un punto O cualquiera podrá escribirse en la forma

$$H_O = \bar{I}\omega + m\bar{v}d \tag{6.15}$$

Esta expresión es válida en un instante particular cualquiera para O, que puede ser un punto fijo o en movimiento, situado sobre el cuerpo o fuera de él.

Cuando un cuerpo gira alrededor de un punto fijo O situado en el cuerpo o en su prolongación, como se indica en la figura 6.14*b*, en la expresión de H_O podrán sustituirse $\bar{v}$ y d por las relaciones $\bar{v} = \bar{r}w$ y $d = \bar{r}$ dando $H_O = (\bar{I}\omega + m\bar{r}^2\omega)$. Pero $\bar{I} + m\bar{r}^2 = I_O$, por lo que

$$H_O = I_O\omega \tag{6.16}$$

En el apartado 4.2 dedujimos la ecuación 4.7, que es el teorema del momento cinético referido a un punto fijo O. Esta ecuación, escrita en forma escalar para un movimiento plano, junto con su forma integral es

$$\Sigma M_O = I_O\dot{\omega} \quad \text{y} \quad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O \, dt = I_O(\omega_2 - \omega_1) \tag{6.17}$$

Además de dibujar un diagrama para sólido libre completo para poder estimar correctamente los sumatorios de fuerzas y momentos en el momento de aplicar al movimiento de un cuerpo rígido los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético, resulta de gran utilidad dibujar un diagrama

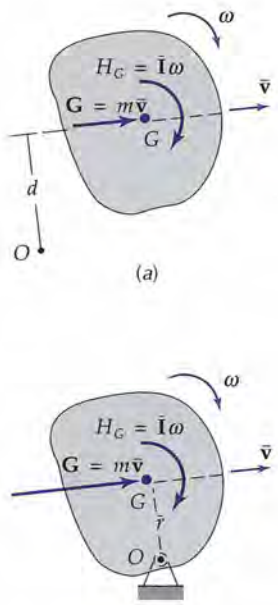


Figura 6.14

http://gratislibrospdf.com/

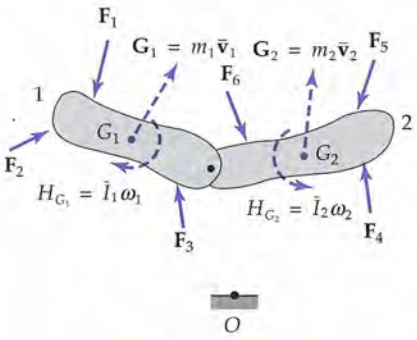


Figura 6.15

donde figuren el vector cantidad de movimiento resultante y el par asociado al momento cinético. Se previene al lector para que no sume cantidades de movimiento con momentos cinéticos, por la misma razón de que fuerzas y momentos de fuerzas no pueden sumarse directamente.

(c) Cuerpos rígidos interconectados. También pueden emplearse los teoremas de la cantidad de movimiento del momento cinético en el caso de un sistema de cuerpos rígidos interconectados ya que dichos teoremas son aplicables a todo sistema general de masa constante. En la figura 6.15 se han representado dos cuerpos de un número cualquiera de cuerpos interconectados. Las ecuaciones 4.6 y 4.7, que son $\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$ y $\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$, donde O es un punto de referencia fijo, pueden escribirse para cada miembro del sistema y sumarse. Las sumas serían

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}_1 + \dot{\mathbf{G}}_2 + \ldots$$
$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_{O_1} + \dot{\mathbf{H}}_{O_2} + \ldots \qquad (6.18)$$

En forma integral para un intervalo de tiempo finito, estas expresiones son

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{F}\, dt = (\Delta\mathbf{G})_{\text{sistema}} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{M}_O\, dt = (\Delta\mathbf{H}_O)_{\text{sistema}} \qquad (6.19)$$

Se observa que las acciones y reacciones iguales y opuestas que se ejercen en las conexiones son interiores al sistema y se anulan entre sí, por lo que no es preciso calcularlas. También se hace notar que el punto O es un punto de referencia fijo para todo el sistema.

(d) Conservación de la cantidad de movimiento. En el punto (*b*) del apartado 4.5 se expresaron mediante las ecuaciones 4.11 y 4.12 los principios de conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético. Tales principios pueden aplicarse a un cuerpo rígido o a un sistema de cuerpos rígidos interconectados. Así pues, si para un intervalo de tiempo dado $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces

$$\Delta\mathbf{G} = \mathbf{0} \qquad [4.15]$$

que nos dice que el vector cantidad de movimiento no sufre cambio alguno en ausencia de un impulso lineal resultante. En el caso de un sistema de cuerpos rígidos interconectados puede haber variaciones de cantidad de movimiento en partes individuales del sistema durante el intervalo, pero no habrá variación de la cantidad de movimiento resultante del sistema si no hay un impulso lineal resultante.

Análogamente, si es nulo el momento resultante respecto a un punto fijo dado O, o respecto al centro de masa, durante un intervalo de tiempo determinado se tendrá, en el caso de un cuerpo rígido único o de un sistema de cuerpos rígidos interconectados,

$$\Delta\mathbf{H}_O = \mathbf{0} \quad \text{o sea} \quad \Delta\mathbf{H}_G = \mathbf{0} \qquad [4.16]$$

que nos dice que el momento cinético respecto al punto fijo, o respecto al centro de masa, no sufre cambio alguno en ausencia de un impulso angular resultante correspondiente. De nuevo, en el caso de un sistema de cuerpos rígidos interconectados, podrán producirse variaciones de momento cinético en componentes individuales durante el intervalo de tiempo, pero el momento cinético resultante de todo el sistema no variará si no hay impulso angular resultante respecto al punto fijo o al centro de masa. Las ecuaciones 4.16 pueden cumplir-

http://gratislibrospdf.com/

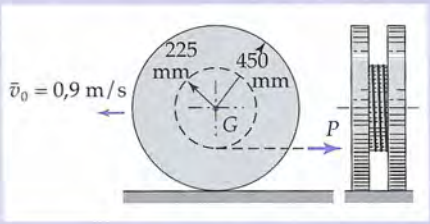
se independientemente una de otra. En el caso de un sistema interconectado no suele convenir el empleo del centro de masa del sistema. Según se indicó previamente en los apartados 3.9 y 3.10 del capítulo que trataba del movimiento del punto material, el empleo de los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético facilita grandemente el análisis de situaciones en las cuales se ejerzan fuerzas y pares durante intervalos de tiempo muy cortos.

(e) Choque de cuerpos rígidos. En los fenómenos de choque intervienen unas interacciones bastante complicadas de transferencia de energía y cantidad de movimiento, disipación de energía, deformaciones elásticas y plásticas, velocidades relativas y geometría. En el apartado 3.12 tratamos del choque de cuerpos asimilados a partículas y sólo consideramos el caso de choque central, que sucede cuando las fuerzas de contacto desarrolladas en el choque pasan por los centros de masa de los cuerpos, como ocurriría siempre en el choque de esferas lisas, por ejemplo. Para establecer la relación entre la situación después del choque con la existente antes de éste, fue necesario introducir el llamado coeficiente de restitución e (o coeficiente de impacto), que compara la velocidad de separación relativa a la velocidad de acercamiento relativa, medidas a lo largo de la dirección de las fuerzas de contacto. Aunque en la teoría clásica del choque e se consideraba constante para cada material, investigaciones más recientes muestran que e depende notablemente de la geometría y de la velocidad de impacto, además del material. En todo caso e incluso para esferas y barras bajo choque central y longitudinal, el coeficiente de restitución es un factor complicado y variable de aplicación limitada.

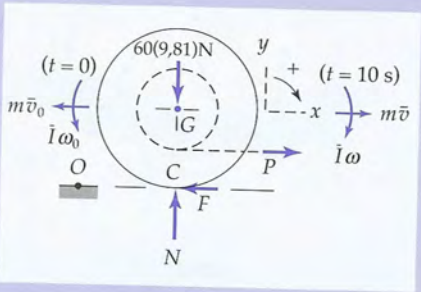
Todo propósito de ampliar la teoría del choque simplificada al choque no central de cuerpos rígidos utilizando coeficientes de restitución constituye una simplificación excesiva muy gravosa de valor práctico casi nulo. Por esta razón, no incluimos el tema en este libro, aunque su teoría es de fácil desarrollo y aparece en algunas referencias. No obstante, podemos hacer uso completo de los principios de conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético, cuando sean aplicables, al estudiar el choque y otras interacciones de cuerpos rígidos.

PROBLEMA TIPO 6.14

La fuerza P que se aplica al cable enrollado en el núcleo de la rueda simétrica aumenta lentamente según $P = 6{,}5t$, donde P está en newtons y t es el tiempo, en segundos, transcurrido tras el comienzo de la aplicación de P. Determinar la velocidad angular ω de la rueda 10 segundos después de la aplicación de P si en el instante $t = 0$ la rueda se mueve hacia la izquierda con una velocidad de su centro de 0,9 m/s. La rueda, que tiene una masa de 60 kg y un radio de giro respecto a su centro de 250 mm, rueda sin deslizamiento.



http://gratislibrospdf.com/



Solución. Se representa el diagrama para sólido libre de la rueda correspondiente a cualquier posición dentro del intervalo. Se indican también la cantidad de movimiento y el momento cinético iniciales en el instante $t = 0$ y finales en el instante $t = 10$ s. El sentido correcto de la fuerza de rozamiento F es el opuesto al del deslizamiento que se tendría en ausencia de rozamiento. ①

Aplicando los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético al intervalo *completo* resulta

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x \, dt = G_{x_2} - G_{x_1}\right] \qquad \int_0^{10} (6{,}5t - F)\, dt = 60[0{,}450\omega - (-0{,}9)] \quad ②$$

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_G \, dt = H_{G_2} - H_{G_1}\right] \quad ③$$

$$\int_0^{10} [0{,}450F - 0{,}225(6{,}5t)]\, dt = 60(0{,}250)^2\left[\omega - \left(-\frac{0{,}9}{0{,}450}\right)\right]$$

Como la fuerza F es variable, debe permanecer bajo el signo integral. La eliminamos multiplicando por 0,450 la segunda ecuación y sumándola a la primera. Integrando y despejando ω, resulta

$$\omega = 2{,}60 \text{ rad/s en el sentido horario} \qquad \textit{Resp.}$$

Otro procedimiento. Podría haberse evitado la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones aplicando la segunda de las ecuaciones 6.17 respecto a un punto fijo O de la superficie horizontal. Los momentos del peso de 60(9,81) N y de la fuerza contraria N se anulan entre sí y F no aparece porque su momento respecto a O es cero. Entonces el momento cinético respecto a O se hace $H_O = \bar{I}\omega + m\bar{v}r = m\bar{k}^2 w + mr^2\omega = m(\bar{k}^2 + r^2)\omega$, donde $\bar{k}$ es el radio de giro centroidal y r es el radio de rodadura de 450 mm. Así pues, resulta que $H_O = H_C$, ya que $\bar{k}^2 + r^2 = k_C^2$ y $H_C = I_C\omega = mk_C^2\,\omega$. Con esto, la ecuación 6.17 da ahora

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O \, dt = H_{O_2} - H_{O_1}\right]$$

$$\int_0^{10} 6{,}5t(0{,}450 - 0{,}225)\, dt = 60[(0{,}250)^2 + (0{,}450)^2]\left[\omega - \left(-\frac{0{,}9}{0{,}450}\right)\right]$$

La resolución de esta ecuación única equivale a la resolución del sistema de dos ecuaciones precedente.

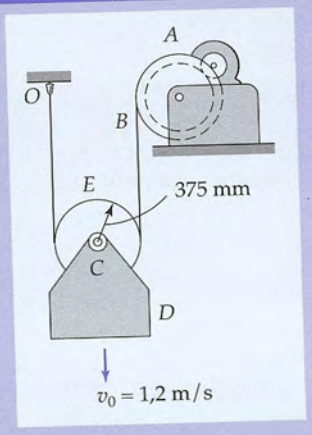
① **Obsérvese que el desequilibrio en sentido horario de los momentos respecto a C produce una aceleración angular horaria cuando la rueda gira sin deslizamiento. Como la suma de momentos respecto a G debe tener el mismo sentido horario que α, la fuerza de rozamiento debe actuar hacia la izquierda para que así sea.**

② **Obsérvense bien los signos de los momentos. La velocidad lineal final se supone que tiene el sentido x positivo, por lo que G_{x_2} es positiva. La velocidad lineal inicial es negativa, por lo que G_{x_1} es negativa y al restar este término aparece un doble signo negativo.**

③ **Como la rueda no se desliza al rotar, una velocidad según las x positivas requiere una velocidad angular horaria y viceversa. Nuevamente se da el caso de sustracción de una cantidad negativa.**

http://gratislibrospdf.com/

La polea móvil del elevador tiene una masa de 30 kg y un radio de giro centroidal de 250 mm. La carga D de 40 kg que soporta la polea tiene una velocidad inicial hacia abajo $v_0 = 1{,}20$ m/s en el instante en que se aplica un par, de sentido horario, al tambor elevador tal que éste mantenga una fuerza constante $F = 380$ N en el cable B. Calcular la velocidad angular ω de la polea móvil 5 s después de aplicar el par al tambor y hallar la tensión T del cable durante el intervalo. Se desprecian los rozamientos.



Solución. El sistema está formado por el conjunto de la carga y la polea y se representa el diagrama para sólido libre correspondiente. Las incógnitas son dos: la tensión T del cable en O y la velocidad angular final ω de la polea. Aplicando el teorema del momento cinético respecto al punto fijo O y tomando como positivo el sentido antihorario, T queda eliminada al principio

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O \, dt = H_{O_2} - H_{O_1}\right]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O \, dt = \int_0^5 [380(0{,}750) - (30+40)(9{,}81)(0{,}375)] \, dt$$

$$= 137{,}4 \text{ N·m·s}$$

$$(H_{O_2} - H_{O_1})_D = mv_2 d - mv_1 d = md(v_2 - v_1) \quad (1)$$

$$= 40(0{,}375)[v - (-1{,}2)] = 15(0{,}375\omega + 1{,}2)$$

$$= 5{,}63\omega + 18 \text{ N·m}$$

$$(H_{O_2} - H_{O_1})_E = \bar{I}(\omega_2 - \omega_1) + md(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)$$

$$= 30(0{,}250)^2[\omega - (-1{,}2 \,/\, 0{,}375)] + 30(0{,}375)[0{,}375\omega - (-1{,}2)]$$

$$= 6{,}09\omega + 19{,}50 \text{ N·m·s}$$

Aplicando estos valores en la ecuación del momento cinético resulta

$$137{,}4 = 5{,}63\omega + 18 + 6{,}09\omega + 19{,}50$$

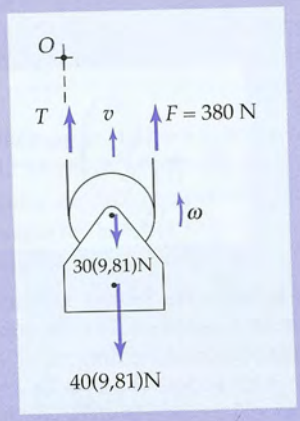
$$\omega = 8{,}53 \text{ rad/s en sentido antihorario} \qquad \textit{Resp.}$$

Para determinar T aplicamos al sistema el teorema de la cantidad de movimiento. Asignando el signo positivo al sentido ascendente tenemos

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F \, dt = G_2 - G_1\right]$$

$$\int_0^5 [T + 380 - 70(9{,}81)] \, dt = 70[0{,}375(8{,}53) - (-1{,}2)]$$

$$5T = 1841 \qquad T = 368 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$



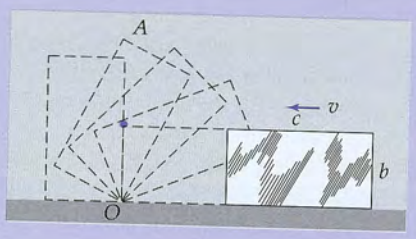
(1) **Atención al signo negativo al restar cantidades negativas. Además, las unidades del momento cinético, que son las mismas que las del impulso angular, pueden escribirse kg·m²·s⁻¹**

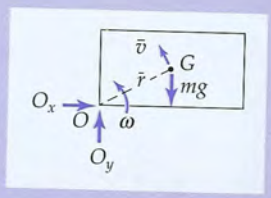
http://gratislibrospdf.com/

Si hubiéramos tomado momentos respecto al centro C de la polea en lugar del punto O, habrían aparecido las dos incógnitas T y ω y habríamos tenido que despejar ambas del sistema formado por esta ecuación y la que nos daría el teorema de la cantidad de movimiento, que contiene también las dos incógnitas.

PROBLEMA TIPO 6.16

El bloque rectangular uniforme, cuyas dimensiones se indican, se desliza hacia la izquierda por la superficie horizontal con una velocidad v cuando choca con el pequeño escalón. Supóngase un rebote despreciable en éste y calcúlese el valor mínimo de v que permita al bloque girar alrededor del borde del escalón y alcanzar exactamente la posición vertical A sin velocidad. Calcular el porcentaje de pérdida de energía $\Delta E/E$ para $b = c$.





Solución. Supondremos que el borde del escalón O hace las veces de un pasador en la arista del bloque, con lo que éste gira alrededor de O. Además, supondremos despreciable la altura del escalón frente a las dimensiones del bloque. Durante el choque, la única fuerza que ejerce un momento respecto a O es el peso mg, pero el impulso angular debido al peso es extraordinariamente pequeño por ser despreciable el tiempo de choque. Así pues, puede decirse que se conserva el momento cinético respecto a O.

El momento cinético inicial del bloque respecto a O, inmediatamente antes del choque, es el momento de su cantidad de movimiento y es $H_O = mv(b/2)$. La velocidad del centro de masa G inmediatamente después del choque es $\bar{v}$, y la velocidad angular es $\omega = \bar{v} / \bar{r}$. El momento cinético respecto a O inmediatamente después del choque, cuando el bloque inicia su rotación alrededor de O, es

$$[H_O = I_O\omega] \qquad H_O = \left\{\frac{1}{12}m(b^2 + c^2) + m\left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]\right\}\omega$$

$$= \frac{m}{3}(b^2 + c^2)\omega$$

La conservación del momento cinético da

$$[\Delta H_O = 0] \qquad \frac{m}{3}(b^2 + c^2)\omega = mv\,\frac{b}{2} \qquad \omega = \frac{3vb}{2(b^2 + c^2)}$$

Esta velocidad angular será suficiente para llevar el bloque a la posición A si la energía cinética de rotación es igual al incremento de energía potencial. Así pues

$$[\Delta T + \Delta V_g = 0] \qquad \frac{1}{2}I_O\omega^2 - mg\left[\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{m}{3}(b^2 + c^2)\left[\frac{3vb}{2(b^2 + c^2)}\right]^2 - \frac{mg}{2}(\sqrt{b^2 + c^2} - b) = 0$$

① **Si la arista del bloque chocase contra un resorte en vez de contra un escalón rígido, entonces el tiempo de interacción durante la compresión del resorte podría ser apreciable y habría de tenerse en cuenta el momento cinético respecto al extremo del resorte como punto fijo debido al momento del peso.**

② **Obsérvese el repentino cambio de dirección y módulo de la velocidad de G durante el choque.**

③ **Asegurar que el teorema de Steiner $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^2$ se emplea correctamente en este caso.**

http://gratislibrospdf.com/

$$v = 2\sqrt{\frac{g}{3}\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right)(\sqrt{b^2+c^2}-b)} \qquad \textit{Resp.}$$

El porcentaje de pérdida de energía es

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}I_O\omega^2}{\frac{1}{2}mv^2} = 1 - \frac{k_O^2\omega^2}{v^2} = 1 - \left(\frac{b^2+c^2}{3}\right)\left[\frac{3b}{2(b^2+c^2)}\right]^2$$

$$= 1 - \frac{3}{4\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right)}, \qquad \Delta E/E = 62{,}5\,\% \quad \text{para } b = c \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

6.185 En el instante representado, el centro de masa G de la barra delgada de masa 0,8 kg y longitud 0,4 m cae verticalmente con una velocidad $v = 2$ m/s. Calcular el momento cinético H_O de la barra respecto al punto O si la velocidad angular de la misma es (*a*) $\omega_a = 10$ rad/s H y (*b*) $\omega_b = 10$ rad/s AH.

Resp. (*a*) $H_O = 0{,}587$ kg·m^2/s, (*b*) $H_O = 0{,}373$ kg·m^2/s

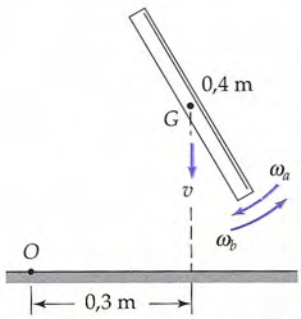


Figura problema 6.185

6.186 A través de la horquilla, tal como se muestra, al centro O del disco uniforme de masa m se le aplica una fuerza horizontal constante P. El disco se pone en movimiento desde el reposo y rueda sin deslizamiento durante t segundos por la superficie horizontal. Hallar la velocidad v del centro O en función de t.

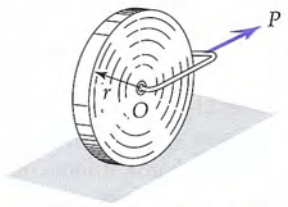


Figura problema 6.186

6.187 Hallar el momento cinético de la Tierra respecto al centro del Sol. Supóngase que la Tierra es un cuerpo homogéneo que describe una órbita circular de radio 149,6(10^6) km. Consúltese cualquier dato necesario en la tabla D.2. Coméntense las contribuciones relativas de los términos $\bar{I}\omega$ y $m\bar{v}d$.

Resp. $H = 2{,}66(10^{40})$ kg·m^2/s

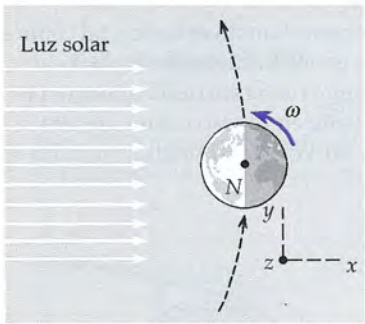


Figura problema 6.187

6.188 El volante de inercia de 75 kg tiene un radio de giro respecto a su eje de $\bar{k} = 0{,}50$ m y está sometido a un par de fuerzas de momento $M = 10(1 - e^{-t})$ m·N, donde t son segundos. Si el volante se encuentra en reposo en el instante $t = 0$, hallar su velocidad angular ω para $t = 3$ s.

http://gratislibrospdf.com/

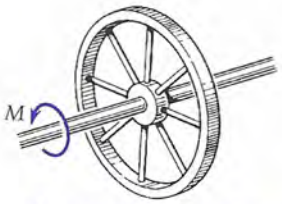


Figura problema 6.188

6.189 Los tambores acanalados de los dos sistemas representados son iguales. En cada caso, (*a*) y (*b*), el sistema se encuentra en reposo para $t = 0$. Hallar la velocidad angular del tambor acanalado en el instante $t = 4$ s. Se desprecia el rozamiento en el eje *O*.

Resp. (*a*) $\omega = 119{,}0$ rad/s, (*b*) $\omega = 72{,}0$ rad/s

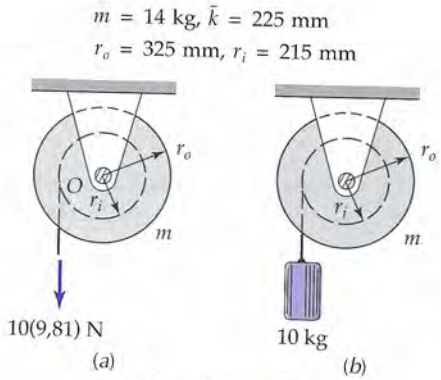


Figura problema 6.189

6.190 Al cilindro escalonado se aplica, tal como se muestra, la fuerza constante de 40 N. El radio de giro centroidal del cilindro es $\bar{k} = 200$ mm y rueda sin deslizamiento por la pendiente. Si el cilindro se halla en reposo cuando recibe la aplicación de la fuerza, hallar su velocidad angular ω ocho segundos después.

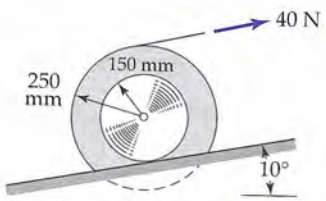


Figura problema 6.190

6.191 La bala de 30 g lleva una velocidad de 500 m/s cuando incide en la barra delgada *OA* de 10 kg, la cual está suspendida del punto *O* e inicialmente en reposo. Calcular la velocidad angular ω que adquiere la barra con la bala incrustada inmediatamente después del impacto.

Resp. $\omega = 2{,}81$ rad/s

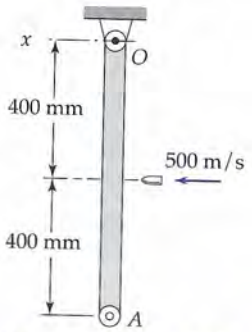


Figura problema 6.191

6.192 Si la bala del problema 6.191 tarda 0,001 s en incrustarse en la barra, calcular el valor medio temporal de la fuerza horizontal O_x que el eje *O* ejerce sobre la barra durante la interacción de ésta y la bala. Empléense los resultados del problema 6.191.

Problemas representativos

6.193 La varilla delgada de masa $m/2$ es solidaria del cilindro circular homogéneo de masa *m* y radio *R*. Si éste rueda sin deslizamiento por la superficie con una velocidad v_O de su centro, hallar los momentos cinéticos H_G y H_O del sistema en el instante representado.

Resp. $H_G = \frac{11}{16}mRv_O$, $H_O = \frac{37}{32}mRv_O$

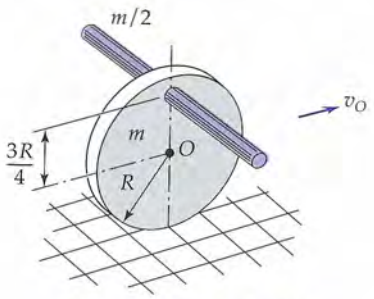


Figura problema 6.193

6.194 El pequeño bloque de masa *m* desliza por la ranura radial del disco mientras ésta gira en el plano horizontal en torno a su centro. El bloque se suelta estando en reposo relativo respecto al disco y se mueve hacia afuera con una velocidad $\dot{r}$ en aumento a lo largo de la ranura del disco cuando éste gira. Hallar, en función de *r* y $\dot{r}$, el momento *M* que debe aplicarse

http://gratislibrospdf.com/

al disco para que éste mantenga una velocidad angular constante ω.

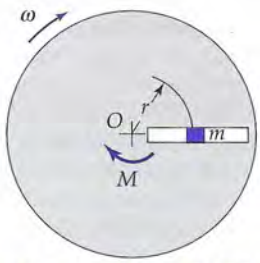


Figura problema 6.194

6.195 Una barra delgada uniforme de masa M y longitud L se traslada sobre el plano horizontal liso x-y con una velocidad v_M cuando una partícula de masa m que se mueve con una velocidad v_m, tal como se muestra, choca y se incrusta en ella. Hallar las velocidades lineal y angular finales de la barra con la partícula incrustada.

$$Resp.\ v_x = \frac{Mv_M}{M+m},\ v_y = \frac{mv_m}{M+m}$$

$$\omega = \frac{12v_m}{L}\left(\frac{m}{4M+7m}\right) \text{ AH}$$

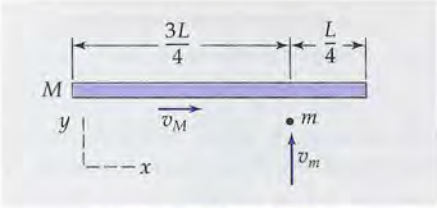


Figura problema 6.195

6.196 La rueda desequilibrada se hace que ruede sin deslizamiento hacia la derecha con una velocidad constante de 0,9 m/s de su centro O. Su masa es de 8 kg con centro de masa en G y su radio de giro respecto a O vale 150 mm. Hallar su momento cinético H_O respecto a O (*a*) cuando G pasa exactamente por la vertical de O y es $\theta = 0$ y (*b*) cuando G pasa por la horizontal de O y es $\theta = 90°$.

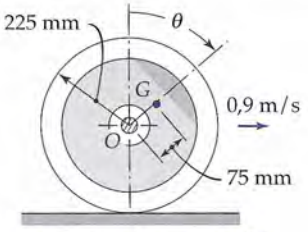


Figura problema 6.196

6.197 El disco uniforme de radio 200 mm tiene una masa de 25 kg y está montado en la barra giratoria OA de tres modos distintos. En todos los casos la barra gira en torno a su eje vertical con una velocidad angular horaria $\omega = 4$ rad/s. En el caso (*a*) el disco está soldado a la barra. En el caso (*b*) el disco, sujeto a la barra por el pasador A, ejecuta un movimiento de traslación curvilínea y no rota como un cuerpo rígido. En el caso (*c*) el ángulo relativo entre el disco y la barra aumenta a razón de $\dot{\theta} = 8$ rad/s. Calcular, en cada caso, el momento cinético del disco respecto al punto O.

Resp. (*a*) $H_O = 18\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$
(*b*) $H_O = 16\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$
(*c*) $H_O = 14\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

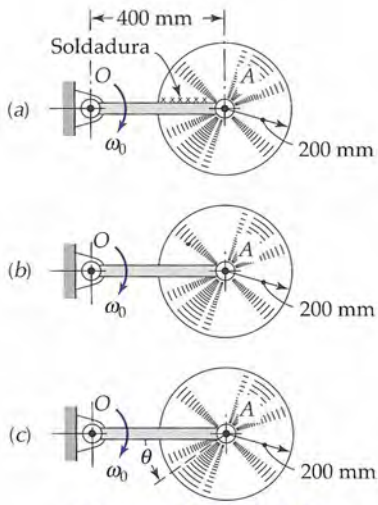


Figura problema 6.197

6.198 La barra delgada de masa m y longitud l está sujeta con un pasador en su extremo inferior al soporte O del que se

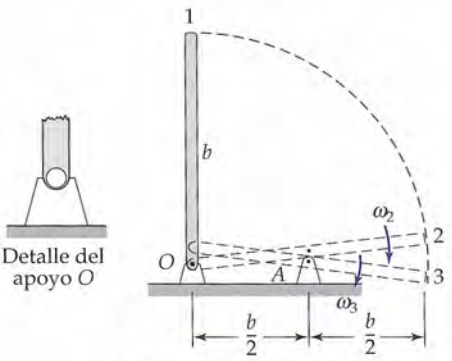


Figura problema 6.198

http://gratislibrospdf.com/

muestra un detalle. La barra se suelta en reposo desde la posición vertical 1. Cuando el centro de la barra choca con el pivote A en la posición 2, se traba al mismo a la vez que se libera la conexión en O. Hallar la velocidad angular ω_3 de la barra inmediatamente después de trabarse al pivote A en la posición 3.

6.199 Dos pequeños reactores de empuje variable se disparan para mantener la velocidad angular de la nave espacial constante en el valor $\omega_0 = 1{,}25$ rad/s en torno al eje z a la vez que se extienden los brazos retráctiles, desde $r_1 = 1{,}2$ m hasta $r_2 = 4{,}5$ m, con una velocidad constante durante un período de dos minutos. Hallar, en función del tiempo, qué empuje T debe tener cada reactor, siendo $t = 0$ el instante en que comienza el movimiento telescópico. Los pequeños registradores experimentales de 10 kg instalados en los extremos de los brazos pueden tratarse como si fueran masas puntuales y pueden despreciarse las masas de los brazos.

Resp. $T = 0{,}750 + 0{,}01719t$ N

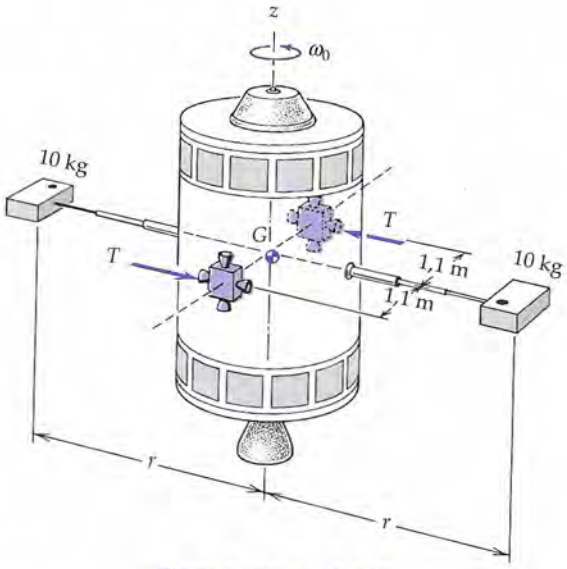


Figura problema 6.199

6.200 Inmediatamente tras dejar el saltadero, el cuerpo completamente extendido del nadador de 80 kg de masa posee una velocidad de rotación de 0,3 rev/s en torno a un eje normal al plano de la trayectoria. Calcular aproximadamente la velocidad angular N en el momento posterior del salto en que el nadador ha encogido el cuerpo. Se harán unas hipótesis razonables referentes a los momentos de inercia del cuerpo en cada configuración.

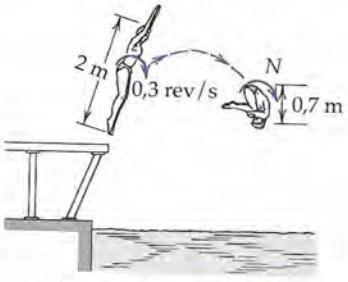


Figura problema 6.200

6.201 Estando los engranajes inicialmente en reposo con el par de momento M nulo, las fuerzas que el armazón ejerce en A y B sobre los ejes de los engranajes son 120 y 64 N, respectivamente, ambas hacia arriba para contrarrestar los pesos de los engranajes. En cierto momento se aplica un par de momento $M = 6{,}8$ m·N al mayor de los engranajes a través de su eje A. Cuatro segundos después, este mismo engranaje tiene un momento cinético de 15 kg·m^2/s, de sentido horario, y el engranaje pequeño un momento cinético de 5 kg·m^2/s, de sentido antihorario. Calcular los nuevos valores de las fuerzas R_A y R_B que ejerce el armazón sobre los ejes durante el intervalo de 4 s. Aislar el conjunto de ambos engranajes considerándolo como sistema.

Resp. $R_A = 106{,}8$ N, $R_B = 77{,}2$ N

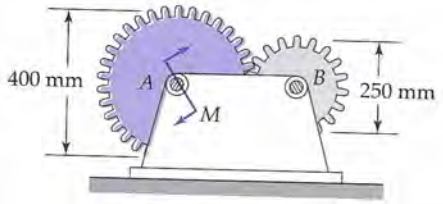


Figura problema 6.201

6.202 En la figura se muestran los elementos de una nave espacial con simetría axial másica y un sistema de control por

Figura problema 6.202

http://gratislibrospdf.com/

rueda de reacción. Cuando el motor eléctrico ejerce un par sobre ésta última, sobre la nave se ejerce un par igual y opuesto, con lo que varía el momento cinético en la dirección z. Si todos los elementos del sistema empiezan a moverse a partir del reposo y el motor ejerce un par de momento M durante un tiempo t, hallar la velocidad angular final de (a) la nave y (b) de la rueda respecto a la nave. El momento de inercia respecto al eje z de la nave completa, rueda incluida, es I y el de la rueda sola es I_w. El eje de rotación de la rueda coincide con el eje de simetría z de la nave.

6.203 Una profesora de Dinámica está exponiendo a sus alumnos los principios relativos al momento cinético. Para ello, se coloca de pie sobre una plataforma rotatoria de muy bajo rozamiento con el cuerpo alineado con el eje vertical de la misma. Sin que la plataforma rote, sujeta una rueda de bicicleta especialmente preparada de modo que el eje de ésta está vertical. A continuación voltea la rueda para darle al eje una orientación horizontal sin variar la distancia de 600 mm desde el eje de su cuerpo al centro de la rueda y, así, los alumnos observan que la plataforma gira a 30 rpm. La rueda tiene la llanta lastrada y su masa es de 10 kg con un radio de giro centroidal $\bar{k}$ = 300 mm, y gira a una velocidad prácticamente constante de 250 rpm. Calcular aproximadamente el momento de inercia I de la profesora (en la postura que se muestra) respecto al eje vertical de la plataforma.

Resp. $I = 3{,}45$ kg·m^2

Figura problema 6.203

6.204 Si la profesora de Dinámica del problema 6.203 reorienta el eje de la rueda a 180° respecto a su posición vertical inicial, ¿qué velocidad de rotación N observarán los alumnos? Puede emplearse toda la información facilitada y la respuesta dada al problema 6.203.

6.205 El patinador sobre hielo de 74 kg gira sobre sí mismo con los brazos extendidos horizontalmente en torno a un eje vertical a razón de una vuelta por segundo. Calcular aproximadamente cuál será su velocidad de rotación N cuando pegue del todo los brazos al cuerpo colocando las manos muy cerca del eje de giro. Como aproximación aceptable, asimilar sus brazos extendidos a varillas delgadas uniformes, de longitud 680 mm y masa 7 kg cada una. El torso puede asimilarse a un cilindro macizo de 60 kg con un diámetro de 330 mm. Con los brazos pegados, el patinador puede considerarse como un cilindro macizo de 74 kg con un diámetro de 330 mm. Se desprecia el rozamiento en los contactos de los patines con el hielo.

Resp. $N = 4{,}89$ rev/s

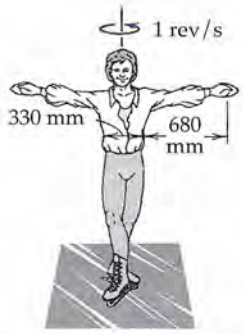


Figura problema 6.205

6.206 El cilindro circular macizo de radio r está en reposo sobre la cinta transportadora plana cuando a ésta se aplica una fuerza horizontal P. Si ésta basta para que haya siempre deslizamiento entre la cinta y el cilindro, hallar el tiempo t necesario para que el cilindro llegue a la posición indicada con línea de trazos. Hallar también la velocidad angular ω del cilindro en esa misma posición. El coeficiente de rozamiento entre el cilindro y la cinta es μ_c.

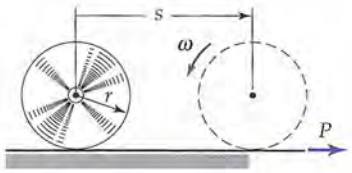


Figura problema 6.206

6.207 El disco uniforme D de 4 kg puede girar libremente sobre cojinetes en torno al eje C-C. El brazo B de 2,5 kg está unido rígidamente al árbol vertical O-O. Dicho brazo puede considerarse como una barra delgada de 300 mm de longitud y el momento de inercia del árbol vertical O-O puede despreciarse. La varilla A de 3 kg está asegurada a fondo al brazo B. Si inicialmente el disco D tiene una velocidad angular $\omega_0 = 7$ rad/s en el sentido indicado y el brazo B está en reposo, determinar la

http://gratislibrospdf.com/

velocidad angular ω_B del brazo después de aplicar durante 4 segundos un momento $M = 1{,}5$ m·N.

Resp. $\omega_B = 34{,}0$ rad/s

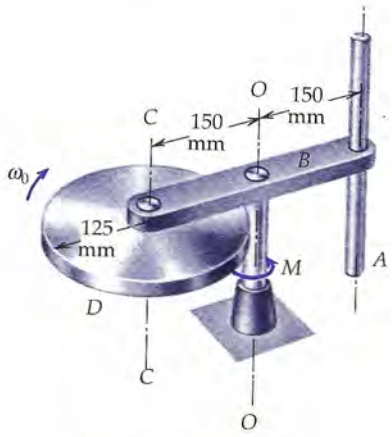


Figura problema 6.207

6.208 Las dos varillas uniformes de 300 mm tienen una masa de 1,5 kg cada una y están articuladas por sus extremos a la base giratoria B. La masa de ésta es 4 kg y su radio de giro es 40 mm, girando libre inicialmente en torno a su eje vertical a 300 rpm con las varillas trabadas en posición vertical. Si se sueltan los fiadores y las varillas toman las posiciones indicadas con trazo discontinuo, calcular la nueva velocidad N de giro del conjunto.

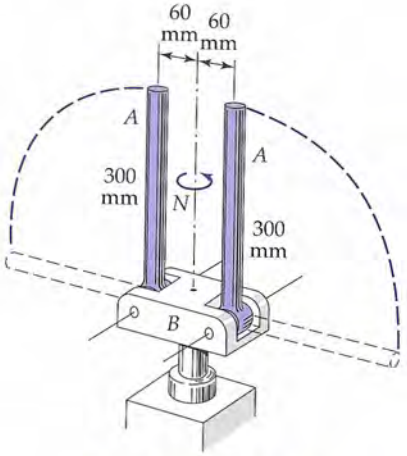


Figura problema 6.208

6.209 La esfera homogénea de masa m y radio r se lanza por el plano inclinado de ángulo θ con una celeridad inicial v_0 y sin velocidad angular ($\omega_0 = 0$). Siendo μ_c el coeficiente de rozamiento cinético, hallar el tiempo t que dura el deslizamiento. Determinar, además, la velocidad v del centro de masa G y la velocidad angular ω al final del período de deslizamiento.

$$\text{Resp. } t = \frac{v_0}{g}\frac{2}{7\mu_c \cos\theta - 2 \operatorname{sen}\theta}$$

$$v = \frac{5v_o\mu_c}{7\mu_c - 2\operatorname{tg}\theta}$$

$$\omega = \frac{5v_o\mu_c/r}{7\mu_c - 2\operatorname{tg}\theta}$$

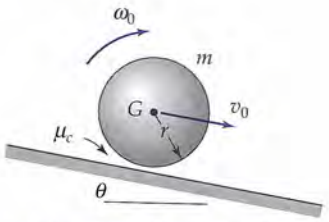


Figura problema 6.209

6.210 La esfera homogénea del problema 6.209 se coloca sobre el plano inclinado con una velocidad angular horaria ω_0 pero con su centro sin velocidad lineal ($v_0 = 0$). Hallar el tiempo t que dura el deslizamiento. Determinar, además, la velocidad v y la velocidad angular ω al final del período de deslizamiento.

6.211 La barra esbelta de masa m y longitud l se suelta estando en reposo en la posición horizontal representada. Si, tras el choque, el punto A de la barra queda unido al pivote B, hallar la velocidad angular ω de la barra inmediatamente después del choque en función de la distancia x. Particularizar la expresión obtenida para $x = 0$, $l/2$ y l.

$$\text{Resp. } \omega = \left(\frac{l}{2} - x\right)\sqrt{2gh}/(\tfrac{1}{3}l^2 - lx + x^2)$$

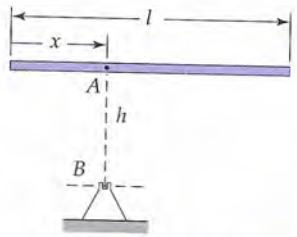


Figura problema 6.211

6.212 El disco ranurado tiene una masa de 6 kg y un radio de giro respecto a O de 175 mm. Lleva cuatro bolas de acero, de

http://gratislibrospdf.com/

0,15 kg de masa cada una, colocadas como indica la figura y gira libremente alrededor de un eje vertical en torno a O con una velocidad angular de 120 rpm. Cada una de las pequeñas bolas está retenida por un pequeño pasador que no se señala. Si las bolas se dejan en libertad cuando el disco está girando y permanecen en reposo respecto a las ranuras en la posición punteada, hallar la nueva velocidad angular ω del disco. Hallar también el valor $|\Delta E|$ de la energía perdida debido al impacto de las bolas con el extremo de las ranuras. Despreciar el diámetro de las bolas y discutir esta aproximación.

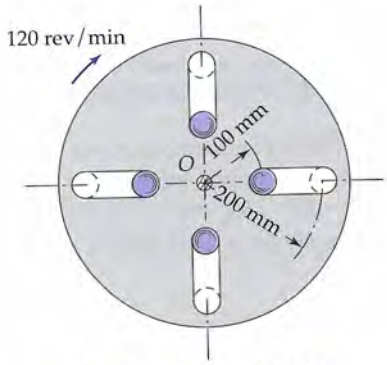


Figura problema 6.212

6.213 El módulo de aterrizaje lunar de 17,5 Mg tiene su centro de masa en G y un radio de giro de 1,8 m respecto a G. Se ha proyectado para tomar contacto con la superficie lunar con una velocidad de caída libre vertical de 8 km /h. Si una de las cuatro patas toca la superficie lunar sobre una pequeña inclinación sin sufrir rebote, calcular la velocidad angular ω del módulo inmediatamente después del impacto, como si pivotase alrededor del punto de contacto. La cota de 9 m es la longitud de la diagonal del cuadrado formado por los cuatro pies como vértices.

Resp. $\omega = 0{,}308$ rad/s

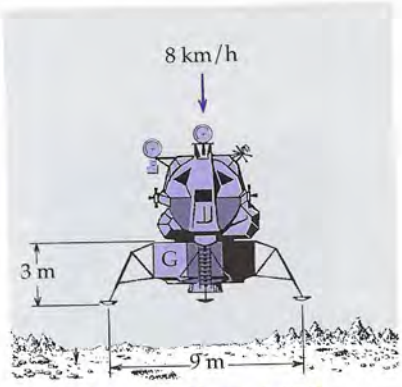


Figura problema 6.213

6.214 Un disco uniforme que rueda sin deslizamiento con velocidad v cambia bruscamente de dirección de movimiento al topar con el plano inclinado un ángulo θ. Hallar la nueva velocidad v' del centro del disco al iniciar el movimiento plano arriba y determinar la fracción n de la energía inicial que se pierde a causa del contacto si $\theta = 10°$.

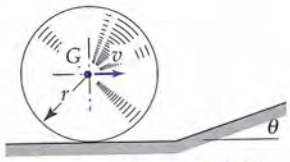


Figura problema 6.214

6.215 Se suelta un poste uniforme de longitud L formando un ángulo θ con la vertical y al chocar el extremo A con el suelo ambos extremos llevan una velocidad v. Si el extremo A pivota sobre su punto de contacto durante el resto de su movimiento, determinar la velocidad v' con la que B choca con el suelo.

$$\textit{Resp. } v' = \sqrt{\frac{9v^2}{4}\operatorname{sen}^2\theta + 3gL\cos\theta}$$

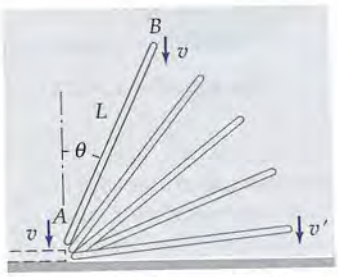


Figura problema 6.215

6.216 El fuselaje de la nave espacial tiene una masa de 160 kg y un radio de giro de 0,45 m respecto a su eje z. Los dos paneles

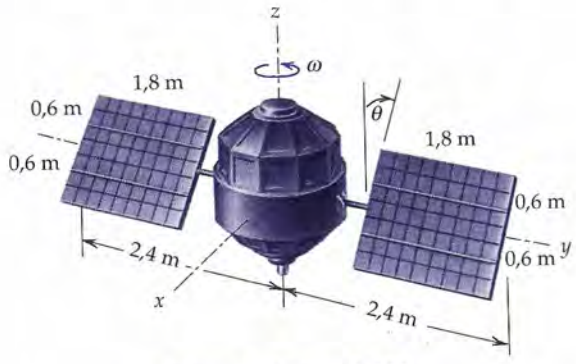


Figura problema 6.216

http://gratislibrospdf.com/

solares pueden asimilarse a sendas placas planas de 8 kg cada una. Si con $\theta = 0$ la nave gira en torno a su eje z a la velocidad de 1,0 rad/s, hallar la velocidad angular θ cuando un mecanismo interno rota los paneles y los coloca a $\theta = \pi/2$. Despreciar la pequeña variación del momento cinético del fuselaje respecto al eje y.

6.217 El pequeño engranaje se hace rotar en un plano horizontal alrededor del engranaje grande mediante el par de momento M aplicado al brazo OA. El engranaje pequeño tiene una masa de 3 kg y puede tratarse como si fuera un disco. El brazo OA de 2 kg tiene un radio de giro de 150 mm respecto al cojinete fijo en O. Hallar el momento M del par constante necesario para dotar al brazo OA de una velocidad angular de 20 rad/s en 3 segundos a partir del reposo. Se desprecia el rozamiento.

Resp. $M = 1{,}819$ m·N

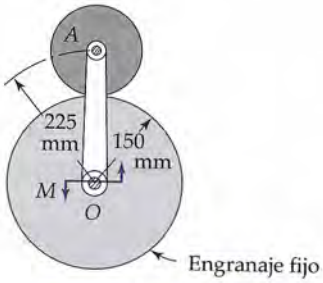


Figura problema 6.217

6.218 Una lata de zumo de frutas congelado descansa en la repisa de la puerta de un congelador tal como se muestra. ¿Con qué velocidad angular máxima Ω puede cerrarse "de golpe" la puerta sin que la lata salte de la repisa? Se supone que la lata puede rodar sin resbalar por el canto del soporte y se desprecia la dimensión d comparada con la distancia de 500 mm.

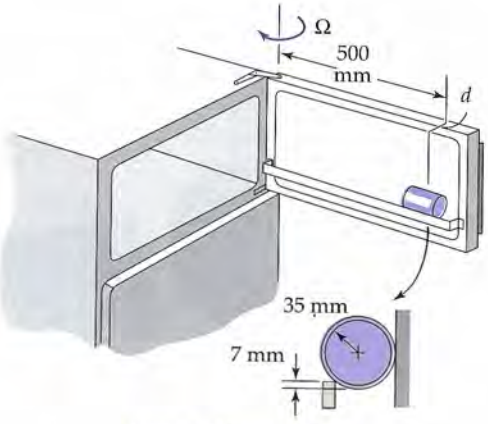


Figura problema 6.218

6.219 Determinar la velocidad mínima v que debe tener la rueda para que justo ruede por encima del obstáculo. El radio de giro centroidal de la rueda es k y se supone que la rueda no se desliza.

$$\textit{Resp. } v = \frac{r}{k^2 + r^2 - rh}\sqrt{2gh(k^2 + r^2)}$$

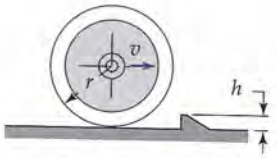


Figura problema 6.219

6.220 La barra esbelta uniforme de masa m y longitud l carece de velocidad angular cuando su extremo A choca sin rebotar con el tope. Si $\alpha = 15°$, ¿cuál es el módulo mínimo de la velocidad inicial v_1 para el que la barra gira en torno a A hacia la posición vertical?

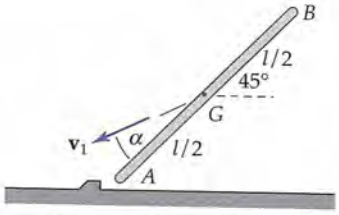


Figura problema 6.220

6.221 El bloque de piedra uniforme con $b = 1{,}2$ m y $h = 0{,}9$ m se suelta en reposo desde la posición en que su centro de masa G se halla casi en la vertical de la esquina sobre la que se apoya. Hallar su velocidad angular ω' en torno a A inmediatamente después del impacto suponiendo que A permanezca en contacto con el suelo. Se supone también que el contacto tiene lugar únicamente en las esquinas y que no hay deslizamiento. ¿Qué fracción $|\Delta E| / E$ de la energía se pierde en el impacto?

Resp. $\omega' = 0{,}1121$ rad/s, $|\Delta E| / E = 0{,}998$

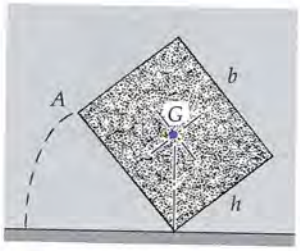


Figura problema 6.221

http://gratislibrospdf.com/

▶ **6.222** El motor M acciona el disco A, el cual hace girar el disco B sin que haya deslizamiento. El disco A, el árbol solidario y el bloque motor de 18 kg de masa total conjunta tienen un radio de giro de 85 mm. El disco B de 5 kg tiene un radio de giro de 140 mm. El motor y el brazo solidario C de 24 kg en conjunto presentan respecto al eje O-O un radio de giro de 450 mm. Sin funcionar el motor, todo el sistema gira en torno al eje O-O con una velocidad angular $\omega_0 = 30$ rpm en el sentido indicado. El motor tiene una velocidad de régimen de 1720 rpm en el sentido indicado cuando C está fijo. Determinar la nueva velocidad angular del brazo C cuando el motor funciona.

Resp. $N = 26{,}2$ rpm H

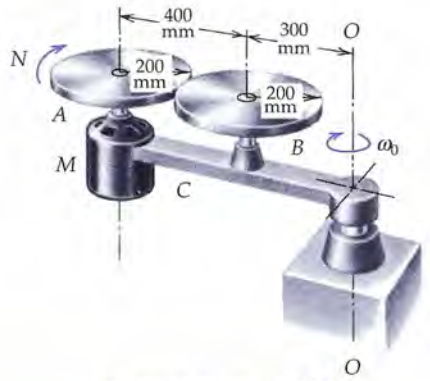


Figura problema 6.222

6.9 REPASO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este capítulo 6 se ha hecho uso prácticamente de todos los elementos de Dinámica tratados hasta aquí. Hemos visto que el conocimiento de la Cinética, tanto la que emplea el análisis del movimiento absoluto como el movimiento relativo, constituye una parte esencial de la resolución de problemas de cinética de sólidos rígidos. El procedimiento seguido en este capítulo es paralelo al seguido en el capítulo 3 donde se desarrolló la cinética del punto material utilizando la segunda ley de Newton, el teorema de las fuerza vivas y el teorema de la cantidad de movimiento.

La breve exposición que sigue es un resumen de consideraciones importantes a tener en cuenta a la hora de resolver problemas de cuerpos rígidos en movimiento plano.

(a) Identificación del cuerpo o sistema. Es fundamental decidir sin ambigüedad cuál es el cuerpo o sistema de cuerpos que se van a estudiar y, a continuación, aislarlo trazando su diagrama para sólido libre y su diagrama de fuerzas resultantes o de fuerzas activas, según el caso.

(b) Tipo de movimiento. Seguidamente se identifica el tipo de movimiento como traslación rectilínea, traslación curvilínea, rotación en torno a un eje fijo, o movimiento plano general. Siempre hay que asegurarse bien de que la cinemática del problema esté descrita adecuadamente antes de comenzar a resolver las ecuaciones cinéticas.

(c) Sistema de coordenadas. Para tomar un sistema de coordenadas adecuado debe recordarse que la geometría de la cinemática que interviene en cada caso suele ser el factor decisivo. Se designarán los sentidos positivos para fuerzas y momentos y se será coherente con esa designación.

(d) Fundamentos y método. Si lo que se desea es la relación instantánea entre las fuerzas aplicadas y la aceleración, entonces la equivalencia entre las fuerzas y los valores $m\bar{\mathbf{a}}$ e $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ consiguientes, que la revelan los diagramas para sólido libre y de las fuerzas resultantes, proporcionarán la solución y señalarán el procedimiento a seguir más conveniente.

http://gratislibrospdf.com/

Cuando el movimiento tenga lugar a través de un desplazamiento conocido, lo más indicado es aplicar el teorema de las fuerza vivas, ya que relaciona las velocidades iniciales con las finales sin necesidad de calcular aceleraciones. Ya hemos visto las ventajas de este procedimiento en el caso de los sistemas mecánicos interconectados con rozamiento interno despreciable.

Si el intervalo de movimiento está especificado en función del tiempo y no del desplazamiento, lo más indicado es el teorema de la cantidad de movimiento o bien el teorema del momento cinético. Cuando el movimiento de rotación de un cuerpo rígido varía o se inicia bruscamente, hay que aplicar el principio de la conservación del momento cinético.

(e) Hipótesis y aproximaciones. En este punto el lector ha debido captar el sentido práctico de ciertas hipótesis y aproximaciones, tales como el tratar una barra como si fuera un varilla esbelta o delgada o el despreciar el rozamiento cuando éste es muy pequeño. Estas y otras idealizaciones son importantes para el proceso de resolución de problemas reales.

PROBLEMAS DE REPASO

6.223 Haga una lista de las magnitudes lineales fundamentales de la Mecánica con sus magnitudes angulares correspondientes. Anote la unidad SI de cada una.

6.224 Un persona que atraviesa la puerta giratoria ejerce una fuerza horizontal de 90 N en una de las cuatro hojas. Si cada una de éstas es asimilable a una placa rectangular uniforme de 60 kg de 1,2 m de altura, hallar la aceleración angular de la puerta. Se desprecia el rozamiento.

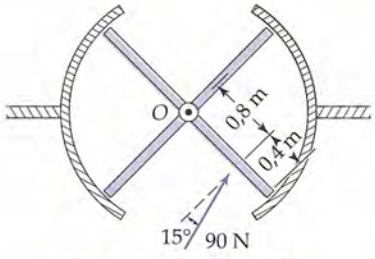


Figura problema 6.224

6.225 El camión volquete transporta 5 m^3 de basura de densidad de 1600 kg/m^3 y el mecanismo de elevación rota la caja en torno a A a una velocidad angular constante de 4 grd/s. El centro de masa de la caja y su carga está en G. Hallar la potencia máxima P necesaria durante el volteo de la carga.

Resp. $P = 8{,}22$ kW

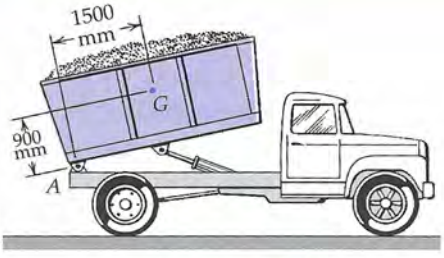


Figura problema 6.225

6.226 Una varilla delgada de masa m_0 y longitud l está soldada por su centro A a la periferia del disco macizo de masa m y radio r. El centro del disco, que rueda sin deslizamiento, tiene una velocidad v en su instante en que A se encuentra en el punto más alto y la varilla está paralela al suelo. Hallar, para ese instante, el momento cinético del conjunto respecto a O.

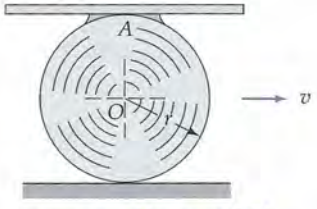


Figura problema 6.226

http://gratislibrospdf.com/

6.227 En la figura se representa un telescopio espacial. Una de las ruedas de reacción de su sistema de mando de orientación rota como se muestra a 10 rad/s, velocidad a la cual el rozamiento en el cojinete de la rueda produce un par de fuerzas internas de momento 10^{-6} m·N. Tanto la velocidad de la rueda como el momento debido al rozamiento pueden considerarse constantes durante un lapso de varias horas. Si el momento de inercia de la nave espacial completa respecto al eje x es de $150(10^3)$ kg·m^2, hallar cuánto tiempo pasa hasta que la línea de mira de la nave inicialmente inmóvil derive un segundo de arco, es decir 1/3600 grados. Los demás elementos permanecen fijos relativamente a la nave y sobre la rueda de reacción de la figura no se aplica par de fuerzas alguno para corregir la deriva de orientación. Despreciar todos los pares de fuerzas exteriores.

Resp. $t = 1206$ s

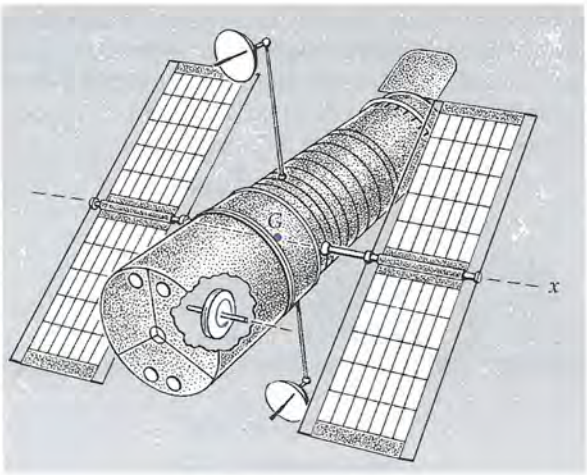


Figura problema 6.227

6.228 La barra esbelta uniforme tiene una masa de 30 kg y se abandona en reposo desde la posición casi vertical representada, en la que el resorte de 150 N/m de rigidez no está alargado. Calcular la velocidad con la que el extremo A golpea la superficie horizontal.

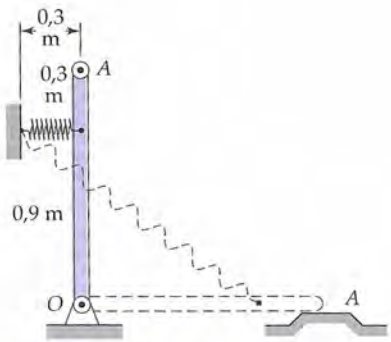


Figura problema 6.228

6.229 Cuatro varillas delgadas iguales, de masa m cada una, se sueldan por los extremos formando un cuadrado y luego los vértices se sueldan a un aro metálico liviano de radio r. Si el conjunto se deja rodar plano inclinado abajo, hallar el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático para que no haya deslizamiento.

Resp. $\mu_e = \frac{2}{5}\ \text{tg}\ \theta$

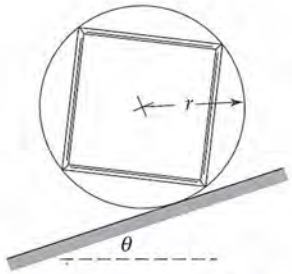


Figura problema 6.229

6.230 Se repite aquí el camión volquete del problema 6.113. El contenedor cargado tiene una masa de 80 Mg y puede asimilarse a un bloque homogéneo macizo. En la posición inicial representada, el cilindro hidráulico aplica una fuerza de 300 kN al contenedor. Calcular la aceleración angular inicial α del contenedor (*a*) si el camión no se mueve y (*b*) si el camión posee una aceleración hacia adelante de 3 m/s^2.

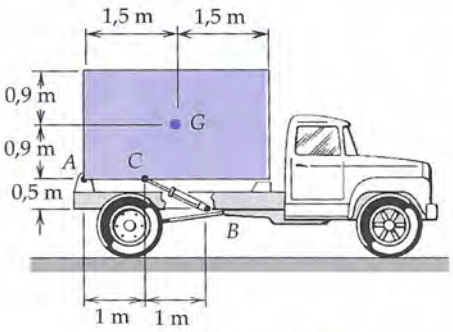


Figura problema 6.230

6.231 En un salto acrobático, el hombre A de masa m_A cae desde una plataforma elevada sobre el extremo de la vigueta ligera, aunque resistente, a la velocidad v_0. El muchacho de masa m_B es proyectado hacia arriba a la velocidad v_B. Para un coeficiente dado $n = m_B/m_A$, determinar b en función de l de forma

http://gratislibrospdf.com/

que la velocidad ascendente del muchacho sea máxima. Se supondrá que tanto el hombre como el muchacho se comportan como cuerpos rígidos.

Resp. $b = \dfrac{L}{1+\sqrt{n}}$

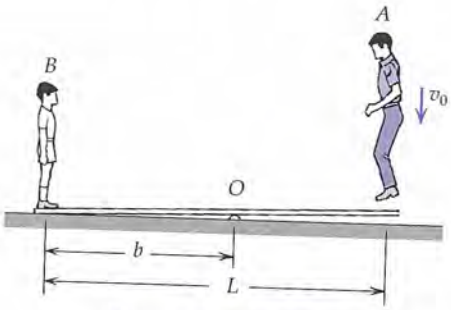


Figura problema 6.231

6.232 Un rollo macizo de papel grueso montado en un eje horizontal O se desenrolla por efecto de la caída de una masa m a la que está sujeto. El papel tiene una masa ρ por unidad de longitud y un espesor D y el rollo tiene un radio inicial r_0 cuando $y = 0$. Si el sistema se abandona en reposo con $y = 0$, hallar la velocidad final v_f de m cuando r tiende a cero. Se desprecia el pequeño movimiento horizontal de m y del papel.

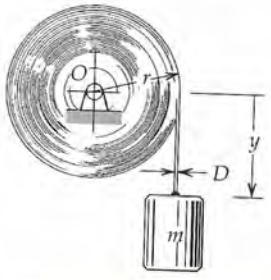


Figura problema 6.232

6.233 La varilla delgada uniforme de masa m y longitud l está articulada libremente a un eje horizontal que pasa por su extremo O y recibe una velocidad angular inicial ω_0 cuando pasa por la posición vertical $\theta = 0$. Si la varilla oscila hasta un ángulo máximo $\beta < 90°$, deducir la expresión en forma integral que da el tiempo t desde el momento en que se inicia el movimiento, $\theta = 0$, hasta que $\theta = \beta$. (Expresar ω_0 en función de β.)

Resp. $t = \sqrt{\dfrac{l}{3g}} \displaystyle\int_0^{\beta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\beta}}$

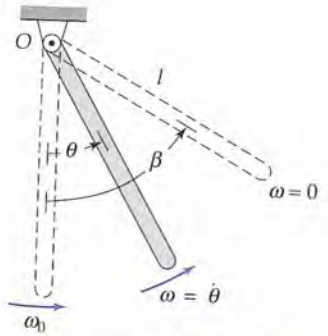


Figura problema 6.233

6.234 El automóvil de 1600 kg de tracción trasera clásica tiene su centro de masa en G. El coeficiente de rozamiento efectivo entre los neumáticos y la calzada es 0,80. (*a*) Tratar el vehículo y sus ruedas como si fueran un cuerpo rígido único despreciando la inercia a la rotación de las ruedas y calcular la aceleración a que es capaz de alcanzar. (*b*) Calcular el momento M del par que el diferencial aplica a cada rueda. Las ruedas traseras tienen una masa de 32 kg cada una y un diámetro de 620 mm con un radio de giro de 210 mm.

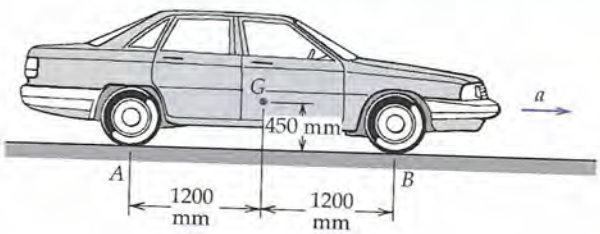


Figura problema 6.234

6.235 Una puerta formada por un panel rectangular uniforme de masa m está montada en bisagras situadas en las esquinas A y B, estando el eje de las bisagras inclinado un ángulo β respecto al eje vertical z. La bisagra A es capaz de soportar fuerzas según el eje de las bisagras y también fuerzas transversales a ese eje. La bisagra B sólo puede soportar fuerzas transversales al eje de las bisagras. Despreciando el rozamiento, hallar las expresiones de (*a*) la aceleración angular inicial ω que adquiere la puerta cuando se suelta en reposo desde la posición indicada, (*b*) la velocidad angular máxima ω de la puerta y (*c*) la fuerza R que soporta la bisagra B cuando la velocidad angular es máxima.

Resp. (*a*) $\alpha = \dfrac{3g}{2b}\,\text{sen}\,\beta$

(*b*) $\omega = \sqrt{(3g\,\text{sen}\,\beta)/b}$

(*c*) $R = \dfrac{mg}{2}\left[\dfrac{5}{2}\text{sen}\,\beta + \dfrac{b}{h}\cos\beta\right]$

http://gratislibrospdf.com/

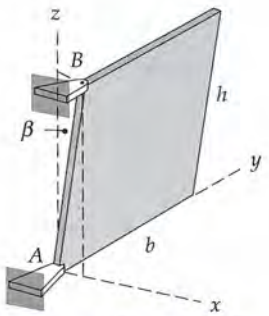


Figura problema 6.235

6.236 La barra OA y el disco que gira en su extremo se abandonan en reposo desde la posición representada y oscilan en el plano vertical alrededor del cojinete fijo O. La barra OA de 6 kg tiene un radio de giro respecto a O de 375 mm. El disco tiene una masa de 8 kg. Se supone que los dos cojinetes carecen de rozamiento. Hallar la fuerza F_O que en O se ejerce sobre la barra (*a*) inmediatamente después de iniciarse el movimiento y (*b*) cuando OA pasa por la posición vertical OA'.

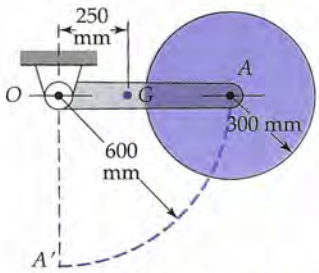


Figura problema 6.236

6.237 El aro circular liviano de radio r lleva una banda uniforme pesada de masa m a lo largo de su perímetro y se abandona en reposo desde la posición representada en la parte superior del plano inclinado. Después de que el aro haya rodado media vuelta, (*a*) hallar su velocidad angular ω y (*b*) la fuerza normal bajo el mismo si $\theta = 10°$.

$$Resp.\ (a)\ \omega = \sqrt{\frac{g}{r}\,\frac{4\cos\theta + \pi^2\,\text{sen}\,\theta}{\pi - 2}}$$

$$(b)\ N = 4{,}14mg$$

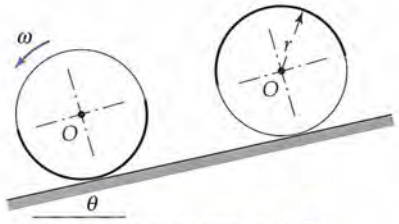


Figura problema 6.237

6.238 El bloquecito de masa m se desliza por la ranura diametral lisa del disco, el cual gira libremente en su cojinete. Si el bloquecito se desplaza un poco desde la posición central cuando la velocidad del disco es ω_0, hallar su velocidad radial v_r en función de la distancia radial r. El momento de inercia del disco respecto a su eje de rotación es I_O.

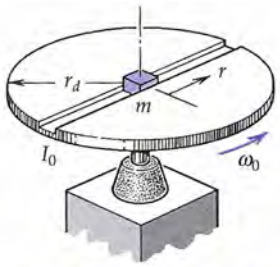
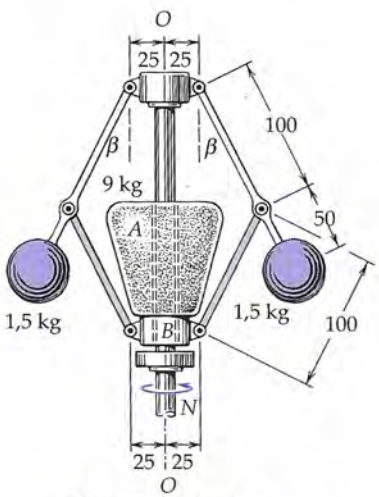


Figura problema 6.238

6.239 El regulador centrífugo está instalado en un eje vertical O-O. Conforme aumenta la velocidad del árbol N, el radio de rotación de las dos bolas de 1,5 kg tiende a aumentar y el anillo B eleva la masa A. Hallar el valor estacionario de β para una velocidad de rotación de 150 rpm. Despreciar la masa de los brazos y el anillo.

Resp. $\beta = 22{,}5°$



Cotas en milímetros

Figura problema 6.239

▶ **6.240** La barra esbelta uniforme de masa m y longitud l está articulada a un eje horizontal que pasa por O y oscila en el plano vertical a modo de péndulo compuesto. Si se suelta en reposo desde la posición horizontal con $\theta = 90°$, escribir las expresiones de la tracción T, la fuerza cortante V y el momento

http://gratislibrospdf.com/

flector M en la barra en función de x para una posición dada θ. Se desprecian todos los rozamientos.

Resp. $T = \dfrac{5l^2 - 2lx - 3x^2}{2l^2} mg \cos\theta$

$V = \dfrac{(l-x)(l-3x)}{4l^2} mg \operatorname{sen}\theta$

$M = \dfrac{(l-x)^2 x}{4l^2} mg \operatorname{sen}\theta$

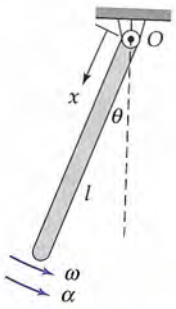


Figura problema 6.240

▶ **6.241** Del extremo libre de la cuerda flexible de masa ρ por unidad de longitud se tira hacia arriba con una fuerza P del modo indicado. En el instante considerado el extremo libre posee una aceleración ascendente a y una velocidad ascendente v. Demostrar que, en el límite a medida que la longitud de la cuerda tiende a cero, las tensiones T_1 y T_2 a uno y otro lado del bucle son iguales y valen $\frac{1}{4}\rho v^2$. (*Sugerencia*: Asimilar el bucle a un aro semicircular rígido sujeto a una rueda sin masa de radio r tal como se muestra. Seguidamente, hacer que r tienda a cero.)

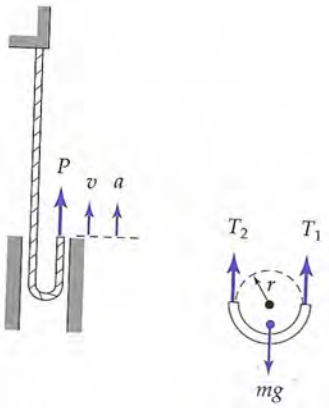


Figura problema 6.241

▶ **6.242** El aro hendido de radio r gira con velocidad angular constante ω en torno a un eje vertical que pasa por su centro O. Empleando un elemento infinitesimal de aro deducir las expresiones de la fuerza cortante N y de la tensión circunferencial T en el aro en función del ángulo θ. Hallar el momento flector M_C en el punto C utilizando medio aro como sólido libre. La masa del aro por unidad de longitud es ρ.

Resp. $N = \rho r^2 \omega^2 \operatorname{sen}\theta$

$T = \rho r^2 \omega^2 (1 + \cos\theta)$

$M_C = 2\rho r^3 \omega^2$

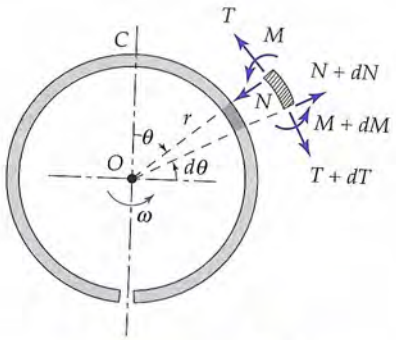


Figura problema 6.242

▶ **6.243** Antes de chocar contra el suelo, una chimenea que se derrumba, como la de la figura, suele partirse por el lugar donde el momento flector es máximo. Demostrar que la posición de momento máximo coincide con el centro de percusión relativo al extremo superior, en el caso de que la chimenea sea esbelta y de sección transversal constante. Despreciar el momento resistente en la base.

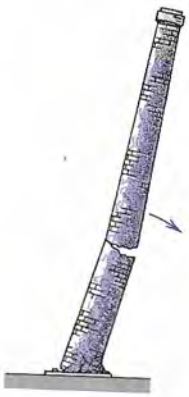


Figura problema 6.243

http://gratislibrospdf.com/

***6.244** Se repite aquí el carrito del problema 6.14. El carrito B se mueve hacia la derecha con una aceleración $a = 2g$. Si $m = 0{,}5$ kg, $l = 0{,}6$ m y $K = 75$ m·N/rad, hallar la desviación angular estacionaria θ de la varilla delgada uniforme de masa $3m$. La esfera de masa m del extremo puede tratarse como una partícula. El resorte, que ejerce un momento de valor $M = K\theta$ sobre la varilla, está sin deformar cuando la varilla está vertical.

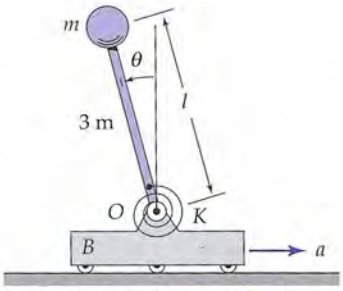


Figura problema 6.244

***6.245** Se repite aquí la figura del problema 6.35. La viga uniforme AB de 100 kg cuelga inicialmente en reposo con $\theta = 0$ cuando al cable se aplica la fuerza constante $P = 300$ N. Hallar (*a*) la velocidad angular máxima que alcanza la viga y el ángulo θ correspondiente y (*b*) el ángulo máximo θ_{max} que alcanza la viga.

Resp. $\omega_{max} = 0{,}680$ rad/s a $\theta = 22{,}4°$

$\theta_{max} = 45{,}9°$

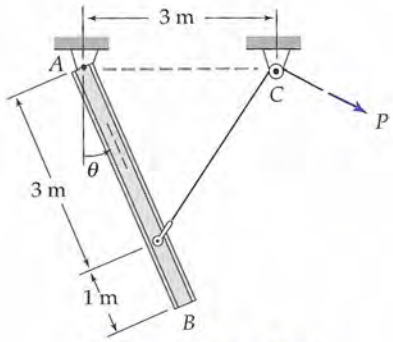


Figura problema 6.245

***6.246** El bloque cuadrado homogéneo de masa m se abandona en reposo con θ prácticamente nulo y bascula en torno al centro de su base en la esquina fija O. Hallar y representar gráficamente en función de θ las fuerzas normal y tangencial expresadas en las formas adimensionales N/mg y F/mg que ejerce la esquina sobre el bloque. (*a*) Si en O hay una pequeña entalla que impide el deslizamiento del bloque, hallar el ángulo θ para el que cesa el contacto con la esquina. (*b*) En ausencia de esa entalla, y con un coeficiente de rozamiento estático de 0,8, hallar el ángulo θ para el que se iniciará el deslizamiento.

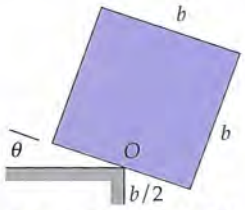


Figura problema 6.246

***6.247** El embalaje resbala rampa abajo con una velocidad v_1 y su canto choca con el pequeño obstáculo A. Hallar la velocidad mínima v_1 necesaria para que el embalaje rote en torno a A y viaje tumbado por la cinta transportadora, tal como se muestra en la figura. Representar gráficamente la variación de v_1 con α para $0 \leq \alpha \leq 45°$.

Resp. $v_1 = 4{,}71\sqrt{1 - \cos(45° - \alpha)}$ m/s

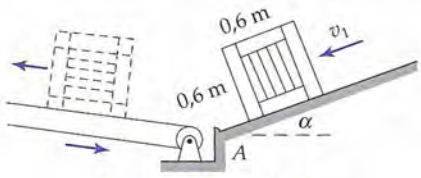


Figura problema 6.247

***6.248** La barra OA de 4 kg, de centro de masa G, está articulada en O al carro móvil dentro del plano vertical. El resorte tiene su longitud natural cuando $\theta = 0$. Hallar el valor estacionario

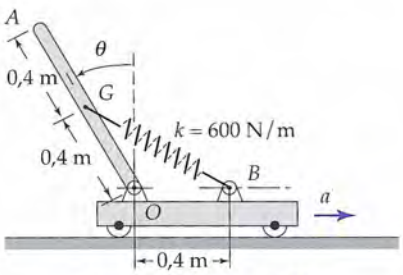


Figura problema 6.248

http://gratislibrospdf.com/

que adquiere el ángulo θ que forma la barra con la vertical durante una aceleración horizontal constante $\alpha = 4\ \text{m/s}^2$ del carro. (*Indicación*: Hay dos valores de θ, uno estable y otro inestable.

***6.249** La barra de 4 kg del problema 6.248 se encuentra inicialmente en reposo en posición vertical con el resorte de constante $k = 600\ \text{N/m}$ con su longitud natural. Si el carro recibe una aceleración $a = 0{,}4g$ a partir del reposo, hallar y representar gráficamente la velocidad angular ω de la barra en función θ para $0 \leq \theta \leq 90°$.

Resp. $$\omega = \sqrt{36{,}8 f_1(\theta) - 225 f_2(\theta)}$$

donde $f_1(\theta) = 0{,}4 \operatorname{sen} \theta + 1 - \cos \theta$

$$f_2(\theta) = \operatorname{sen} \theta - 2\left(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} - 1\right)$$

***6.250** La barra esbelta de 30 kg tiene una velocidad angular inicial $\omega_0 = 4\ \text{rad/s}$ cuando se halla en la posición vertical para la que el resorte no está alargado. Hallar la velocidad angular mínima ω_{min} que adquiere la barra y el ángulo correspondiente θ. Hallar también la velocidad angular de la barra cuando golpea con la superficie horizontal.

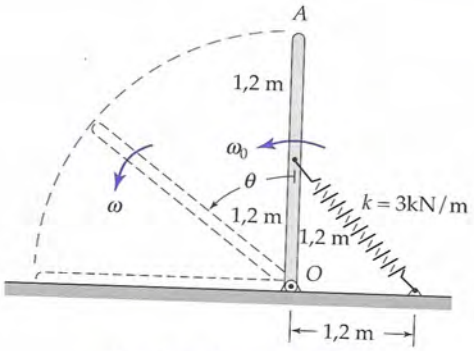


Figura problema **6.250**

***6.251** El péndulo compuesto consta de una varilla delgada de longitud l y masa $2m$ a la que está unido un disco uniforme de diámetro $l/2$ y masa m. El cuerpo oscila libremente en torno a un eje horizontal que pasa por O. Si el péndulo tiene una velocidad angular horaria de 3 rad/s cuando $\theta = 0$ en el instante $t = 0$, hallar el instante t en que el péndulo pasa por la posición $\theta = 90°$. La longitud del péndulo es $l = 0{,}8$ m.

Resp. $t = 0{,}302$ s

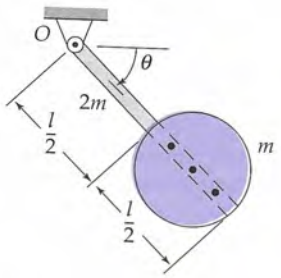
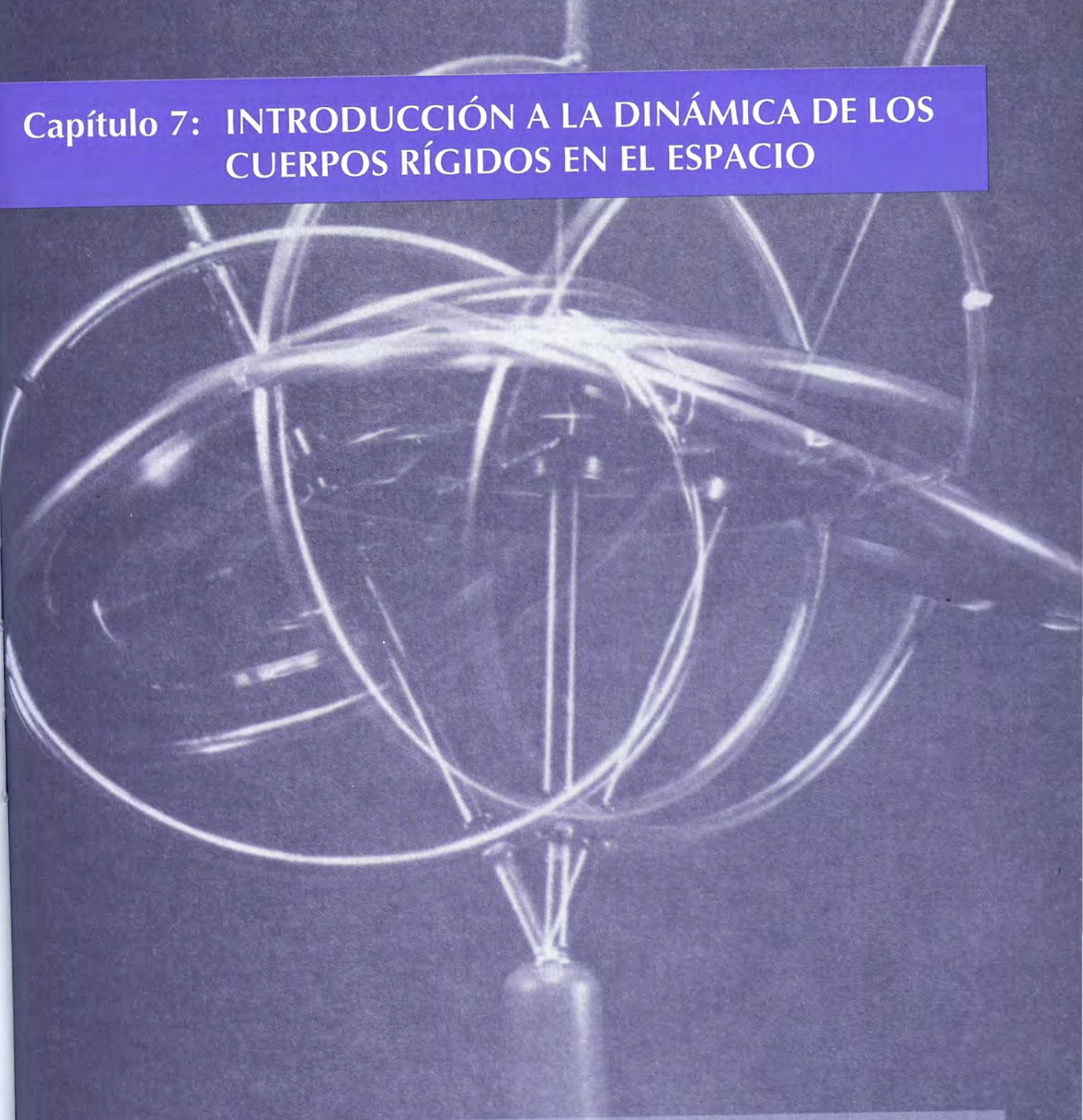


Figura problema **6.251**

http://gratislibrospdf.com/

Capítulo 7: INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS EN EL ESPACIO



El número de cuerpos rígidos cuyo movimiento es tridimensional es incontable. La inclusión de una tercera dimensión complica considerablemente la matemática que describe el movimiento. Ejemplo de esto lo tenemos en el movimiento giroscópico con giro y precesión combinados, tal como pone de manifiesto el giróscopo de demostración que ejecuta su movimiento alrededor del eje vertical.

http://gratislibrospdf.com/

7.1 INTRODUCCIÓN

Aun cuando un elevado porcentaje de los problemas de Dinámica que se presentan en la técnica se resuelven mediante los principios del movimiento plano, los adelantos modernos han centrado cada vez más su atención en problemas que requieren el análisis del movimiento en tres dimensiones. La inclusión de la tercera dimensión introduce una complejidad considerable en las relaciones cinemáticas y cinéticas. La tercera dimensión no sólo introduce una tercera componente a los vectores representativos de fuerzas, velocidades y aceleraciones lineales y cantidades de movimiento, sino que también añade la posibilidad de dos nuevas componentes a los vectores representativos de cantidades angulares tales como los momentos de fuerzas, velocidades angulares, aceleraciones angulares y momentos cinéticos. Y así, es en el movimiento tridimensional donde se aprovechan por completo todas las posibilidades del análisis vectorial.

En el estudio de la dinámica en el espacio será muy útil poseer una firme base de dinámica del movimiento plano, ya que el método de resolución de los problemas y muchos de los términos de las relaciones tridimensionales son iguales o análogos a los que aparecen al tratar los problemas bidimensionales. Si se emprendiera el estudio de la dinámica en el espacio sin haber estudiado previamente la dinámica del movimiento plano, se necesitaría más tiempo para dominar los principios y familiarizarse con el método de resolución de los problemas.

El tratamiento que se da al tema en este capítulo 7 no pretende ser un desarrollo completo del movimiento de los cuerpos rígidos en el espacio, sino simplemente una introducción a los fundamentos del mismo. Esta introducción debe ser suficiente, no obstante, para resolver gran número de los problemas más corrientes de movimiento en el espacio y, además, ha de servir de fundamento para estudios más avanzados. Vamos a seguir la misma pauta que en el movimiento del punto material y que en el movimiento plano de los cuerpos rígidos, es decir, examinaremos primero las aspectos necesarios de Cinemática y pasaremos después a la Cinética.

SECCIÓN A. CINEMÁTICA

7.2 TRASLACIÓN

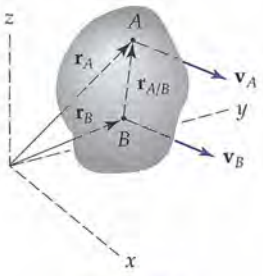


Figura 7.1

En la figura 7.1 se representa un cuerpo rígido trasladándose en el espacio tridimensional. Dos puntos cualesquiera del cuerpo, tales como los A y B, recorrerán rectas paralelas si el movimiento es de *traslación rectilínea*, o curvas congruentes si se trata de una *traslación curvilínea*. En uno y otro caso, todo segmento rectilíneo del cuerpo, tal como el AB, se mantiene paralelo a su posición inicial. Los vectores de posición y sus derivadas primera y segunda respecto al tiempo son

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B} \qquad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B \qquad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B$$

donde $\mathbf{r}_{A/B}$ se mantiene constante y, por tanto, no tiene derivada respecto al tiempo. Así pues, todos los puntos del cuerpo tendrán la misma velocidad y la misma aceleración. La cinemática de la traslación no presenta dificultades particulares y no es necesaria mayor elaboración.

http://gratislibrospdf.com/

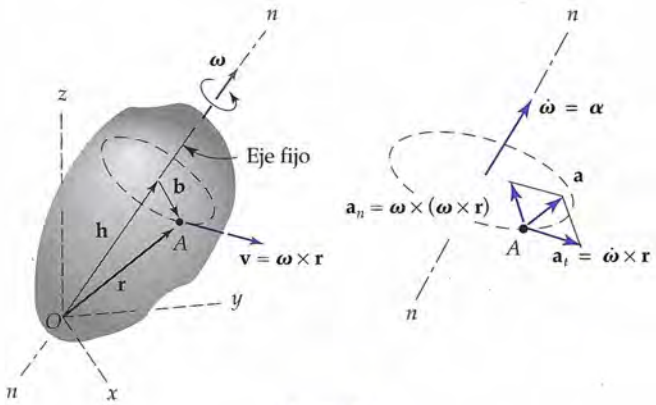


Figura 7.2

7.3 ROTACIÓN EN TORNO A UN EJE FIJO

Consideremos ahora la *rotación* del cuerpo rígido de la figura 7.2 en torno al eje *n-n*, fijo en el espacio, a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Esta es un vector paralelo al eje de rotación y sentido definido por la ya conocida regla de la mano derecha. En este caso de rotación en torno a un eje fijo, $\boldsymbol{\omega}$ no cambia de dirección ya que está en el eje. Por comodidad, tomamos un origen O situado en el eje de rotación. Todo punto, tal como A, que no se halle sobre el eje recorre un arco de circunferencia en un plano normal al eje y tiene una velocidad

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{7.1}$$

cuyo significado puede aclararse sustituyendo $\mathbf{r}$ por $\mathbf{h} + \mathbf{b}$ y observando que $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} = \mathbf{0}$. La aceleración de A está dada por la derivada respecto al tiempo de la ecuación 7.1. Así pues,

$$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{7.2}$$

donde $\dot{\mathbf{r}}$ se ha sustituido por su expresión $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Las componentes normal y tangencial de $\mathbf{a}$ en el movimiento circular tienen los valores conocidos $a_n = |\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})| = b\omega^2$ y $a_t = |\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}| = b\alpha$, donde $\alpha = \dot{\omega}$. Puesto que tanto $\mathbf{v}$ como $\mathbf{a}$ son perpendiculares a $\boldsymbol{\omega}$ y $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ resulta que $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{v} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, y $\mathbf{a} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ en el caso de rotación en torno a un eje fijo.

7.4 MOVIMIENTO PLANO GENERAL

Cuando todos los puntos de un cuerpo rígido se mueven dentro de planos paralelos a un plano fijo P (fig. 7.3), se tiene una forma general de movimiento plano. Se acostumbra tomar el plano de referencia pasando por el centro de masa G y suele mencionarse como plano del movimiento. Como todo punto del cuerpo, como A', ejecuta un movimiento idéntico al ejecutado por el punto A del plano, resulta que la cinemática del movimiento plano tratada en el capítulo 5 proporciona una descripción completa del movimiento cuando se aplica al plano de referencia.

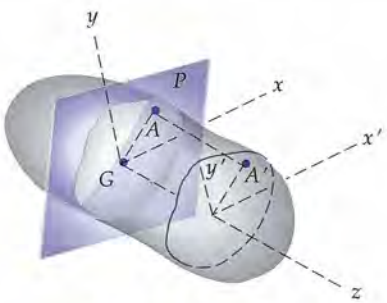


Figura problema 7.3

http://gratislibrospdf.com/

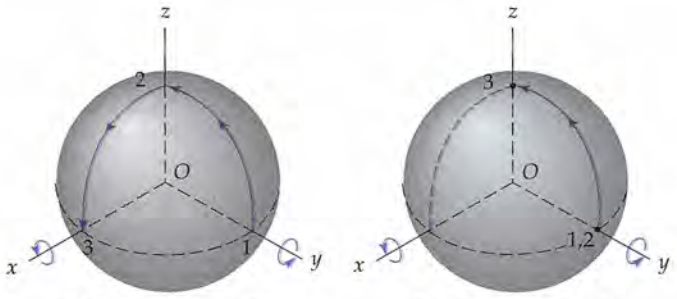


Figura 7.4

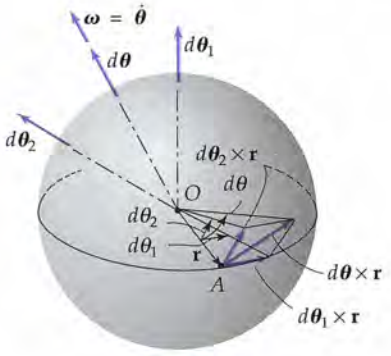


Figura 7.5

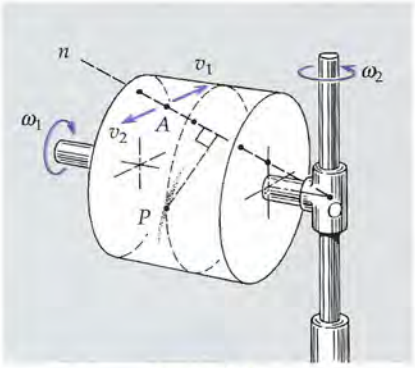


Figura 7.6

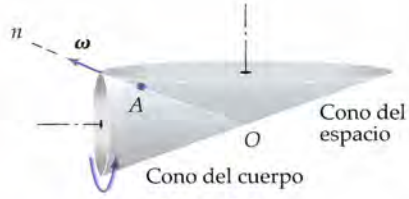


Figura 7.7

7.5 ROTACIÓN EN TORNO A UN PUNTO FIJO

Cuando un cuerpo gira en torno a un punto fijo, la velocidad angular deja de ser un vector de dirección constante y este cambio reclama un concepto de rotación más generalizado.

Primero hemos de examinar bajo qué condiciones las rotaciones obedecen la regla del paralelogramo respecto a la adición y por tanto pueden tratarse como vectores. Consideremos la esfera maciza de la figura 7.4 perteneciente a un cuerpo rígido limitado a girar en torno al punto fijo O.

Los ejes x-y-z están fijos en el espacio y por tanto no giran con el cuerpo. En la parte *a* de la figura, dos rotaciones sucesivas de 90° de la esfera, la primera alrededor del eje x y la segunda alrededor del eje y, dan lugar al movimiento de un punto que se halla inicialmente sobre el eje y en la posición 1 y pasa sucesivamente a las posiciones 2 y 3. En cambio, si se invierte el orden de las rotaciones, el punto no sufre movimiento alguno durante la rotación y, pero se mueve hasta el punto 3 durante la rotación de 90° alrededor del eje x. Así pues, los dos casos no dan el mismo resultado y resulta evidente en este ejemplo particular que las rotaciones finitas no obedecen en general a la ley del paralelogramo de la suma de vectores y no son conmutativas. Por tanto, las rotaciones finitas *no* podrán tratarse como vectores.

En cambio, las rotaciones infinitesimales sí obedecen la ley del paralelogramo de la adición de vectores. Este hecho se presenta de nuevo en la figura 7.5 que representa el efecto combinado de dos rotaciones infinitesimales $d\boldsymbol{\theta}_1$ y $d\boldsymbol{\theta}_2$ en torno a los ejes respectivos que pasan por el punto fijo O. A causa de $d\boldsymbol{\theta}_1$, el punto A sufre un desplazamiento $d\boldsymbol{\theta}_1 \times \mathbf{r}$ y, análogamente, a causa de $d\boldsymbol{\theta}_2$, el punto A sufre un desplazamiento $d\boldsymbol{\theta}_2 \times \mathbf{r}$. Cualquiera que sea el orden de adición de estos desplazamientos infinitesimales, se obtiene el mismo desplazamiento resultante, que es $d\boldsymbol{\theta}_1 \times \mathbf{r} + d\boldsymbol{\theta}_2 \times \mathbf{r} = (d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2) \times \mathbf{r}$. Luego, las dos rotaciones equivalen a la rotación única $d\boldsymbol{\theta} = d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2$. Se deduce que las velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\boldsymbol{\theta}}_2$ pueden sumarse vectorialmente dando $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. Se obtiene la conclusión de que, en un instante cualquiera, un cuerpo que tenga un punto fijo, está girando instantáneamente alrededor de un eje particular que pasa por ese punto.

Para ayudar a fijar el concepto de eje instantáneo de rotación, citaremos un ejemplo concreto. La figura 7.6 representa un rotor cilíndrico macizo de plástico transparente que contiene varias partículas negras atrapadas en su interior.

http://gratislibrospdf.com/

El rotor gira a la velocidad constante ω_1 alrededor del eje de su árbol y éste, a su vez, gira a la velocidad angular ω_2 alrededor del eje vertical fijo, teniendo las rotaciones los sentidos que se indican. Si se fotografiara el rotor en cierto instante de su movimiento, la imagen resultante presentaría una recta de puntos negros muy nítidos, lo que indicaría que su velocidad era nula en ese instante. Esa recta de puntos sin velocidad establece la posición instantánea del eje de rotación O-n. Todo punto de esta recta, como A, tendrá dos componentes de velocidad: v_1 producida por ω_1 y v_2 producida por ω_2, que serán de módulos iguales y sentidos opuestos. Los demás puntos, tales como P, aparecerán borrosos y sus movimientos se manifestarán en forma de trazos borrosos que describen pequeños arcos circulares situados en planos normales al eje O-n. Así pues, todas las partículas del cuerpo, excepto las situadas en la recta O-n, se hallan girando instantáneamente siguiendo arcos de circunferencia alrededor del eje instantáneo de rotación. Si se tomara una sucesión de fotografías, se vería que el eje de rotación vendría definido por una nueva serie de puntos nítidos y que dicho eje variaría de posición tanto en el espacio como con relación al cuerpo. En el caso de una rotación genérica de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo, pues, se ve que el eje de rotación no es, en general, una recta fija en el cuerpo.

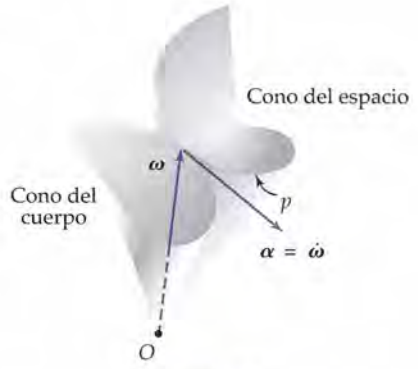


Figura 7.8

(a) Cono del cuerpo y cono del espacio. En el cilindro de plástico de la figura 7.6, el eje instantáneo de rotación O-A-n engendra en torno al eje del cilindro un cono circular recto llamado *cono del cuerpo*. Mientras ambas rotaciones prosiguen y el cilindro gira alrededor del eje vertical, el eje instantáneo de rotación genera también en torno al eje vertical un cono circular recto llamado *cono del espacio*. En la figura 7.7 se representan los conos correspondientes a este ejemplo particular y en ella puede verse que el cono del cuerpo rueda sobre el cono del espacio y que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo yace en la recta tangente de ambos conos. En un caso más general en el que las rotaciones no fueran constantes, los conos del cuerpo y del espacio ya no serían conos circulares rectos (fig. 7.8), pero el cono del cuerpo seguiría rodando sobre el cono del espacio.

(b) Aceleración angular. La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de un cuerpo rígido en movimiento tridimensional es la derivada respecto al tiempo de su velocidad angular $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$. Contrastando con el caso de rotación en un plano, en que el escalar α mide sólo la variación del módulo de la velocidad angular, en el movimiento tridimensional el vector $\boldsymbol{\alpha}$ refleja el cambio de dirección de $\boldsymbol{\omega}$ además de la variación de su módulo. Así, en la figura 7.8, donde la punta del vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ sigue la curva del espacio p y varía a la vez de módulo y dirección, la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ es un vector tangente a dicha curva en la dirección de variación de $\boldsymbol{\omega}$.

Cuando el módulo de $\boldsymbol{\omega}$ permanece constante, la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ se hace normal a $\boldsymbol{\omega}$. En este caso, si $\boldsymbol{\Omega}$ representa la velocidad a la que gira el vector $\boldsymbol{\omega}$ sobre sí mismo (*precesión*) cuando éste forma el cono del espacio, la aceleración angular puede escribirse

$$\alpha = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} \tag{7.3}$$

Esta relación se ve fácilmente en la figura 7.9, en la cual los vectores $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\Omega}$, que aparecen en la figura inferior, guardan entre sí la misma relación que los vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{r}$ y $\boldsymbol{\omega}$ de la figura superior al relacionar la velocidad de un punto A de un cuerpo rígido con su vector de posición respecto a O y la velocidad angular del cuerpo.

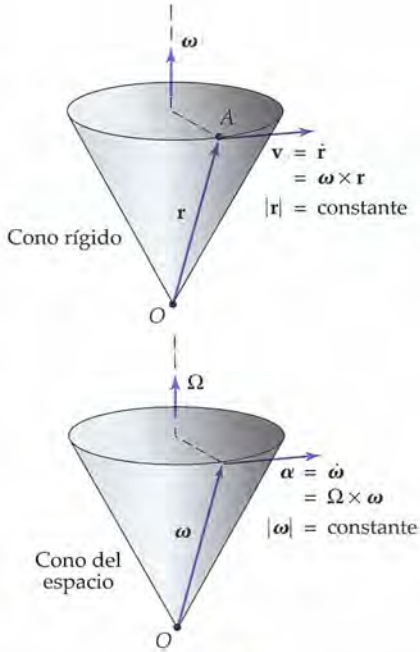


Figura 7.9

http://gratislibrospdf.com/

Utilizando la figura 7.2 para representar la rotación de un cuerpo rígido en torno a un punto fijo O, siendo n-n el eje instantáneo de rotación, vemos que la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ de un punto cualquiera A del cuerpo vienen dadas por las mismas expresiones que se aplican al caso en que el eje es fijo, es decir

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad [7.1]$$

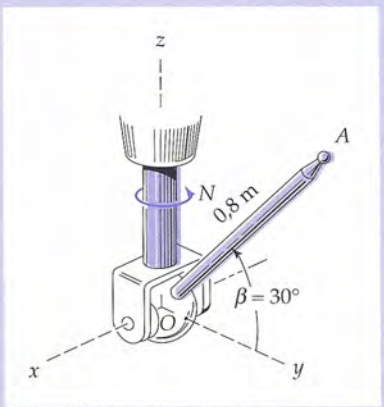
$$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad [7.2]$$

La única diferencia entre los casos de rotación en torno a un eje fijo y en torno a un punto fijo reside en el hecho de que en este último la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ presenta una componente normal a $\boldsymbol{\omega}$ debida a la variación de dirección de $\boldsymbol{\omega}$, así como una componente en la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ que refleja las variaciones del módulo de $\boldsymbol{\omega}$. Aunque todos los puntos del eje de rotación n-n tengan momentáneamente velocidad nula, sus aceleraciones *no* son nulas puesto que $\boldsymbol{\omega}$ está variando de dirección. Por el contrario, en la rotación en torno a un eje fijo $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ sólo tiene una componente a lo largo del eje fijo que refleja la variación del módulo de $\boldsymbol{\omega}$. Y además, es evidente que los puntos pertenecientes al eje fijo carecen de velocidad y aceleración.

Aunque la exposición de este apartado se ha desarrollado para el caso de rotación en torno a un punto fijo, hemos de observar que la rotación es función *exclusivamente* de la variación angular, por lo que las expresiones de $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ no dependen de la inamovilidad del punto en torno al cual tiene lugar la rotación. Es decir, puede haber rotación independientemente del movimiento lineal del punto en torno al cual se rota. Esta conclusión es la equivalente tridimensional al concepto de rotación de un cuerpo rígido en movimiento plano expuesto en el apartado 5.2 y que se empleó a lo largo de los capítulos 5 y 6.

PROBLEMA TIPO 7.1

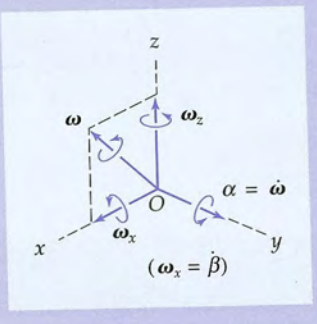
El brazo OA de 0,8 m de un mecanismo de telemando gira alrededor del eje horizontal x de la horquilla y el conjunto completo gira alrededor del eje z a la celeridad constante N = 60 rpm. Simultáneamente el brazo se eleva a razón de $\dot{\beta} = 4$ *rad/s. Para la posición* $\beta = 30°$ *hallar (a) la velocidad angular de OA, (b) la aceleración angular de OA, (c) la velocidad del punto A y (d) la aceleración del punto A. Si, además del movimiento descrito, el árbol vertical y el punto O poseyeran un movimiento lineal, en la dirección z por ejemplo, ¿influiría ese movimiento en la velocidad angular o en la aceleración angular de OA?*



http://gratislibrospdf.com/

Solución (a). Como el brazo OA gira a la vez alrededor de los ejes x e y, tendrá las componentes $\omega_x = \dot{\beta} = 4$ rad/s y $\omega_z = 2\pi N/60 = 2\pi(60)/60 = 6{,}283$ rad/s. La velocidad angular es

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_z = 4\mathbf{i} + 6{,}283\mathbf{k} \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$



(b) La aceleración angular de OA es

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_x + \dot{\boldsymbol{\omega}}_z$$

Como $\boldsymbol{\omega}_z$ no varía de módulo ni de dirección, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_z = \mathbf{0}$. Pero $\boldsymbol{\omega}_x$ varía de dirección y por ello tiene una derivada que, según 7.3, es

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \boldsymbol{\omega}_z \times \boldsymbol{\omega}_x = 6{,}283\mathbf{k} \times 4\mathbf{i} = 25{,}13\mathbf{j} \text{ rad/s}^2$$

(1) Por tanto

$$\boldsymbol{\alpha} = 25{,}13\mathbf{j} + \mathbf{0} = 25{,}13\mathbf{j} \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

(c) Siendo $\mathbf{r} = 0{,}693\mathbf{j} + 0{,}4\mathbf{k}$ m el vector de posición de A, su velocidad será, según 7.1

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 6{,}283 \\ 0 & 0{,}693 & 0{,}4 \end{vmatrix} = -4{,}35\mathbf{i} - 1{,}60\mathbf{j} + 2{,}77\mathbf{k} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

(d) Según 7.2, la aceleración de A es

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 25{,}13 & 0 \\ 0 & 0{,}693 & 0{,}4 \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 6{,}283 \\ -4{,}35 & -1{,}60 & 2{,}77 \end{bmatrix} \\ &= (10{,}50\mathbf{i}) + (10{,}05\mathbf{i} - 38{,}44\mathbf{k} - 6{,}40\mathbf{k}) \\ &= 20{,}11\mathbf{i} - 38{,}44\mathbf{j} - 6{,}40\mathbf{k} \text{ m/s}^2 \end{aligned} \qquad \textit{Resp.}$$

(2)

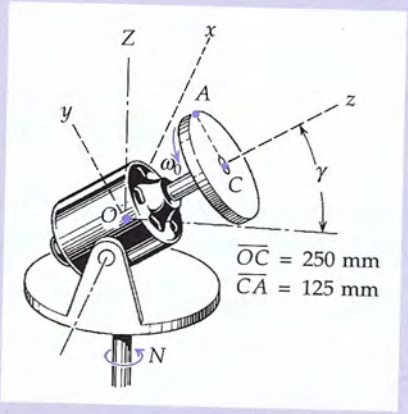
El movimiento angular de OA depende únicamente de las variaciones angulares N y $\dot{\beta}$, por lo que ningún movimiento lineal de O afecta a $\boldsymbol{\omega}$ ni a $\boldsymbol{\alpha}$.

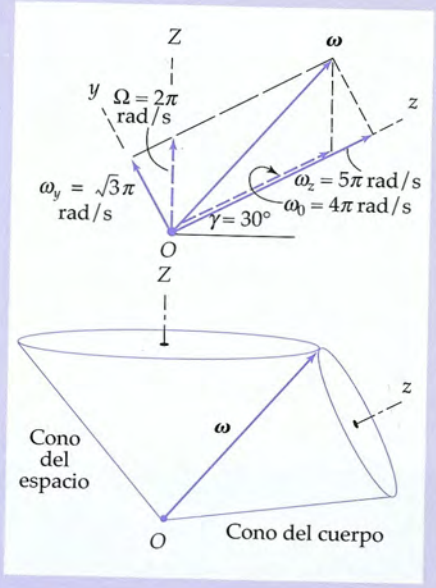
(1) Otra posibilidad sería suponer que los ejes x-y-z sean solidarios al árbol vertical y la horquilla y así girarán. La derivada de ω_x se hace $\dot{\omega}_x = 4\dot{\mathbf{i}}$. Pero según 5.11, tenemos que $\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega}_z \times \mathbf{i} = 6{,}283\mathbf{k} \times \mathbf{i} = 6{,}283\mathbf{j}$. O sea, como antes, $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_x = 4(6{,}283)\mathbf{j} = 25{,}13\mathbf{j}$ rad/s^2.

(2) Para comparar procedimientos, sugerimos obtener estos valores de v y a aplicando las ecuaciones 2.18 y 2.19 del movimiento del punto material en coordenadas esféricas, haciendo los cambios de símbolos necesarios.

http://gratislibrospdf.com/

El motor eléctrico con su disco solidario funciona con una celeridad constante reducida de 120 rpm en el sentido indicado. Su carcasa y la base de montaje se encuentran inicialmente en reposo. A continuación, el conjunto completo se pone a girar en torno al eje vertical Z a la velocidad constante N = 60 rpm, permaneciendo γ fijo a 30°. Determinar (a) la velocidad angular y la aceleración angular del disco, (b) los conos del espacio y del cuerpo y (c) la velocidad y la aceleración del punto A en lo alto del borde del disco en el instante representado.





Solución. Los ejes x, y y z de vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son solidarios del armazón del motor coincidiendo el eje z con el eje del rotor y el x con el eje horizontal que pasa por O alrededor del cual cabecea el motor. El eje Z es vertical y contiene el vector unitario $\mathbf{K} = \mathbf{j}\cos\gamma + \mathbf{k}\,\text{sen}\,\gamma$.

(a) El rotor con el disco tienen dos componentes de velocidad angular $\omega_0 = 120(2\pi)/60 = 4\pi$ rad/s en torno al eje z y $\Omega = 6 = (2\pi)/60 = 2\pi$ rad/s en torno al eje Z. Así pues, la velocidad angular se hace

(1) $$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\Omega} = \omega_0\mathbf{k} + \Omega\mathbf{K}$$
$$= \omega_0\mathbf{k} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{j}\cos\gamma + \mathbf{k}\,\text{sen}\,\gamma) = (\Omega\cos\gamma)\mathbf{j} + (\omega_0 + \Omega\,\text{sen}\,\gamma)\mathbf{k} \quad \textit{Resp.}$$
$$= (2\pi\cos 30°)\mathbf{j} + (4\pi + 2\pi\,\text{sen}\,30°)\mathbf{k} = \pi(\sqrt{3}\mathbf{j} + 5{,}0\mathbf{k})\ \text{rad/s}$$

Según 7.3, la aceleración angular del disco es

(2) $$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}$$
$$= \Omega(\mathbf{j}\cos\gamma + \mathbf{k}\,\text{sen}\,\gamma) \times [(\Omega\cos\gamma)\mathbf{j} + (\omega_0 + \Omega\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{k}]$$
$$= \Omega(\omega_0\cos\gamma + \Omega\,\text{sen}\,\gamma\cos\gamma)\mathbf{i} - (\Omega^2\,\text{sen}\,\gamma\cos\gamma)\mathbf{i}$$
(3) $$= (\Omega\omega_0\cos\gamma)\mathbf{i} = \mathbf{i}(2\pi)(2\pi)\cos 30° = 68{,}4\mathbf{i}\ \text{rad/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

(b) La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es un vector que constituye un elemento común a los conos del cuerpo y del espacio que ya pueden ahora construirse de la forma indicada.

(c) El vector de posición del punto A en el instante considerado es

$$\mathbf{r} = 0{,}215\mathbf{j} + 0{,}250\mathbf{k},\ \text{m}$$

Según la ecuación 7.1, la velocidad de A es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \sqrt{3}\pi & 5\pi \\ 0 & 0{,}125 & 0{,}250 \end{vmatrix} = -0{,}1920\pi\mathbf{i}\ \text{m/s} \quad \textit{Resp.}$$

(1) Obsérvese que $\omega_0 + \Omega = \omega_y + \omega_z$, tal como se ve en el diagrama de vectores.

(2) Recuérdese que 7.3 da la expresión completa de α sólo en el caso de precesión uniforme, en que $|\omega|$ es constante, como es el caso en este problema.

(3) Como el módulo de ω es constante, α ha de ser tangente a la base del cono del espacio, lo que la sitúa en el sentido x positivo de acuerdo con nuestros cálculos.

http://gratislibrospdf.com/

Según la ecuación 7.2, la aceleración de A es

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \\ &= 68{,}4\mathbf{i} \times (0{,}125\mathbf{j} + 0{,}250\mathbf{k}) + \pi(\sqrt{3}\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times (-0{,}1920\pi\mathbf{i}) \\ &= -26{,}6\mathbf{j} + 11{,}83\mathbf{k}\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}\end{aligned}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

7.1 Coloque este libro sobre su escritorio, con unos ejes fijos orientados tal como se indica. Gírelo 90° en torno al eje x y después, desde esa nueva posición, gírelo 90° en torno al eje y. Haga un dibujo del libro en su posición final. Repita luego el proceso, pero invirtiendo el orden de las rotaciones. A la vista de los resultados, saque sus conclusiones acerca de la suma vectorial de vectores finitos. Confronte sus observaciones con la figura 7.4.

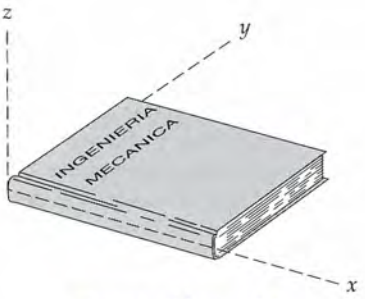


Figura problema 7.1

7.2 Repita el experimento del problema 7.1, pero con ángulos pequeños, 5° por ejemplo. Observe que la posición final es casi la misma en ambas secuencias de rotaciones. ¿A qué conclusión le lleva esta observación respecto a la combinación de rotaciones infinitesimales y respecto a las derivadas temporales de las magnitudes angulares? Confronte sus observaciones con la figura 7.5.

7.3 Un mecanismo cronométrico consta del brazo distribuidor rotatorio AB y del contacto fijo C. Si el brazo gira en torno al eje fijo OA con la velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega} = 30(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ rad/s y si las coordenadas del contacto C son (20, 30, 80) milímetros, hallar el valor de la aceleración de la punta B del brazo distribuidor cuando pasa por el punto C.

Resp. $a = 1285\ \text{m/s}^2$

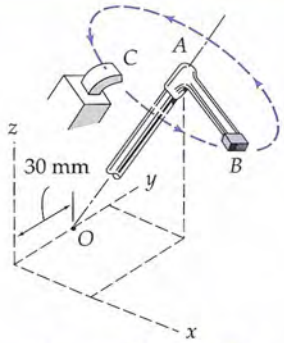


Figura problema 7.3

7.4 El disco gira con una velocidad de rotación propia de 15 rad/s en torno a su eje horizontal z, primero en el sentido (a) y luego en el sentido (b). El conjunto gira a $N = 10$ rad/s en torno al eje vertical fijo. Construir los conos del cuerpo y del espacio en ambos casos.

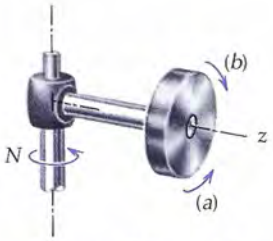


Figura problema 7.4

7.5 La barra está articulada en el eje O-O de la horquilla solidaria al extremo del árbol que gira con una velocidad angular constante ω_0 tal como se muestra. Si θ decrece constantemente según $-\dot{\theta} = p$, escribir las expresiones de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y de la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la barra.

Resp. $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{j} + \omega_0\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\alpha} = -p\omega_0\mathbf{i}$

http://gratislibrospdf.com/

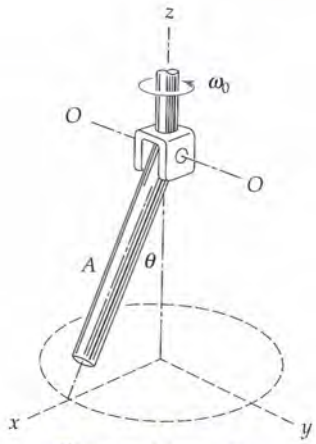


Figura problema 7.5

7.6 El disco gira alrededor del eje fijo OC con una velocidad angular constante $\omega = 20$ rad/s. En cierto instante, el punto A de la periferia pasa por un punto cuyas coordenadas x-y-z son 40, 118 y 51 mm, respectivamente. Calcular los módulos de la velocidad $\mathbf{v}$ y de la aceleración $\mathbf{a}$ del punto A. Determinar asimismo el radio R del disco.

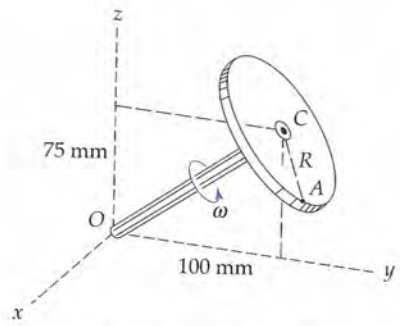


Figura problema 7.6

7.7 El ventilador de cuatro palas rota alrededor del eje fijo OB con una velocidad angular constante $N = 1200$ rpm. Escribir las expresiones vectoriales de la velocidad $\mathbf{v}$ y de la aceleración $\mathbf{a}$ de la punta A de la pala para el instante en que sus coordenadas x-y-z son 0,260, 0,240 y 0,473, respectivamente.

Resp. $\mathbf{v} = 27{,}3\mathbf{i} - 3{,}87\mathbf{j} - 13{,}07\mathbf{k}$ m/s

$\mathbf{a} = -949\mathbf{i} + 2520\mathbf{j} - 230\mathbf{k}$ m/s^2

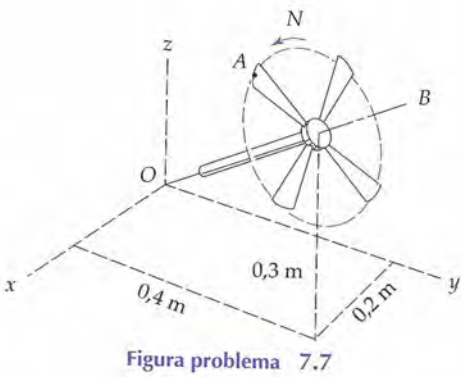


Figura problema 7.7

7.8 Un disco gira en torno a un eje fijo con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega} = 10(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ rad/s. En cierto instante, un punto P de su perímetro tiene una velocidad cuyas componentes x e y son 3 m/s y -2 m/s, respectivamente. Hallar el módulo v de la velocidad de P y la distancia radial R desde P al eje de rotación. Determinar asimismo el módulo a de la aceleración de P.

7.9 Un cuerpo rígido gira en torno a un eje fijo con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ rad/s. Si las componentes x e y de la aceleración de uno de sus puntos A son, respectivamente, 10 m/s^2 y 8 m/s^2, hallar el módulo a de la aceleración del punto A y la distancia radial R desde A al eje de rotación.

Resp. $a = 15{,}65$ m/s^2, $R = 0{,}652$ m

7.10 Un cuerpo rígido gira en torno a un eje fijo con una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ rad/s^2. En cierto instante, la aceleración tangencial de un punto A del cuerpo tiene unas componentes y y z que valen $-0{,}5$ m/s^2 y 0,4 m/s^2, respectivamente. Hallar el módulo de la aceleración tangencial de P y la distancia R radial desde A al eje de rotación.

Problemas representativos

7.11 Se representa nuevamente el motor del problema tipo 7.2. Si el motor rota alrededor del eje x a la velocidad constante $\dot{\gamma} = 3\pi$ rad/s sin rotación alrededor del eje Z ($N = 0$), hallar la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del rotor y el disco al pasar por la posición $\gamma = 30°$. El motor gira constantemente a 120 rpm. Determinar asimismo la velocidad y la aceleración del punto A que se encuentra en lo más alto del disco para esa posición.

Resp. $\boldsymbol{\alpha} = 12\pi^2\mathbf{j}$ rad/s^2

$\mathbf{v} = 0{,}125\pi(-4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ m/s

$\mathbf{a} = -0{,}125\pi^2(25\mathbf{j} + 18\mathbf{k})$ m/s^2

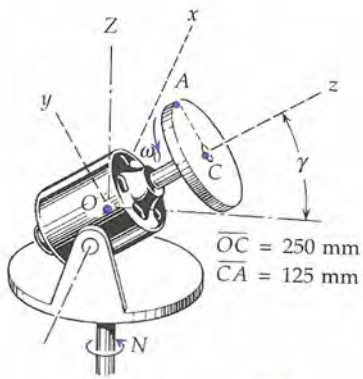


Figura problema 7.11

http://gratislibrospdf.com/

7.12 El rotor B gira alrededor de su eje inclinado OA con la celeridad $N_1 = 200$ rpm, donde $\beta = 30°$. A la vez, el conjunto rota en torno al eje vertical z a la velocidad N_2. Si la velocidad angular total del rotor tiene un módulo de 40 rad/s, hallar N_2.

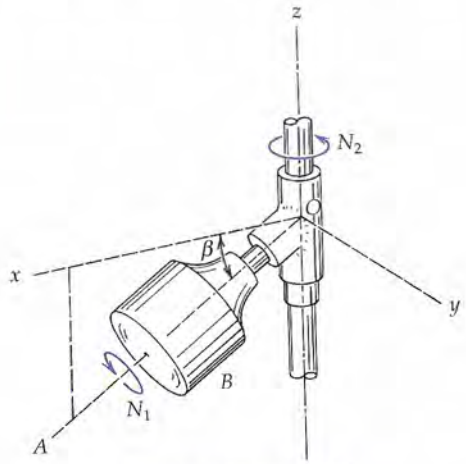


Figura problema 7.12

7.13 El carrete A gira alrededor de su eje con una velocidad angular constante de 20 rad/s, primero en el sentido de ω_a y luego en el sentido de ω_b. A la vez, el conjunto rota en torno al eje vertical con una velocidad angular $\omega_1 = 10$ rad/s. Hallar el módulo ω de su velocidad angular total y dibujar los conos del espacio y del cuerpo para cada caso.

Resp. $\omega = 26{,}5$ rad/s, 17,32 rad/s

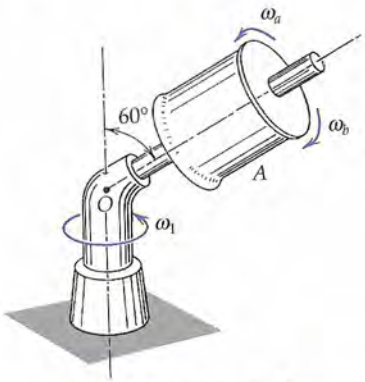


Figura problema 7.13

7.14 Resolver el problema 7.13 para el caso en que $\omega_1 = 5$ rad/s y $\omega_b = 20$ rad/s.

7.15 Al manipular el halterio, la garra del mecanismo robótico lleva una velocidad angular $\omega_p = 2$ rad/s en torno al eje OG con γ fijo en 60°. La totalidad del conjunto rota en torno al eje Z a la velocidad constante $\Omega = 0{,}8$ rad/s. Hallar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del halterio. Expresar los resultados en función de la orientación dada de los ejes x-y-z, donde el eje y es paralelo al Y.

Resp. $\boldsymbol{\omega} = -0{,}4\mathbf{i} + 2{,}69\mathbf{k}$ rad/s, $\boldsymbol{\alpha} = 0{,}8\mathbf{j}$ rad/s^2

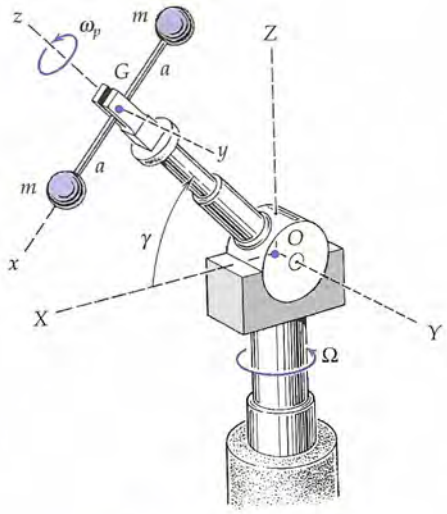


Figura problema 7.15

7.16 Hallar la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del halterio del problema 7.15 para las condiciones definidas, salvo que Ω aumenta a razón de 3 rad/s^2 en el instante considerado.

7.17 El robot de la figura tiene cinco grados de libertad de rotación. Los ejes x-y-z están fijos al anillo de la base, que gira

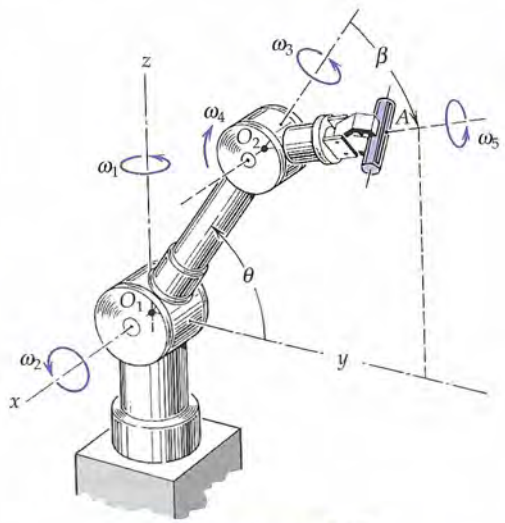


Figura problema 7.17

http://gratislibrospdf.com/

en torno al eje z a la velocidad ω_1. El brazo O_1O_2 gira en torno al eje x a la velocidad $\omega_2 = \dot{\theta}$. El brazo de mando O_2A gira en torno al eje O_1-O_2 a la velocidad ω_3 y a la velocidad $\omega_4 = \dot{\beta}$ en torno a un eje perpendicular que pasa por O_2 y que está momentáneamente paralelo al eje x. Finalmente, la garra gira en torno al eje O_2-A a la velocidad ω_5. Los módulos de estas velocidades angulares son todos constantes. Para la configuración representada, hallar el módulo ω de la velocidad angular total de las garras para $\theta = 60°$ y $\beta = 45°$ si $\omega_1 = 2$ rad/s, $\dot{\theta} = 1{,}5$ rad/s y $\omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0$. Expresar vectorialmente la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del brazo O_1O_2.

Resp. $\omega = 2{,}5$ rad/s, $\boldsymbol{\alpha} = 3\mathbf{j}$ rad/s^2

7.18 Para el robot del problema 7.17 hallar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la garra para $\theta = 60°$ y $\beta = 45°$ si $\omega_3 = 3$ rad/s, $\omega_5 = 2$ rad/s y $\omega_1 = \omega_2 = \omega_4 = 0$. Determinar asimismo la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la garra.

7.19 Para el robot del problema 7.17 hallar la velocidad angular total $\boldsymbol{\omega}$ de la garra para $\theta = 60°$ y $\beta = 45°$ si $\omega_1 = 2$ rad/s, $\omega_2 = 1{,}5$ rad/s, $\omega_4 = 3$ rad/s y $\omega_3 = \omega_5 = 0$. Determinar asimismo la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del brazo O_1O_2.

Resp. $\boldsymbol{\omega} = -1{,}5\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ rad/s, $\boldsymbol{\alpha} = 3\mathbf{j}$ rad/s^2

7.20 Se representa nuevamente el motor con el disco solidario del problema tipo 7.2. Si el motor alcanza una velocidad 3000 rpm en dos segundos a partir del reposo bajo una aceleración constante, hallar la aceleración angular total del rotor y el disco un tercio de segundo después de ponerse en movimiento si la base gira a la velocidad constante $N = 30$ rpm. El ángulo $\gamma = 30°$ se mantiene constante.

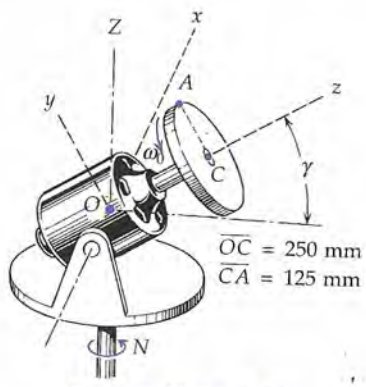


Figura problema 7.20

7.21 El disco de 120 mm de radio gira alrededor del eje z a la velocidad constante $\omega_z = 20$ rad/s y el conjunto entero rota en torno al eje fijo x a la velocidad constante $\omega_x = 10$ rad/s. Calcular los módulos de la velocidad **v** y de la aceleración **a** del punto B en el instante en que $\theta = 30°$.

Resp. $v = 3{,}95$ m/s, $a = 72{,}2$ m/s^2

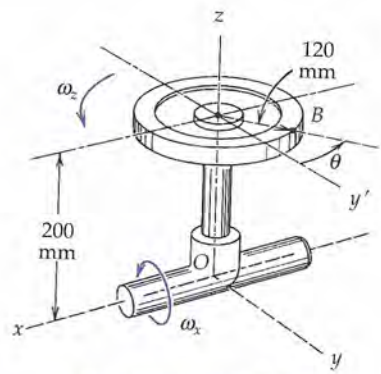


Figura problema 7.21

7.22 En la figura del problema 7.20 supóngase que el árbol del motor y su disco solidario están girando en torno al eje z con una velocidad ω_0 de 120 rpm que aumenta a razón de 10 rad/s^2 en la posición $\gamma = 30°$. A la vez, $\dot{\gamma}$ vale 12 rad/s y aumenta a razón de 15 rad/s^2. Determinar la expresión vectorial de la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del rotor en ese instante. No hay rotación en torno al eje Z.

7.23 La grúa tiene una pluma de longitud $OP = 24$ m y gira constantemente alrededor del eje vertical a razón de 2 rpm en el sentido indicado. Simultáneamente la pluma desciende a la celeridad constante $\dot{\beta} = 0{,}10$ rad/s. Calcular los módulos de la velocidad y de la aceleración del extremo P de la pluma en el instante en que $\beta = 30°$.

Resp. $v = 3{,}48$ m/s, $a = 1{,}104$ m/s^2

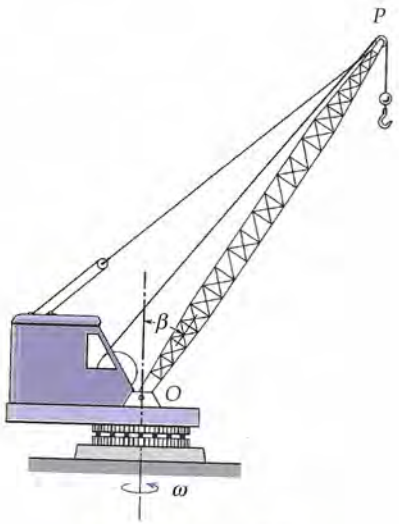


Figura problema 7.23

http://gratislibrospdf.com/

7.24 El árbol vertical y su horquilla solidaria giran en torno al eje z a la velocidad constante $\Omega = 4$ rad/s. Simultáneamente el árbol B rota en torno a su eje geométrico OA a la velocidad constante $\omega_0 = 3$ rad/s y el ángulo γ disminuye constantemente a razón de $\pi/4$ rad/s. Hallar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y el módulo de la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del árbol B cuando $\gamma = 30°$. Los ejes x-y-z están fijos a la horquilla y giran con ella.

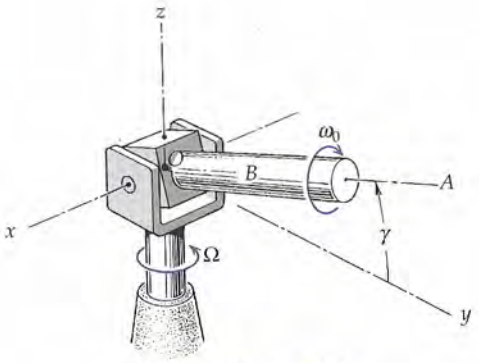


Figura problema 7.24

7.25 El volante rueda sin deslizamiento siguiendo una circunferencia de radio R y da una vuelta completa alrededor del eje vertical y con celeridad constante en un tiempo τ. Determinar la expresión vectorial de la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del volante y representar los conos del cuerpo y del espacio.

Resp. $\boldsymbol{\alpha} = -\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \frac{R}{r}\,\mathbf{i}$

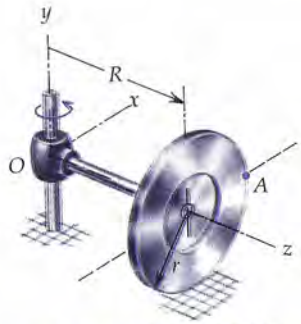


Figura problema 7.25

7.26 Determinar las expresiones de la velocidad $\mathbf{v}$ y de la aceleración $\mathbf{a}$ del punto A del volante del problema 7.25 para la posición representada en que A está cruzando la línea horizontal que pasa por el centro del volante.

▶**7.27** El cono de revolución A rueda uniformemente sobre el cono de revolución fijo B y realiza una vuelta completa alrededor de B cada cuatro segundos. Calcular el módulo de la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cono A.

Resp. $\alpha = 6{,}32$ rad/s^2

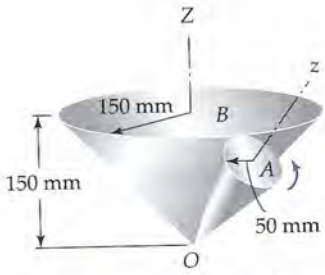


Figura problema 7.27

▶**7.28** Para el robot del problema 7.17, hallar el módulo ω de la velocidad angular de la garra para $\theta = 60°$ y $\beta = 45°$, si $\omega_2 = 1{,}5$ rad/s, $\omega_3 = 2$ rad/s, $\omega_4 = 0{,}5$ rad/s y $\omega_1 = \omega_5 = 0$. Hallar también la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la garra.

Resp. $\omega = 2{,}24$ rad/s, $\boldsymbol{\alpha} = -3{,}46\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ rad/s^2

▶**7.29** El extremo de la barra A está soldado a la horquilla que está articulada con un pasador al eje z del cursor C. Éste puede rotar alrededor del eje x del árbol fijo. La barra A y la horquilla pueden girar en torno a los ejes x y z pero no en torno al eje y. Sin tener en cuenta el movimiento del otro extremo de la barra A, demostrar que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la barra A y su horquilla debe cumplir la relación $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{h}) = 0$. Los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{h}$ son cualesquiera dirigidos, respectivamente, según la barra y según el eje fijo. El eje de la barra A es perpendicular al eje de la horquilla (dirección z) y, por tanto, está contenido en el plano x-y.

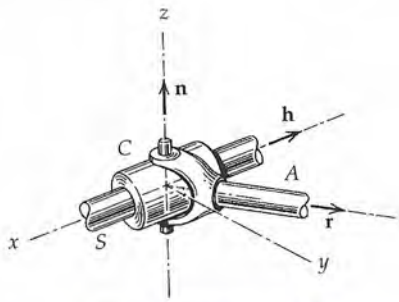


Figura problema 7.29

▶**7.30** El cono de revolución macizo de radio de la base r y altura h, rueda sin deslizamiento por una superficie plana. El centro B de la base se mueve describiendo una trayectoria cir-

http://gratislibrospdf.com/

cular alrededor del eje z, con celeridad constante v. Determinar *la velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ *y la aceleración angular* $\boldsymbol{\alpha}$ *del cono macizo.*

Resp. $\boldsymbol{\omega} = v\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{h^2}}\,\mathbf{i}$

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{v^2}{h^2}\left(\frac{r}{h}+\frac{h}{r}\right)\mathbf{j}$$

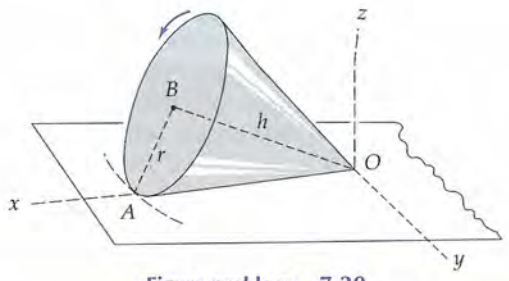


Figura problema 7.30

7.6 MOVIMIENTO GENERAL

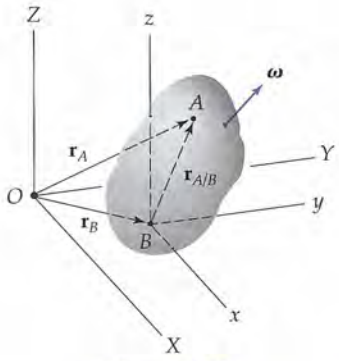


Figura 7.10

La aplicación de los principios del movimiento relativo es el mejor procedimiento para estudiar la cinemática de un cuerpo rígido en movimiento tridimensional. Así procedimos con los problemas de movimiento plano y ahora vamos a ampliar el procedimiento al movimiento espacial. Emplearemos a la vez ejes de referencia en traslación y rotación.

(a) Ejes de referencia en traslación. En la figura 7.10 se representa un cuerpo rígido animado de una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Como origen del sistema de referencia en traslación x-y-z tomamos el punto B. Respecto a éste, la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ de otro punto cualquiera A del cuerpo vienen dadas por las fórmulas de la velocidad y de la aceleración relativas.

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \qquad [5.4]$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} \qquad [5.7]$$

desarrolladas en los apartados 5.4 y 5.6 con relación al movimiento plano de los cuerpos rígidos, pero que son igualmente válidas para todo plano del espacio al cual deben pertenecer los tres vectores que aparecen en cada una de las ecuaciones.

Al aplicar estas relaciones al movimiento de un cuerpo rígido se observa en la figura 7.10 que la distancia $\overline{AB}$ permanece constante. Así, para la posición de un observador en x-y-z, A parece girar alrededor del punto B y mantenerse en una superficie esférica de centro B. En consecuencia, el movimiento general puede considerarse como una traslación del cuerpo con el movimiento de B más una rotación del cuerpo entorno a B.

Los términos del movimiento relativo representan el efecto de la rotación en torno a B y son iguales a las expresiones de la velocidad y de la aceleración estudiados en el apartado anterior para la rotación de un cuerpo rígido y de una línea en torno a un punto fijo. Por tanto, las ecuaciones de la velocidad y la aceleración relativas serán

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}\\ \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})\end{aligned} \qquad (7.4)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular instantánea del cuerpo.

http://gratislibrospdf.com/

La selección del punto de referencia B es, en teoría, totalmente arbitraria. En la práctica, el punto B se toma, por comodidad, en algún punto del cuerpo cuyo movimiento se conozca total o parcialmente. Si se toma como punto de referencia el A, las ecuaciones del movimiento relativo quedan en la forma

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

donde $\mathbf{r}_{B/A} = -\mathbf{r}_{B/A}$. Debe quedar claro que $\boldsymbol{\omega}$ y, por tanto, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ son los mismos vectores en una y otra formulación puesto que el movimiento angular absoluto del cuerpo es independiente de la elección del sistema de referencia. Cuando hablemos de las ecuaciones cinéticas en el caso del movimiento general, veremos que el centro de masa constituye el punto de referencia más cómodo que puede elegirse.

Si los puntos A y B de la figura 7.10 representan los extremos de alguna varilla rígida del mando de un mecanismo espacial, cuyas conexiones son a modo de rótulas (como en el problema tipo 7.3), es necesario imponer determinadas condiciones cinemáticas. Evidentemente, ninguna rotación de la varilla en torno a su propio eje afecta a la acción de la propia varilla. Entonces, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_n$, cuyo vector es perpendicular a la varilla, describirá la acción de la misma. Es necesario, por tanto, que $\boldsymbol{\omega}_n$ y $\mathbf{r}_{A/B}$ sean perpendiculares, lo que se cumple si $\boldsymbol{\omega}_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0$. Análogamente, sólo la componente $\boldsymbol{\alpha}_n$[1] de la aceleración angular de la varilla normal a AB afecta a su acción, por lo que debe cumplirse que también $\boldsymbol{\alpha}_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0$.

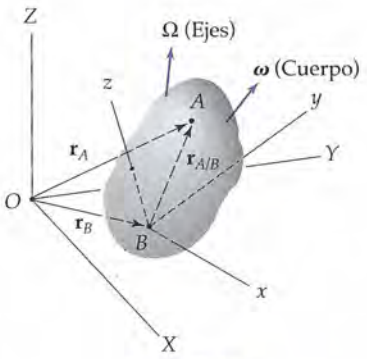


Figura 7.11

(b) Ejes de referencia en rotación. Una formulación más general del movimiento de un cuerpo rígido en el espacio exige el empleo de ejes de referencia que giren al mismo tiempo que se trasladan. La descripción de la figura 7.10 se modifica en la 7.11 que muestra unos ejes de referencia ligados al punto B, como antes, pero que giran con una velocidad angular absoluta Ω, la cual puede ser diferente de la velocidad angular absoluta $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo.

Apliquemos ahora las ecuaciones 5.11, 5.12, 5.13 y 5.14 desarrolladas en el apartado 5.7 al describir el movimiento plano de un cuerpo rígido empleando ejes en rotación. Para ampliar estas relaciones de dos a tres dimensiones basta con incluir la componente z de los vectores, paso que dejamos al lector. Sustituyendo $\boldsymbol{\omega}$ por la velocidad angular Ω de los ejes x-y-z en rotación, dichas ecuaciones nos dan

$$\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j} \qquad \dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k} \tag{7.5}$$

como derivadas respecto al tiempo de los vectores unitarios en rotación solidarios de x-y-z. Las expresiones de la velocidad y aceleración del punto B quedan

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$$
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} \tag{7.6}$$

[1] Puede demostrarse que $\boldsymbol{\alpha}_n = \dot{\boldsymbol{\omega}}_n$ si la velocidad angular de la varilla en torno a su propio eje no varía. Véase el apartado 37 de *Dinámica, 2ª edición*, del autor principal (Ed. Reverté, 1976).

http://gratislibrospdf.com/

siendo $\mathbf{v}_{rel} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{j}$ y $\mathbf{a}_{rel} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{j}$, respectivamente, la velocidad y la aceleración del punto A medidas en x-y-z por un observador solidario de ese sistema. Observemos de nuevo que $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular de los ejes que puede ser diferente a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo. Vemos también que el módulo de $\mathbf{r}_{A/B}$ no varía en el caso de cuerpo rígido, pero que cambia de dirección respecto a x-y-z cuando la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ de los ejes es diferente a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo. Observemos además que, si x-y-z están unidos rígidamente al cuerpo, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{v}_{rel}$ y $\mathbf{a}_{rel}$ son ambas nula, lo que hace a estas ecuaciones exactamente iguales a las 7.4.

En el apartado 5.7 se desarrolló asimismo la relación (ec. 5.13) entre la derivada temporal de un vector $\mathbf{V}$ medida en el sistema fijo X-Y y la derivada temporal de $\mathbf{V}$ medida en el sistema en rotación x-y. Esa relación aplicada al caso tridimensional es

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \tag{7.7}$$

Al aplicar esta transformación al vector de posición relativa $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ en el cuerpo rígido de la figura 7.11, obtenemos

$$\left(\frac{d\mathbf{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\mathbf{r}_B}{dt}\right)_{xyz} + \left(\frac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt}\right)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

o sea

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

que nos da la primera de las ecuaciones 7.6.

Las ecuaciones 7.6 resultan especialmente útiles cuando los ejes de referencia son solidarios de un cuerpo en movimiento en cuyo seno tiene lugar un movimiento relativo.

La ecuación 7.7 puede también escribirse empleando el operador vectorial

$$\left(\frac{d[\ ]}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d[\ ]}{dt}\right)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times [\ ] \tag{7.7a}$$

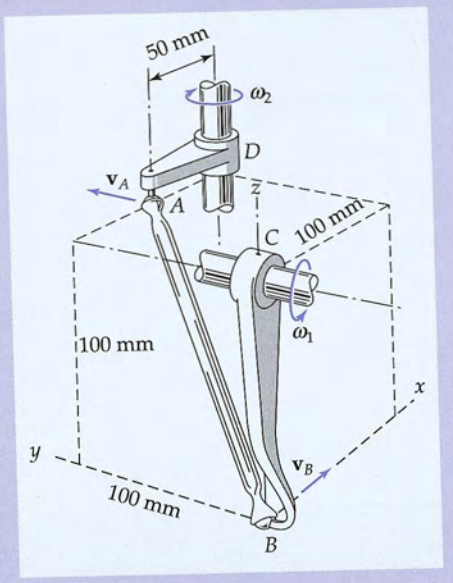
donde [ ] representa cualquier vector $\mathbf{V}$ expresable tanto en el sistema X-Y-Z como en el x-y-z. Si el operador se aplica a sí mismo, se obtiene la segunda derivada temporal que resulta ser

$$\left(\frac{d^2[\ ]}{dt^2}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d^2[\ ]}{dt^2}\right)_{xyz} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times [\ ] + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times [\ ]) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d[\ ]}{dt}\right)_{xyz} \tag{7.7b}$$

Dejamos este ejercicio al lector, observando que la forma 7.7*b* es la misma que la segunda de las ecuaciones 7.6 expresadas para $\mathbf{a}_{A/B} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B$.

http://gratislibrospdf.com/

El cigüeñal CB gira alrededor del eje horizontal con una velocidad angular $\omega_1 = 6$ rad/s que es contante durante un intervalo corto del movimiento en el que está comprendida la posición representada. La biela AB tiene rótulas en sus extremos y enlaza la manivela DA con CB. Determinar, para el instante representado, la velocidad angular ω_2 de la manivela DA y la velocidad angular ω_n del eje de la biela AB.



Solución. Resolveremos primero la ecuación 7.4 para la velocidad relativa (1) empleando unos ejes de referencia en rotación vinculados a B. La ecuación es

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{A/B}$$

(2) donde $\boldsymbol{\omega}_n$ es la velocidad angular de la biela AB tomada perpendicularmente a AB. Las velocidades de A y B son

$$[v = r\omega] \qquad \mathbf{v}_A = 50\omega_2\mathbf{j} \qquad \mathbf{v}_B = 100(6)\mathbf{i} = 600\mathbf{i}\ \text{mm/s}$$

Además, $\mathbf{r}_{A/B} = 50\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 100\mathbf{k}$ mm y aplicando en la relación de velocidades resulta

$$50\omega_2\mathbf{j} = 600\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{n_x} & \omega_{n_y} & \omega_{n_z} \\ 50 & 100 & 100 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante e igualando los coeficientes de **i**, **j** y **k** se tiene

$$\begin{aligned} -6 &= +\omega_{n_y} - \omega_{n_z} \\ \omega_2 &= -2\omega_{n_x} + \omega_{n_z} \\ 0 &= 2\omega_{n_z} - \omega_{n_y} \end{aligned}$$

Despejando ω_2 de estas ecuaciones

$$\omega_2 = 6\ \text{rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

(1) Tomamos B como punto de referencia, pues su movimiento puede determinarse fácilmente a partir de la velocidad angular ω_1 de CB.

(2) La velocidad angular ω de AB se toma como un vector ω_n normal a AB, ya que toda rotación de la biela en torno a su propio eje AB carece de influencia sobre el comportamiento del dispositivo.

http://gratislibrospdf.com/

③ La ecuación de la velocidad relativa puede escribirse $\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{A/B}$, lo que exige que $\mathbf{v}_{A/B}$ sea perpendicular a la vez a $\boldsymbol{\omega}_n$ y $\mathbf{r}_{A/B}$. Esta ecuación sola no incorpora la condición adicional de que $\boldsymbol{\omega}_n$ sea perpendicular a $\mathbf{r}_{A/B}$. Así pues, debe cumplirse que $\boldsymbol{\omega}_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0$.

③ Tal como están escritas, las tres ecuaciones incluyen el hecho de que $\boldsymbol{\omega}_n$ es perpendicular a $\mathbf{v}_{A/B}$, pero no es posible resolverlas hasta no incluir la condición de que $\boldsymbol{\omega}_n$ sea perpendicular a $\mathbf{r}_{A/B}$. Así,

$$[\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0] \qquad 50\omega_{n_x} + 100\omega_{n_y} + 100\omega_{n_z} = 0$$

Combinando ésta con dos de las tres ecuaciones anteriores resultan las soluciones

$$\omega_{n_x} = -\tfrac{4}{3}\ \text{rad/s} \qquad \omega_{n_y} = -\tfrac{8}{3}\ \text{rad/s} \qquad \omega_{n_z} = \tfrac{10}{3}\ \text{rad/s}$$

O sea,

$$\boldsymbol{\omega}_n = \tfrac{2}{3}(-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})\ \text{rad/s}$$

con

$$\omega_n = \tfrac{2}{3}\sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = 2\sqrt{5}\ \text{rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 7.4

Hallar la aceleración angular $\dot{\omega}_2$ de la manivela AD del problema tipo 7.3 para las condiciones mencionadas. Hallar también la aceleración angular $\dot{\boldsymbol{\omega}}_n$ de la biela AB.

Solución. Las aceleraciones de las barras pueden hallarse mediante la segunda de las ecuaciones 7.4, que puede escribirse

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}}_n \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega}_n \times (\boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{A/B})$$

① Si la biela tuviese una componente de velocidad angular según *AB*, en tal caso podría tener lugar una variación tanto de módulo como de dirección de esta componente, lo que podría contribuir a la aceleración angular real de la biela como cuerpo rígido. No obstante, como las rotaciones en torno a su propio eje *AB* carecen de influencia sobre el movimiento del cigüeñal en *C* y de la manivela en *D*, nos ocupamos solamente de $\dot{\omega}_n$.

① donde $\boldsymbol{\omega}_n$ es, al igual que en el problema tipo 7.3, la velocidad angular de *AB* tomada perpendicularmente a *AB*. La aceleración angular de *AB* la escribimos $\dot{\boldsymbol{\omega}}_n$.

En función de sus componentes tangencial y normal, las aceleraciones de *A* y *B* son

$$\mathbf{a}_A = 50\omega_2^2\mathbf{i} + 50\dot{\omega}_2\mathbf{j} = 1800\mathbf{i} + 50\dot{\omega}_2\mathbf{j}\ \text{mm/s}^2$$
$$\mathbf{a}_B = 100\omega_1^2\mathbf{k} + (0)\mathbf{i} = 3600\mathbf{k}\ \text{mm/s}^2$$

Además

$$\boldsymbol{\omega}_n \times (\boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{A/B}) = -\omega_n^2\mathbf{r}_{A/B} = -20(50\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 100\mathbf{k})\ \text{mm/s}^2$$
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_n \times \mathbf{r}_{A/B} = (100\dot{\omega}_{n_y} - 100\dot{\omega}_{n_z})\mathbf{i} + (50\dot{\omega}_{n_z} - 100\dot{\omega}_{n_x})\mathbf{j} + (100\dot{\omega}_{n_x} - 50\dot{\omega}_{n_y})\mathbf{k}$$

Sustituyendo en la ecuación de la aceleración relativa e igualando los coeficientes respectivos de **i**, **j** y **k** resulta

$$\begin{aligned} 28 &= \dot{\omega}_{n_y} - \dot{\omega}_{n_z} \\ \dot{\omega}_2 + 40 &= -2\dot{\omega}_{n_x} + \dot{\omega}_{n_z} \\ -32 &= 2\dot{\omega}_{n_z} - \dot{\omega}_{n_y} \end{aligned}$$

http://gratislibrospdf.com/

Despejando $\dot{\omega}_2$ en estas ecuaciones se tiene

$$\dot{\omega}_2 = -36 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

El vector $\dot{\boldsymbol{\omega}}_n$ es perpendicular a $\mathbf{r}_{A/B}$ pero no a $\mathbf{v}_{A/B}$ como ocurría con $\boldsymbol{\omega}_n$.

(2) La componente de $\dot{\omega}_n$ no perpendicular a $v_{A/B}$ provoca la variación de la dirección de $v_{A/B}$.

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0] \qquad 2\dot{\omega}_{n_x} + 4\dot{\omega}_{n_y} + 4\dot{\omega}_{n_z} = 0$$

que, combinada con las relaciones anteriores entre estas mismas cantidades, da

$$\dot{\omega}_{n_x} = -8 \text{ rad/s}^2 \qquad \dot{\omega}_{n_y} = 16 \text{ rad/s}^2 \qquad \dot{\omega}_{n_z} = -12 \text{ rad/s}^2$$

O sea,

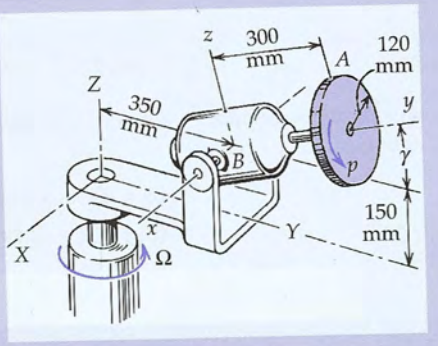
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_n = 4(-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

y

$$|\dot{\boldsymbol{\omega}}_n| = 4\sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = 4\sqrt{29} \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO 7.5

La carcasa del motor y su soporte giran en torno al eje Z a la celeridad constante $\Omega = 3$ rad/s. Respecto a la carcasa, el eje del motor y su disco solidario tienen una velocidad de giro $p = 8$ rad/s en el sentido indicado. Si γ vale constantemente 30° determinar la velocidad y la aceleración del punto A en lo más alto del disco y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del disco.



Solución. Los ejes de referencia rotatorios *x-y-z* son solidarios de la carcasa del motor y la base rotatoria del motor tiene instantáneamente la orientación que se muestra respecto a los ejes fijos X-Y-Z. Emplearemos tanto componentes X-Y-Z, de vectores unitarios **I**, **J** y **K**, como componentes *x-y-z*, de vectores unitarios **i**, **j** y **k**. La velocidad angular de los ejes *x-y-z* se hace $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{K} = 3\mathbf{K}$ rad/s.

(1) Tomando así los ejes de referencia conseguimos una descripción sencilla del movimiento del disco respecto a esos ejes.

Velocidad. La velocidad de *A* la da la primera de las ecuaciones 7.6

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

donde

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B = 3\mathbf{K} \times 0{,}350\mathbf{j} = -1{,}05\mathbf{I} = -1{,}05\mathbf{i} \text{ m/s}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} = 3\mathbf{K} \times (0{,}300\mathbf{j} + 0{,}120\mathbf{k})$$

$$= (-0{,}9 \cos 30^\circ)\mathbf{i} + (0{,}36 \operatorname{sen} 30^\circ)\mathbf{i} = -0{,}599\mathbf{i} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{p} \times \mathbf{r}_{A/B} = 8\mathbf{j} \times (0{,}300\mathbf{j} + 0{,}120\mathbf{k}) = 0{,}960\mathbf{i} \text{ m/s}$$

(2) Obsérvese que $\mathbf{K} \times \mathbf{i} = \mathbf{J} = \mathbf{j} \cos \gamma - \mathbf{k} \operatorname{sen} \gamma$, $\mathbf{K} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \cos \gamma$, y $\mathbf{K} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \operatorname{sen} \gamma$.

Luego

$$\mathbf{v}_A = -1{,}05\mathbf{i} - 0{,}599\mathbf{i} + 0{,}906\mathbf{i} = -0{,}689\mathbf{i} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

http://gratislibrospdf.com/

Aceleración. La aceleración de A la da la segunda de las ecuaciones 7.6

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

donde

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) = 3\mathbf{K} \times (3\mathbf{K} \times 0{,}350\mathbf{J}) = -3{,}15\mathbf{J}$$

$$= 3{,}15(-\mathbf{j} \cos 30^\circ + \mathbf{k} \operatorname{sen} 30^\circ) = -2{,}73\mathbf{j} + 1{,}58\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) = 3\mathbf{K} \times [3\mathbf{K} \times (0{,}300\mathbf{j} + 0{,}120\mathbf{k})]$$

$$= 3\mathbf{K} \times (-0{,}599\mathbf{i}) = -1{,}557\mathbf{j} + 0{,}899\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} = 2(3\mathbf{K}) \times 0{,}960\mathbf{i} = 5{,}76\mathbf{J}$$

$$= 5{,}76(\mathbf{j} \cos 30^\circ - \mathbf{k} \operatorname{sen} 30^\circ) = 4{,}99\mathbf{j} - 2{,}88\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{r}_{A/B}) = 8\mathbf{j} \times [8\mathbf{j} \times (0{,}300\mathbf{j} + 0{,}120\mathbf{k})]$$

$$= -7{,}68\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$

② Obsérvese que K x i = J = j cos γ- k sen γ, K x j = – i cos γγ K x k = i sen γ. ②

Aplicando estos valores en la expresión de $\mathbf{a}_A$ y agrupando términos resulta

$$\mathbf{a}_A = 0{,}703\mathbf{j} - 8{,}086\,\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$

y

$$a_A = \sqrt{(0{,}703)^2 + (8{,}086)^2} = 8{,}12 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Aceleración angular. Como la precesión es uniforme, podemos emplear la ecuación 7.3 y obtener

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} = 3\mathbf{K} \times (3\mathbf{K} + 8\mathbf{j})$$

$$= 0 + (-24 \cos 30^\circ)\mathbf{i} = -20{,}8\mathbf{i} \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

7.31 El helicóptero está picando a la velocidad constante de q rad/s. Si las palas del rotor giran a la velocidad constante de p rad/s, escríbase la expresión de la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del rotor. Tómese el eje y ligado al fuselaje, dirigido hacia adelante y perpendicular al eje del rotor.

Resp. $\boldsymbol{\alpha} = pq\mathbf{j}$

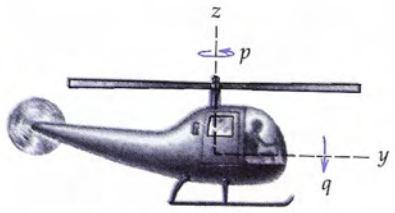


Figura problema 7.31

7.32 Se está proyectando un avión radar de reconocimiento, dirigido por radio, sin tripulación y propulsado por rotores

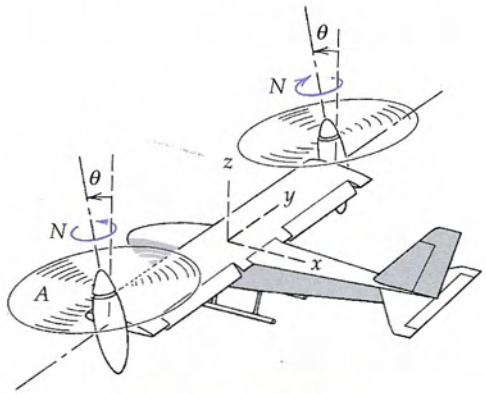


Figura problema 7.32

http://gratislibrospdf.com/

basculantes. El ascenso vertical comienza con $\theta = 0$ y luego sigue el vuelo horizontal a medida que θ va acercándose a 90°. Si los rotores giran con una celeridad constante N de 360 rpm, hallar la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del rotor A para $\theta = 30°$ si $\dot{\theta}$ se mantiene constantemente a 0,2 rad/s.

7.33 El cursor O y el árbol solidario OC giran en torno al eje fijo x_0 a la velocidad constante $\Omega = 4$ rad/s. A la vez, el disco gira en torno a OC a la velocidad constante $p = 10$ rad/s. Hallar el módulo de la velocidad angular total $\boldsymbol{\omega}$ del disco y determinar su aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$.

Resp. $\omega = 10{,}77$ rad/s, $\boldsymbol{\alpha} = -40\mathbf{j}$ rad/s^2

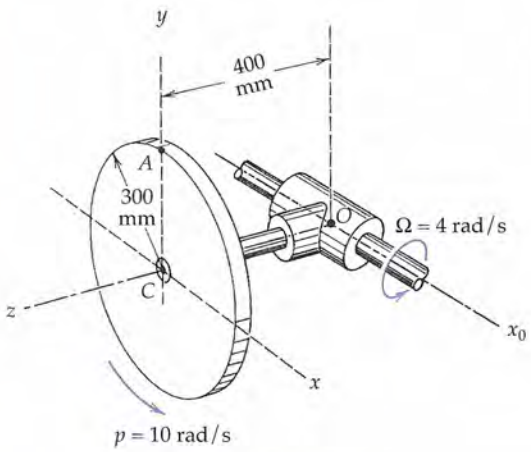


Figura problema 7.33

7.34 Si la velocidad angular p del disco del problema 7.33 aumenta a razón de 6 rad/s por segundo y si Ω permanece constantemente en 4 rad/s, hallar la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del disco en el instante en que p alcanza el valor de 10 rad/s.

7.35 Para las condiciones del problema 7.33, hallar la velocidad $\mathbf{v}_A$ y la aceleración $\mathbf{a}_A$ del punto A del disco cuando pasa por la posición que se muestra. Los ejes de referencia x-y-z son solidarios del cursor O y el árbol OC.

Resp. $\mathbf{v}_A = -3\mathbf{i} - 1{,}6\mathbf{j} + 1{,}2\mathbf{k}$ m/s

$\mathbf{a}_A = -34{,}8\mathbf{j} - 6{,}4\mathbf{k}$ m/s^2

7.36 Los collarines de los extremos de la barra telescópica AB se deslizan por los árboles fijos tal como se muestra. Durante un intervalo del movimiento, $v_A = 124$ mm/s y $v_B = 50$ mm/s. Hallar la expresión vectorial de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_n$ del eje geométrico de la barra en la posición que $y_A = 100$ mm e $y_B = 50$ mm.

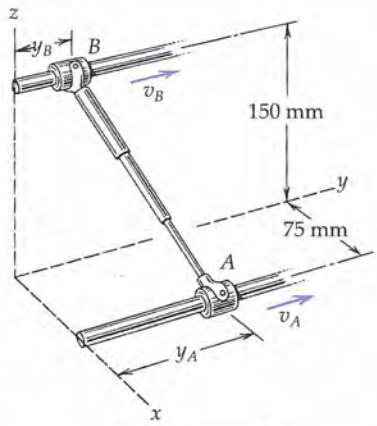


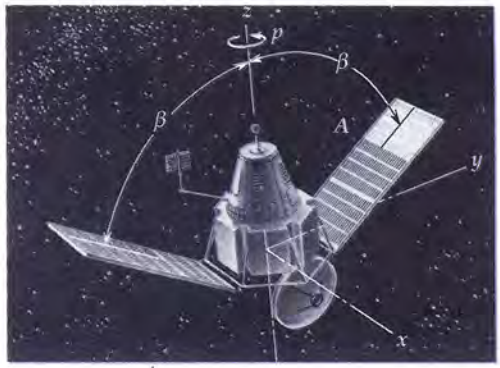
Figura problema 7.36

Problemas representativos

7.37 La estación espacial gira alrededor de su eje z, cuya dirección permanece constante en el espacio, a la velocidad $p = \frac{1}{10}$ rad/s. Simultáneamente, los paneles solares se están desplegando con una velocidad angular $\dot{\beta}$, programada para producir la variación B del modo que se muestra en el gráfico. Hallar la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del panel A en (a) un instante antes y (b) un instante después de llegar a la posición $\beta = 18°$.

Resp. (a) $\boldsymbol{\alpha} = -(3{,}88\mathbf{i} + 3{,}49\mathbf{j})10^{-3}$ rad/s^2

(b) $\boldsymbol{\alpha} = -3{,}49(10^{-3})\mathbf{j}$ rad/s^2



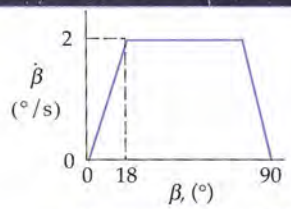


Figura problema 7.37

7.38 El cursor y la horquilla A reciben una velocidad ascendente constante de 0,2 m/s durante un intervalo de su movi-

http://gratislibrospdf.com/

miento, produciendo el deslizamiento del extremo B por la ranura del disco giratorio. Hallar la aceleración angular de la barra cuando pasa por la posición $z = 75$ mm. El disco gira a la velocidad constante de 2 rad/s.

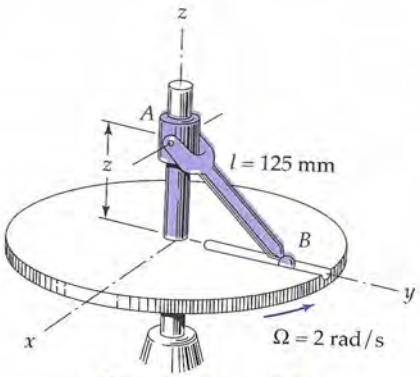


Figura problema 7.38

7.39 El disco circular de 100 mm de radio gira en torno a su eje z con una celeridad constante $p = 240$ rpm y el brazo OCB gira en torno al eje Y con una celeridad constante $N = 30$ rpm. Hallar la velocidad $\mathbf{v}$ del punto A del disco cuando pasa por la posición que se muestra. Emplear unos ejes x-y-z solidarios del brazo OCB.

Resp. $\mathbf{v} = \pi(0{,}1\mathbf{i} + 0{,}8\mathbf{j} + 0{,}08\mathbf{k})$ m/s
$\mathbf{a} = -\pi^2(6{,}32\mathbf{i} + 0{,}1\mathbf{k})$ m/s^2

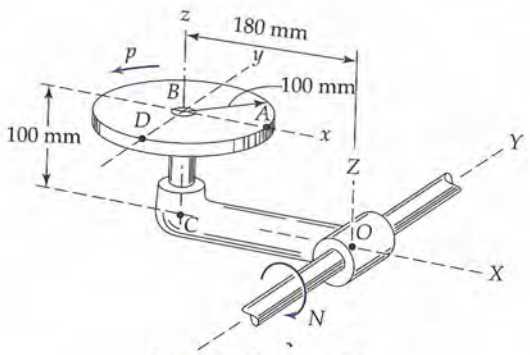


Figura problema 7.39

7.40 Resolver el problema 7.39 fijando los ejes de referencia x-y-z al disco giratorio.

7.41 Se repite aquí el robot del problema 7.17, pero con el sistema de coordenadas x-y-z con origen en O_2 y girando a la velocidad $\dot{\theta}$ en torno al eje X. Los ejes no rotatorios X-Y-Z, orientados como se muestra, tienen su origen en O_1. Si $\omega_2 = \dot{\theta} = 3$ rad/s const., $\omega_3 = 1{,}5$ rad/s const., $\omega_1 = \omega_5 = 0$, $\overline{O_1O_2} = 1{,}2$ m y $\overline{O_2A} = 0{,}6$ m, hallar la velocidad del centro A de la garra en el instante en que $\theta = 60°$. El ángulo β está en el plano y-z y vale constantemente 45°.

Resp. $\mathbf{v}_A = -0{,}636\mathbf{i} + -4{,}873\mathbf{j} + 1{,}273\mathbf{k}$ m/s

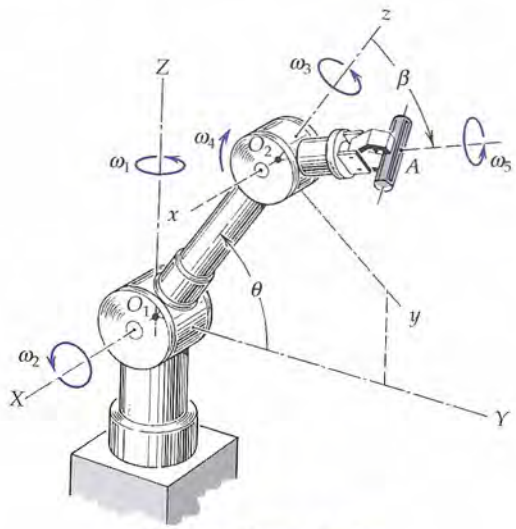


Figura problema 7.41

7.42 El centro O de la nave espacial se mueve por el espacio a celeridad constante. Durante el período previo a la estabilización, la nave está animada de una velocidad de rotación constante $\Omega = \frac{1}{2}$ rad/s en torno a su eje z. Los ejes x-y-z son solidarios del fuselaje de la nave y los paneles solares giran en torno al eje y a la velocidad constante $\theta = \frac{1}{4}$ rad/s relativa a la nave. Si es $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular absoluta de los paneles solares, hallar $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. Determinar también la aceleración del punto A cuando $\theta = 30°$.

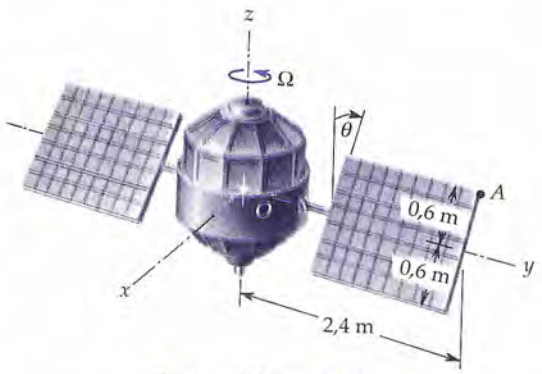


Figura problema 7.42

7.43 Durante un corto intervalo de movimiento, el cursor A se mueve a lo largo de su árbol fijo con una velocidad $v_A = 2$ m/s

http://gratislibrospdf.com/

en la dirección Y. A su vez, el cursor B se desliza a lo largo de su árbol vertical fijo. La barra AB tiene 700 mm de longitud y puede rotar en el interior de la horquilla en A para acomodarse a la variación de la orientación relativa de ambas horquillas. Hallar, para el instante en que A pasa por la posición en que $y = 200$ mm, la velocidad del cursor B y determinar la componente $\boldsymbol{\omega}_n$ normal a AB, de la velocidad angular de la barra. Encontrar también $\mathbf{v}_B$ derivando la relación $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ adecuada.

Resp. $\mathbf{v}_B = -\frac{2}{3}\mathbf{k}$ m/s

$\boldsymbol{\omega}_n = \frac{10}{49}(\frac{40}{3}\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ rad/s

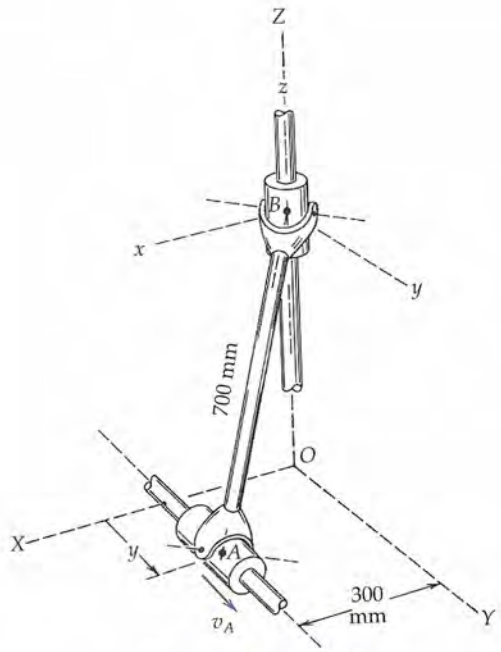


Figura problema 7.43

7.44 La biela AB está sujeta al brazo giratorio OA y a la corredera en B mediante sendas rótulas. El brazo OA está limitado a girar en torno al árbol vertical fijo y la corredera está limitada a moverse a lo largo de la barra rectangular inmóvil. Si la velocidad de la corredera es $v_B = 0{,}5$ m/s cuando $s = 50$ mm con OA en la posición indicada, calcular la correspondiente velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_n$ de la biela AB. Emplear los ejes no giratorios x-y-z solidarios de B.

7.45 El disco delgado de masa m y radio r gira en torno a su eje z con una velocidad angular constante p y la horquilla en la que está montado rota alrededor del eje X que pasa por O con una velocidad angular constante ω_1. A la vez, todo el conjunto gira en torno al eje fijo $\overline{Y}$ que pasa por O con una velocidad angular constante ω_2. Hallar la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ del punto A del borde del disco cuando pasa por la posición indicada, en la cual el plano x-y del disco coincide con el plano X-Y. Los ejes x-y-z son solidarios de la horquilla.

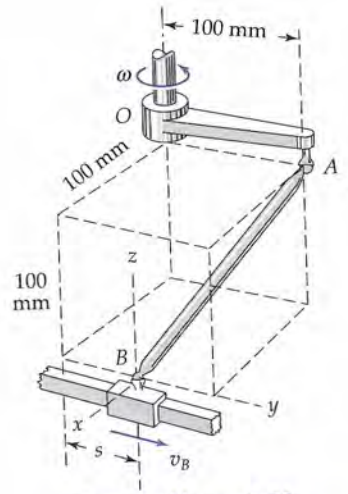


Figura problema 7.44

Resp. $\mathbf{v} = -rp\mathbf{i} - (r\omega_1 + b\omega_2)\mathbf{k}$

$\mathbf{a} = -\omega_2(b\omega_2 + 2r\omega_1)\mathbf{i} - r(\omega_1^2 + p^2)\mathbf{j} + 2rp\omega_2\mathbf{k}$

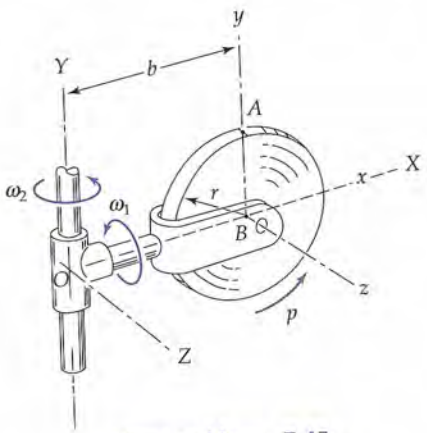


Figura problema 7.45

7.46 Para el robot de la figura del problema 7.41, hallar la velocidad del centro A de la garra para las condiciones siguientes: $\omega_1 = 2$ rad/s const., $\omega_2 = \dot{\theta} = -3$ rad/s const., $\omega_4 = \dot{\beta} = 1{,}5$ rad/s const., $\omega_3 = 0$, $\overline{O_1O_2} = 1{,}2$ m, $\overline{O_2A} = 0{,}6$ m, $\theta = 60°$ y $\beta = 45°$.

7.47 La cápsula de prueba de un simulador de vuelo consiste en un tambor que gira alrededor del eje a-a con una velocidad angular constante p relativa al armazón cilíndrico A. Este armazón está montado sobre cojinetes transversales horizontales y gira alrededor del eje horizontal b-b con velocidad constante $\dot{\theta}$. Todo el conjunto se hace girar alrededor del eje fijo

http://gratislibrospdf.com/

vertical z con velocidad angular constante Ω. Expresar la aceleración angular α del tambor giratorio durante el movimiento compuesto para un valor dado de θ.

Resp. $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\theta}\,(p \operatorname{sen} \theta - \Omega)\mathbf{i} - (p\Omega \cos \theta)\mathbf{j} + (p\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{k}$

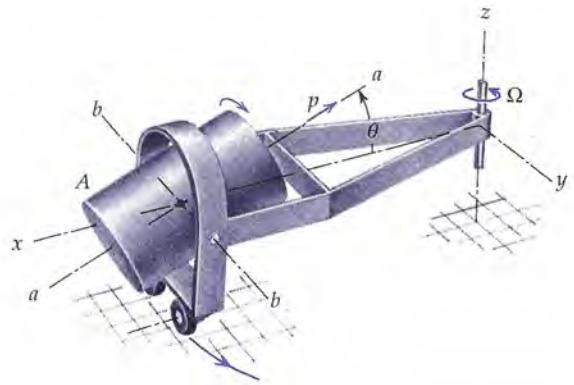


Figura problema 7.47

7.48 Un simulador, para perfeccionar el procedimiento de contacto con el suelo de una astronave, consiste en una estructura A montada sobre cuatro apoyos con cojinetes neumáticos, de tal manera que puede trasladarse y girar libremente sobre la superficie horizontal. Montado en la estructura hay un tambor B que puede girar alrededor del eje horizontal de la estructura A. Los ejes coordenados x-y-z son solidarios del tambor, y el eje forma un ángulo β con la horizontal. Dentro del tambor está el módulo de mando simulado C que puede girar, independientemente del tambor, alrededor de su eje z, con una velocidad p. Para una cierta prueba, la estructura móvil A está girando sobre la superficie horizontal, en el sentido mostrado, con una velocidad angular constante de 0,2 rad/s. Simultáneamente, el tambor B gira alrededor del eje x con una velocidad constante $\dot{\beta} = 0{,}15$ rad/s y el módulo C da vueltas en el tambor a la velocidad constante $p = 0{,}9$ rad/s en el sentido indicado. Para estas condiciones, determinar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del simulador C cuando pasa por la posición $\beta = 0$

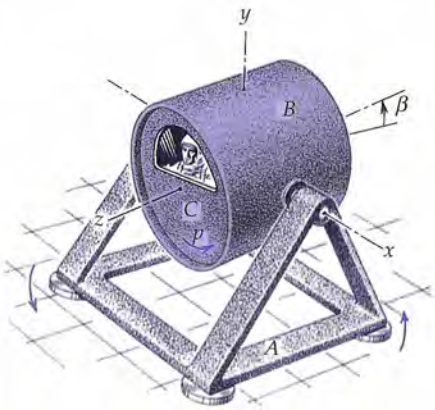


Figura problema 7.48

7.49 El motor hace girar al disco a la celeridad constante $p = 30$ rad/s. Además, el motor oscila alrededor del eje horizontal BO (eje y) a la celeridad constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s. A la vez, todo el conjunto rota alrededor del eje vertical C-C a la velocidad constante $q = 8$ rad/s. Hallar, para el instante en que $\theta = 30°$, la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del disco y la aceleración $\mathbf{a}$ del punto A del borde inferior del disco. Los ejes x-y-z son solidarios de la carcasa del motor y el plano O-x_0-y es horizontal.

Resp. $\mathbf{a} = -52{,}1\mathbf{i} - 9{,}23\mathbf{j} + 120{,}2\mathbf{k}$ m/s^2

$\boldsymbol{\alpha} = 13{,}86\mathbf{i} + 208\mathbf{j} + 52\mathbf{k}$ rad/s^2

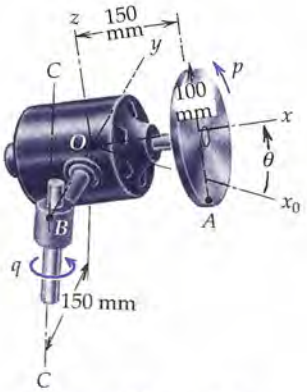


Figura problema 7.49

7.50 Para las mismas condiciones especificadas en el problema tipo 7.2, salvo que γ aumenta constantemente a razón de 3π rad/s, hallar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del rotor para la posición $\gamma = 30°$. (*Sugerencia*: Aplicar la ecuación 7.7 al vector $\boldsymbol{\omega}$ para hallar $\boldsymbol{\alpha}$. Obsérvese que en el problema tipo 7.2 $\boldsymbol{\Omega}$ ya no es la velocidad angular completa de los ejes.)

Resp. $\boldsymbol{\omega} = \pi(-3\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$ rad/s

$\boldsymbol{\alpha} = \pi^2(4\sqrt{3}\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 3\sqrt{3}\mathbf{k})$ rad/s^2

7.51 El rotor del giroscopio de la figura se mueve a la velocidad constante de 100 rpm, relativa a los ejes x-y-z y en el sentido indicado. Si el ángulo γ que forma el anillo de la suspensión cardan con el plano horizontal X-Y se hace crecer uniformemente a razón de 4 rad/s y si el conjunto se fuerza a tener precesión en torno a la vertical al ritmo constante de $N = 20$ rpm, calcular el módulo de la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del ro-

http://gratislibrospdf.com/

tor cuando $\gamma = 30°$. Aplicar la ecuación 7.7 a la velocidad angular del rotor.

Resp. $\alpha = 42{,}8 \text{ rad/s}^2$

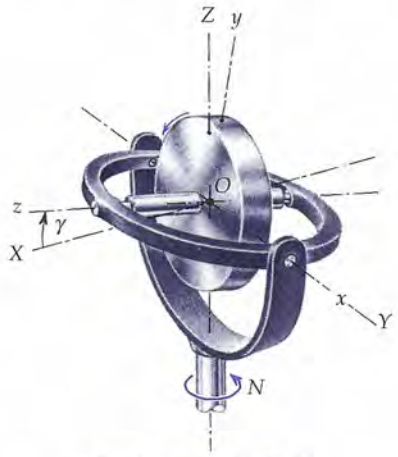


Figura problema 7.51

▶ **7.52** La rueda de radio r puede girar alrededor del eje acodado CO, el cual gira a su vez en torno al eje vertical a la velocidad constante de p rad/s. Si la rueda rueda sin deslizamiento a lo largo de la circunferencia horizontal de radio R, determinar las expresiones de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y de la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la rueda. El eje x permanece siempre horizontal.

$$\textit{Resp. } \boldsymbol{\omega} = p\left[\mathbf{j}\cos\theta + \mathbf{k}\left(\text{sen}\,\theta + \frac{R}{r}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{Rp^2}{r}\cos\theta\right)\mathbf{i}$$

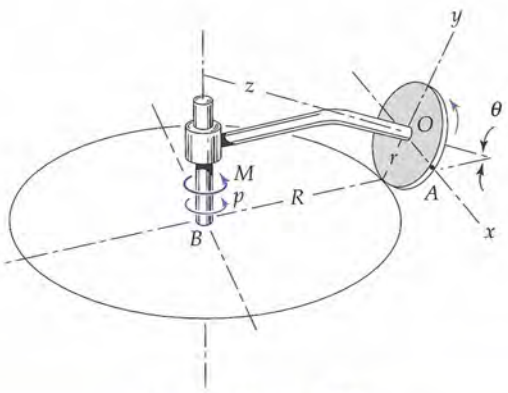


Figura problema 7.52

SECCIÓN B. CINÉTICA

7.7 MOMENTO CINÉTICO

La ecuación de la fuerza para un sistema material cualquiera, rígido o no (ec. 4.1 o 4.6), es la generalización de la segunda ley de Newton para el movimiento de un punto material y no precisa de ninguna explicación más. En cambio, la ecuación del momento no es tan sencilla como la primera de las ecuaciones 6.1 para el movimiento plano, ya que la variación del momento cinético tiene, en el movimiento tridimensional, algunas componentes que no aparecían en el movimiento plano.

Consideremos ahora un cuerpo rígido que ejecuta un movimiento cualquiera en el espacio (fig. 7.12*a*). Los ejes x-y-z son *solidarios* al cuerpo y su origen se encuentra en el centro de masa G. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo es la velocidad angular del sistema x-y-z observada desde el sistema de ejes de referencia fijos X-Y-Z. El momento cinético absoluto $\mathbf{H}_G$ del cuerpo respecto a su centro de masa G es la suma de los momentos respecto a G de las cantidades de movimiento y fue expresado en la parte (*b*) del apartado 4.4 en la forma $\mathbf{H}_G = \Sigma(\boldsymbol{\rho}_i \times m_i\mathbf{v}_i)$, donde $\mathbf{v}_i$ es la velocidad absoluta del elemento de masa m_i. Pero en el caso del cuerpo rígido $\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$, donde $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$ es la velocidad relativa de m_i respecto a G. Así pues, podemos escribir

$$\mathbf{H}_G = -\bar{\mathbf{v}} \times \Sigma m_i\boldsymbol{\rho}_i + \Sigma[\boldsymbol{\rho}_i \times m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)]$$

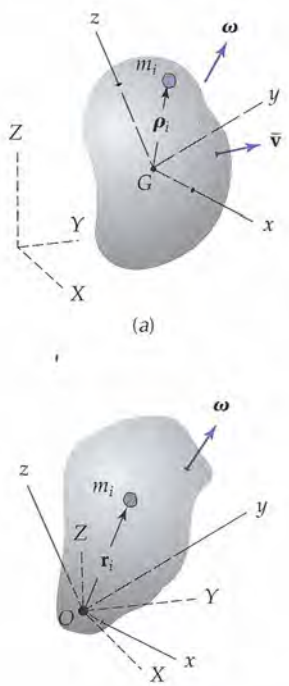


Figura 7.12

http://gratislibrospdf.com/

donde se ha sacado $\bar{\mathbf{v}}$ factor común en el primer sumatorio, después de invertir el orden del producto vectorial y cambiar el signo. Con el origen en el centro de masa G, el primer término en $\mathbf{H}_G$ es nulo puesto que $\Sigma m_i \boldsymbol{\rho}_i = m\bar{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$. El segundo término, sustituyendo m_i por dm y $\boldsymbol{\rho}_i$ por $\boldsymbol{\rho}$, da

$$\mathbf{H}_G = \int [\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})]\, dm \tag{7.8}$$

Antes de desarrollar el integrando de la ecuación 7.8, consideremos también el caso de un cuerpo rígido que gira en torno a un punto fijo O (fig. 7.12*b*). Los ejes x-y-z son solidarios al cuerpo y éste y aquéllos tienen una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. El momento cinético respecto a O se expresaba en la parte (*b*) del apartado 4.4 como $\mathbf{H}_O = \Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$, donde, para el cuerpo rígido, $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$. Así pues, sustituyendo m_i por dm y $\mathbf{r}_i$ por $\mathbf{r}$, el momento cinético es

$$\mathbf{H}_O = \int [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]\, dm \tag{7.9}$$

Se observa ahora que en los casos de las figuras 7.12*a* y 7.12*b*, los vectores de posición $\boldsymbol{\rho}_i$ y $\mathbf{r}_i$ vienen dados por la misma expresión $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Así pues, las ecuaciones 7.8 y 7.9 son formalmente iguales y se empleará el símbolo $\mathbf{H}$ para uno y otro caso. El desarrollo del integrando de las dos expresiones del momento cinético se realizará teniendo en cuenta el hecho de que las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ son invariantes respecto a las integrales extendidas al cuerpo y que por tanto resultan ser multiplicadores constantes de las integrales. El desarrollo del producto vectorial aplicando a tres vectores, una vez reducidos términos semejantes, da

$$\begin{aligned} d\mathbf{H} = \mathbf{i}[&(y^2+z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z]\, dm \\ +\mathbf{j}[&-yx\omega_x + (z^2+x^2)\omega_y - zy\omega_z]\, dm \\ +\mathbf{k}[&-zx\omega_x - zy\omega_y + (x^2+y^2)\omega_z]\, dm \end{aligned}$$

Ahora, sean

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2+z^2)\, dm & I_{xy} &= \int xy\, dm \\ I_{yy} &= \int (z^2+x^2)\, dm & I_{xz} &= \int xz\, dm \\ I_{zz} &= \int (x^2+y^2)\, dm & I_{yz} &= \int yz\, dm \end{aligned} \tag{7.10}$$

Las cantidades I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} son los llamados *momentos de inercia* del cuerpo respecto a los ejes respectivos y las cantidades I_{xy}, I_{xz} e I_{yz} son los *productos de inercia* respecto a los pares de planos de coordenadas. Estas cantidades definen la manera cómo se distribuye la masa de un cuerpo respecto a los ejes elegidos. En el apéndice B se ofrece una exposición completa del cálculo de momentos y productos de inercia. Los subíndices dobles de los momentos de inercia hacen que se conserve una simetría de notación que tiene un significado especial en la formulación tensorial.[1] Se observa que $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$. La expresión de $\mathbf{H}$ queda, al sustituir por las ecuaciones 7.10,

[1] Véase, por ejemplo, *Dinámica*, del autor principal (2ª ed., Ed. Reverté 1976).

http://gratislibrospdf.com/

$$\begin{aligned}\mathbf{H} = \quad & (\quad I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\mathbf{i} \\ & + (-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)\mathbf{j} \\ & + (-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\mathbf{k}\end{aligned} \tag{7.11}$$

y las componentes de **H** resultan ser

$$\begin{aligned}H_x &= \quad I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x - I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z\end{aligned} \tag{7.12}$$

La ecuación 7.11 es la expresión general del momento cinético respecto al centro de masa G o respecto a un punto fijo O de un cuerpo rígido que gira con velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\omega}$.

Llamamos la atención acerca del hecho de que en los dos casos representados, los ejes de referencia x-y-z son *solidarios* al cuerpo rígido. Esto hace que las integrales 7.10 de los momentos y de los productos de inercia sean invariantes con el tiempo. Si los ejes x-y-z girasen respecto a un cuerpo irregular, dichas integrales de inercia serían funciones del tiempo, lo que introduciría una complicación nada deseable en las relaciones del momento cinético. Se presenta una excepción importante en el caso de un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje de simetría, pues entonces las integrales de inercia no se ven afectadas por la posición angular del cuerpo respecto a su eje de rotación. Así pues, suele ser conveniente permitir que un cuerpo de simetría axil gire respecto al sistema de referencia alrededor de uno de los ejes de coordenadas. Además de las componentes de la cantidad de movimiento debidas a la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ de los ejes de referencia, habrá que introducir una nueva componente del momento cinético dirigida a lo largo del eje de rotación relativa al eje.

En las ecuaciones 7.12 la matriz de los momentos y productos de inercia

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yz} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

se conoce como *matriz de inercia* o *tensor de inercia*. A medida que varía la orientación de los ejes varían también los valores de los momentos y productos de inercia. Puede demostrarse[1] que para un origen dado existe una orientación única de los ejes x-y-z para la cual los productos de inercia son nulos y los momentos de inercia I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} adquieren valores estacionarios. Con esta orientación, la matriz de inercia toma la forma

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

[1] Véase, por ejemplo, el apartado 41 de *Dinámica*, del autor principal (2ª edición, Ed. Reverté, 1976).

http://gratislibrospdf.com/

y se dice que está diagonalizada. Los ejes x-y-z para los que los productos de inercia son nulos se llaman *ejes principales de inercia* e I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} son los llamados *momentos principales de inercia*. Para cada origen de coordenadas los momentos principales de inercia representan los valores máximo y mínimo y un valor intermedio de los momentos de inercia.

Cuando los ejes coordenados coinciden con los ejes principales de inercia, la expresión 7.11 del momento cinético respecto al centro de masa o a un punto fijo se convierte en

$$\mathbf{H} = I_{xx}\omega_{xx}\mathbf{i} + I_{yy}\omega_y\mathbf{j} + I_{zz}\omega_z\mathbf{k} \tag{7.13}$$

Para todo cuerpo tridimensional es siempre posible situar los ejes principales de inercia. Por tanto, su momento cinético podrá expresarse mediante 7.13, aunque por razones geométricas puede que ello no sea siempre fácil. Excepto cuando el cuerpo gire alrededor de uno de los ejes principales o cuando $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$, los vectores $\mathbf{H}$ y $\boldsymbol{\omega}$ tendrán direcciones distintas.

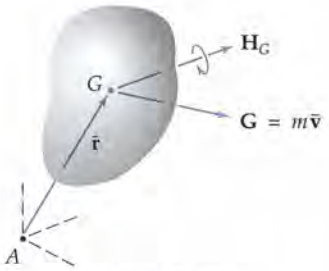


Figura 7.13

El estado cinético de un cuerpo rígido puede representarse por la cantidad de movimiento total $\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}$ en el centro de masa y el momento cinético total $\mathbf{H}_G$ respecto al centro de masa, como se indica en la figura 7.13. En ésta, $\mathbf{H}_G$ se ha colocado en el centro de masa por comodidad, si bien es un vector libre. Los vectores citados ofrecen propiedades análogas a las de una fuerza y un par; así, el momento cinético respecto a cualquier punto A *no fijo* al cuerpo es igual a $\mathbf{H}_G$ (vector libre) más el momento respecto a A de la cantidad de movimiento. Por consiguiente, podemos escribir

$$\mathbf{H}_A = \mathbf{H}_G + \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{G} = \mathbf{H}_G + \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} \tag{7.14}$$

Esta ecuación 7.14 constituye un teorema de transferencia de momentos cinéticos.

7.8 ENERGÍA CINÉTICA

En el apartado 4.3 del capítulo que trataba de la dinámica del punto material se obtuvo la expresión de la energía cinética T de un sistema material general, rígido o no, que resultó ser

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \Sigma\tfrac{1}{2}m_i|\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2 \tag{4.4}$$

siendo $\bar{v}$ la velocidad del centro de masa y $\boldsymbol{\rho}_i$ el vector de posición respecto al centro de masa de un elemento genérico de masa m_i. El primer término quedó identificado como la energía cinética de traslación del sistema y el segundo como la energía cinética asociada al movimiento respecto al centro de masa. El término de traslación puede escribirse también

$$\tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 = \tfrac{1}{2}m\dot{\bar{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \tfrac{1}{2}\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{G}$$

siendo $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ del centro de masa y $\mathbf{G}$ la cantidad de movimiento del cuerpo.

http://gratislibrospdf.com/

En el caso de los cuerpos rígidos el término relativo pasa a ser la energía cinética debida a la rotación del centro de masa. Como $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ es la velocidad respecto al centro de masa del punto material genérico, para los cuerpos rígidos podremos escribir $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo. Con esta sustitución, el término relativo de la expresión de la energía cinética queda

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m_i |\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2 = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)$$

Teniendo en cuenta que en los productos mixtos pueden intercambiarse el punto y el aspa, o sea que $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$, podemos escribir

$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)$$

Como $\boldsymbol{\omega}$ aparece multiplicando a todos los términos del sumatorio, podemos sacarla factor común y resulta

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m_i |\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2 = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \Sigma \boldsymbol{\rho}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_G$$

donde $\mathbf{H}_G$ es el mismo que expresa la integral 7.8. Así pues, la expresión general de la energía cinética de un cuerpo rígido cuyo centro de masa está animado de una velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ y que tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es

$$T = \tfrac{1}{2} \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{G} + \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_G \tag{7.15}$$

Al desarrollar esta expresión sustituyendo en ella el valor de $\mathbf{H}_G$ dado por 7.11 resulta

$$\begin{aligned} T = {} & \tfrac{1}{2} m \bar{v}^2 + \tfrac{1}{2} (\bar{I}_{xx} \omega_x^2 + \bar{I}_{yy} \omega_y^2 + \bar{I}_{zz} \omega_z^2) \\ & - (\bar{I}_{xy} \omega_x \omega_y + \bar{I}_{xz} \omega_x \omega_z + \bar{I}_{yz} \omega_y \omega_z) \end{aligned} \tag{7.16}$$

Si los ejes coinciden con los principales de inercia, la energía cinética es simplemente

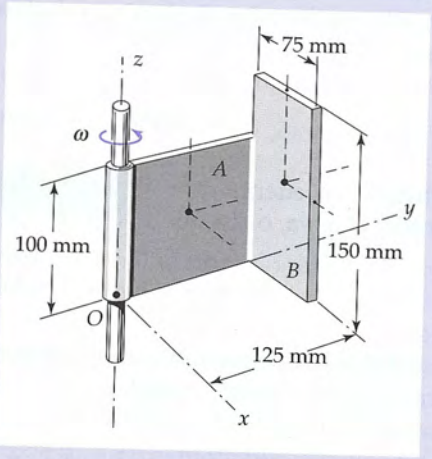
$$T = \tfrac{1}{2} m \bar{v}^2 + \tfrac{1}{2} (\bar{I}_{xx} \omega_x^2 + \bar{I}_{yy} \omega_y^2 + \bar{I}_{zz} \omega_z^2) \tag{7.17}$$

Cuando un cuerpo rígido gira en torno a un punto fijo O, o cuando un punto O del cuerpo tiene una velocidad nula, momentáneamente, la energía cinética es $T = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$. Esta expresión se reduce a

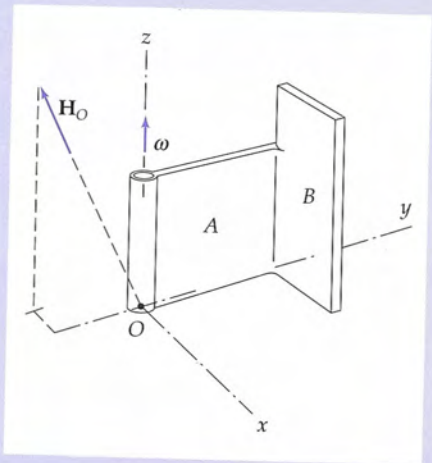
$$T = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_O \tag{7.18}$$

donde $\mathbf{H}_O$ es el momento cinético respecto a O, como puede verse sustituyendo $\mathbf{r}_i$ por $\boldsymbol{\rho}_i$ en la derivación anterior, siendo $\mathbf{r}_i$ el vector de posición respecto a O. Las ecuaciones 7.15 y 7.18 son las tridimensionales correspondientes a las 6.9 y 6.8 del movimiento plano.

http://gratislibrospdf.com/



La placa acodada de 70 kg por metro cuadrado de superficie da vueltas alrededor del eje z a la velocidad $\omega = 30$ rad/s. Hallar (a) el momento cinético $\mathbf{H}$ *de la placa respecto al punto O y (b) la energía cinética T de la placa. Despreciar la masa del cubo y el espesor de la placa en comparación con la superficie de ésta.*



Solución. Con ayuda de las ecuaciones B.3 y B.9 del apéndice B podemos escribir los momentos y productos de inercia de cada porción, aplicando los teoremas de Steiner a cada una de ellas. En primer lugar, la masa de cada parte es $m_A = (0{,}100)(0{,}125)(70) = 0{,}875$ kg y $m_B = (0{,}075)(0{,}150)(70) = 0{,}788$ kg.

(1)

Parte A

$$[I_{xx} = \bar{I}_{xx} + md^2] \qquad I_{xx} = \frac{0{,}875}{12}[(0{,}100)^2 + (0{,}125)^2] + 0{,}875[(0{,}050)^2 + (0{,}0625)^2] = 0{,}007\,47 \text{ kg·m}^2$$

$$[I_{yy} = \tfrac{1}{3}ml^2] \qquad I_{yy} = \frac{0{,}875}{3}(0{,}100)^2 = 0{,}002\,92 \text{ kg·m}^2$$

$$[I_{zz} = \tfrac{1}{3}ml^2] \qquad I_{zz} = \frac{0{,}875}{3}(0{,}125)^2 = 0{,}004\,56 \text{ kg·m}^2$$

$$\left[I_{xy} = \int xy\ dm, \quad I_{xz} = \int xz\ dm\right] \qquad I_{xy} = 0 \qquad I_{xz} = 0$$

$$[I_{yz} = \bar{I}_{yz} + md_yd_z] \qquad I_{yz} = 0 + 0{,}875(0{,}0625)(0{,}050) = 0{,}002\,73 \text{ kg·m}^2$$

Parte B

$$[I_{xx} = \bar{I}_{xx} + md^2] \qquad I_{xx} = \frac{0{,}788}{12}(0{,}150)^2 + 0{,}788[(0{,}125)^2 + (0{,}075)^2] = 0{,}018\,21 \text{ kg·m}^2$$

$$[I_{yy} = \bar{I}_{yy} + md^2] \qquad I_{yy} = \frac{0{,}788}{12}[(0{,}075)^2 + (0{,}150)^2] + 0{,}788[(0{,}0375)^2 + (0{,}075)^2] = 0{,}007\,38 \text{ kg·m}^2$$

$$[I_{zz} = \bar{I}_{zz} + md^2] \qquad I_{zz} = \frac{0{,}788}{12}(0{,}075)^2 + 0{,}788[(0{,}125)^2 + (0{,}0375)^2] = 0{,}013\,78 \text{ kg·m}^2$$

(1) En el apéndice B se exponen los teoremas de Steiner para calcular momentos y productos de inercia respecto a ejes que sean paralelos a otros que pasen por el centro de masa. Se trata de relaciones de gran utilidad.

http://gratislibrospdf.com/

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + md_x d_y] \qquad I_{xy} = 0 + 0{,}788(0{,}0375)(0{,}125) = 0{,}003\,69 \text{ kg·m}^2$$

$$[I_{xz} = \bar{I}_{xz} + md_x d_z] \qquad I_{xz} = 0 + 0{,}788(0{,}0375)(0{,}075) = 0{,}002\,21 \text{ kg·m}^2$$

$$[I_{yz} = \bar{I}_{yz} + md_y d_z] \qquad I_{yz} = 0 + 0{,}788(0{,}125)(0{,}075) = 0{,}007\,38 \text{ kg·m}^2$$

La suma de los respectivos términos da, para el conjunto de las dos placas,

$$I_{xx} = 0{,}0257 \text{ kg·m}^2 \qquad I_{xy} = 0{,}003\,69 \text{ kg·m}^2$$

$$I_{yy} = 0{,}010\,30 \text{ kg·m}^2 \qquad I_{xz} = 0{,}002\,21 \text{ kg·m}^2$$

$$I_{zz} = 0{,}018\,34 \text{ kg·m}^2 \qquad I_{yz} = 0{,}010\,12 \text{ kg·m}^2$$

(a) El momento cinético del cuerpo está dado por la ecuación 7.11, donde $\omega_z = 30$ rad/s y ω_x y ω_y son nulas. Entonces,

② $$\mathbf{H}_O = 30(-0{,}002\,21\mathbf{i} - 0{,}010\,12\mathbf{j} + 0{,}018\,34\mathbf{k}) \text{ N·m·s} \qquad \textit{Resp.}$$

② Recuérdese que empleando las unidades fundamentales del momento cinético puede expresarse también en kg·m²/s.

(b) La energía cinética dada por la ecuación 7.18 resulta

$$T = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_O) = \tfrac{1}{2}(30\mathbf{k}) \cdot 30(-0{,}002\,21\mathbf{i} - 0{,}010\,12\mathbf{j} + 0{,}018\,34\mathbf{k})$$
$$= 8{,}25 \text{ J}$$

PROBLEMAS

Problemas introductorios

7.53 Las tres pequeñas esferas, de masa m cada una, están rígidamente montadas en el árbol horizontal que gira, tal como se indica, con una velocidad angular ω. Despreciando el radio de cada esfera en comparación con las otras dimensiones, escribir las expresiones de los valores de su cantidad de movimiento $\mathbf{G}$ y su momento cinético $\mathbf{H}_O$ respecto al origen de coordenadas O.

Resp. $G = mb\omega\sqrt{2}$, $H_O = 3mb\omega^2$

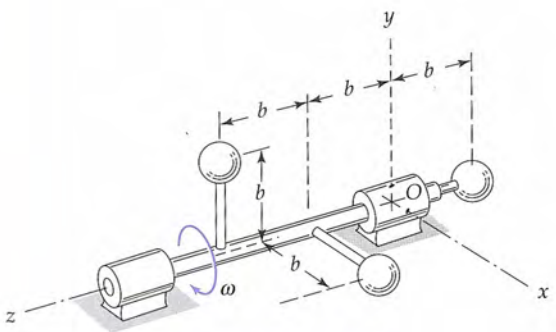


Figura problema 7.53

7.54 Se sustituyen las tres esferas del problema 7.53 por otras tantas varillas, de masa m y longitud l cada una, que se unen por sus centros al árbol que gira, tal como se indica, con una velocidad angular ω. Los ejes de las varillas se encuentran, respectivamente, en las direcciones de los ejes x, y y z y sus diámetros son despreciables comparados con las otras dimensiones. Hallar el momento cinético $\mathbf{H}_O$ de las tres varillas respecto al origen de coordenadas O.

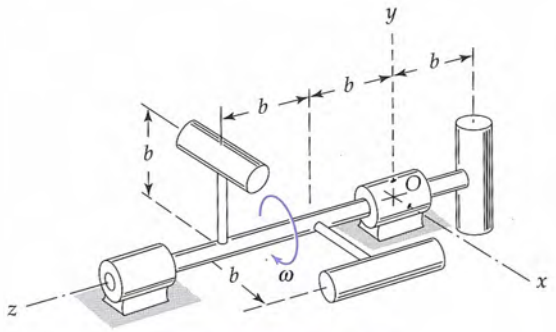


Figura problema 7.54

http://gratislibrospdf.com/

7.55 El semicilindro macizo de masa m rota alrededor del eje z con una velocidad angular ω tal como se muestra. Hallar su momento cinético $\mathbf{H}$ respecto a los ejes x-y-z.

Resp. $\mathbf{H} = mr\omega\left[-\frac{2(2c+b)}{3\pi}\mathbf{j} + \frac{r}{2}\mathbf{k}\right]$

Figura problema 7.55

7.56 En la figura se muestran los componentes del sistema de mando de orientación por rueda de reacción de una nave espacial. El punto G es el centro de masa del sistema de nave y ruedas y x, y y z son los ejes principales de ese sistema. Cada rueda tiene una masa m y un momento de inercia I respecto a su propio eje y gira del modo que se indica con una velocidad angular relativa p. El centro de cada rueda, que puede tratarse como un disco de espesor despreciable, se halla a una distancia b de G. Si son Ω_x, Ω_y y Ω_z las componentes de la velocidad angular de la nave, hallar el momento cinético $\mathbf{H}_G$ del conjunto de las tres ruedas.

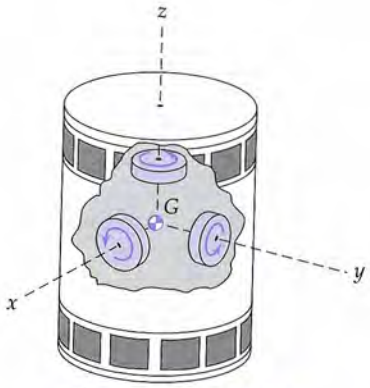


Figura problema 7.56

7.57 El cubo macizo de masa m y lado a gira en torno a un eje M-M diagonal con una velocidad angular ω. Hallar la expresión del momento cinético $\mathbf{H}$ del cubo respecto a los ejes indicados.

Resp. $\mathbf{H} = \frac{ma^2\omega}{6\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

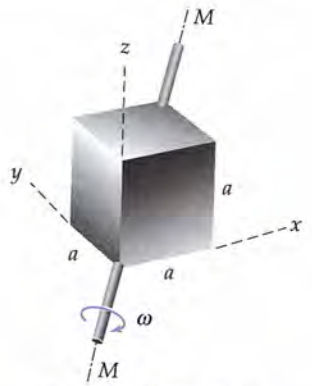


Figura problema 7.57

7.58 La varilla de masa m y longitud l gira alrededor del eje y como generatriz de un cono recto. Si la velocidad angular alrededor del eje y es ω, hallar el momento cinético de la varilla respecto a los ejes x-y-z para la posición particular representada.

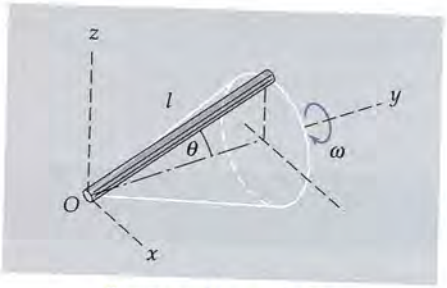


Figura problema 7.58

7.59 La varilla doblemente acodada tiene una masa m y rota alrededor del eje x con una velocidad angular ω. Hallar el momento cinético de la varilla respecto al origen de coordenadas O para la posición representada. Asimismo determinar la energía cinética de la varilla.

Resp. $\mathbf{H}_O = mb^2\omega\left(\frac{8}{9}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{6}\mathbf{k}\right)$, $T = \frac{4}{9}mb^2\omega^2$

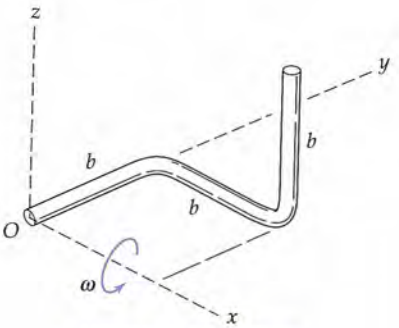


Figura problema 7.59

http://gratislibrospdf.com/

Problemas representativos

7.60 El rotor del giroscopio del problema 7.51, que se repite aquí, gira a la velocidad constante $p = 100$ rpm relativa a los ejes x-y-z en el sentido indicado. Si el ángulo γ que forma el anillo de la suspensión cardan con el plano horizontal X-Y se hace aumentar a razón de 4 rad/s y si el conjunto se fuerza a tener movimiento de precisión en torno a la vertical al ritmo constante de $N = 20$ rpm, calcular el momento cinético $\mathbf{H}_O$ del rotor cuando $\gamma = 30°$. Los momentos de inercia axial y transversales son $I_{zz} = 6(10^{-3})$ kg·m² e $I_{xx} = I_{yy} = 3(10^{-3})$ kg·m².

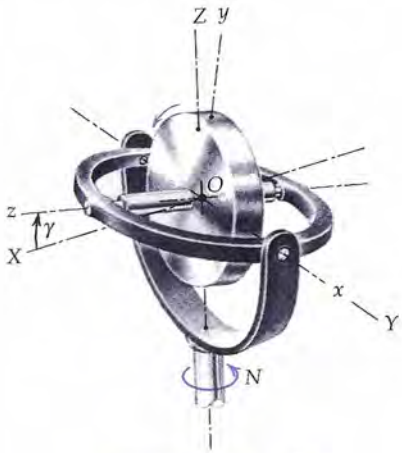


Figura problema 7.60

7.61 El cono circular recto de altura h y radio de la base r gira alrededor de su eje de simetría a la velocidad angular p. Simultáneamente todo el cono da vueltas alrededor del eje x a la velocidad angular Ω. Hallar el momento cinético $\mathbf{H}_O$ respecto al origen O de los ejes x-y-z y la energía cinética T en la posición representada. La masa del cono es m.

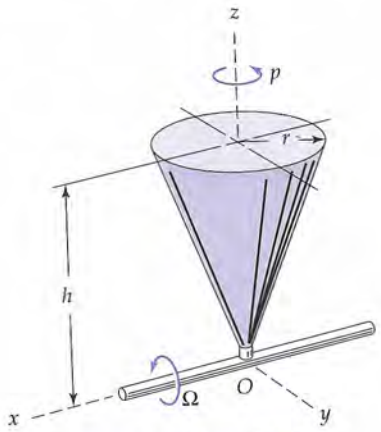


Figura problema 7.61

$$\text{Resp. } \mathbf{H}_O = \frac{3}{10}mr^2\left[\left(\frac{1}{2}+6\frac{h^2}{r^2}\right)\Omega\mathbf{i}+p\mathbf{k}\right]$$

$$T = \frac{3}{10}mr^2\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{h^2}{r^2}\right)\Omega^2+\frac{1}{2}p^2\right]$$

7.62 La cápsula espacial representada tiene una masa m y su centro de masa es G. Respecto a su eje z su radio de giro es k, y respecto al eje x o al y es k'. En el espacio, gira respecto a su sistema de referencia x-y-z a la velocidad $p = \dot{\phi}$. A la vez, un punto C del eje z describe una circunferencia en torno al eje z_0 con una frecuencia f (vueltas por unidad de tiempo). El eje z_0 mantiene una dirección constante en el espacio. Hallar el momento cinético $\mathbf{H}_G$ de la cápsula respecto a los ejes citados. Adviértase que el eje x está siempre en el plano z-z_0 y que, por tanto, el eje y es perpendicular a z_0.

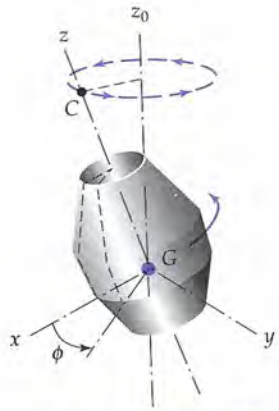


Figura problema 7.62

7.63 El disco de masa m y radio r está montado en el árbol vertical con su plano formando un ángulo α con el plano de rotación del árbol. Hallar la expresión del momento cinético $\mathbf{H}$ del

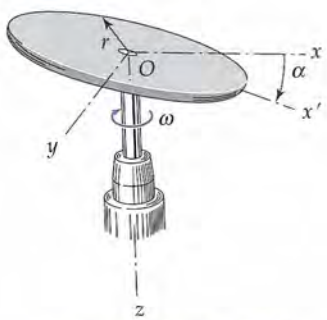


Figura problema 7.63

http://gratislibrospdf.com/

disco respecto a O. Si $\alpha = 10°$, determinar el ángulo β que el momento cinético $\mathbf{H}$ forma con el árbol.

Resp. $\mathbf{H} = \frac{1}{4}mr^2\omega\,[(-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}^2\alpha + 2\cos^2\alpha)\mathbf{k}]$

$\beta = 4{,}96°$

7.64 El conjunto, compuesto de la esfera maciza de masa m y la varilla uniforme de longitud $2c$ de igual masa m, rota alrededor del eje vertical z con una velocidad angular constante ω. La varilla de longitud $2c$ tiene un diámetro pequeño comparado con su longitud y es perpendicular a la varilla horizontal a la que está soldada con la inclinación β que se indica. Hallar el momento cinético $\mathbf{H}_O$ del conjunto de esfera y varilla inclinada.

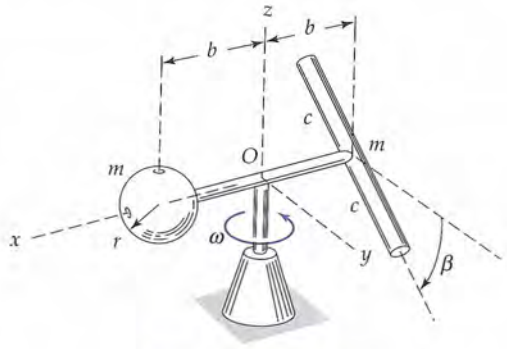


Figura problema 7.64

7.65 Cada una de las varillas delgadas de longitud l y masa m está soldada al disco que gira en torno al eje vertical z con una velocidad angular ω. Cada varilla forma un ángulo β con la vertical y están contenidas en sendos planos paralelos al y-z.

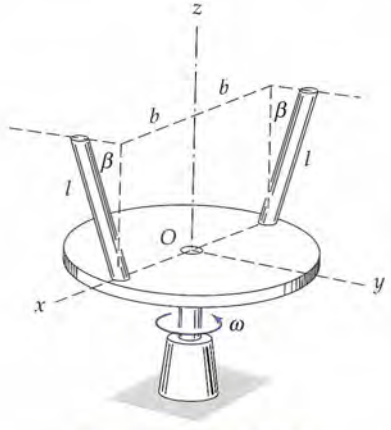


Figura problema 7.65

Hallar una expresión para el momento cinético $\mathbf{H}_O$ de las dos varillas respecto al origen O de los ejes.

Resp. $\mathbf{H}_O = 2m(\frac{1}{3}l^2\operatorname{sen}^2\beta + b^2)\omega\mathbf{k}$

7.66 En un ensayo de los paneles solares de una nave espacial, el modelo representado se hace girar en torno al eje vertical a la velocidad angular ω. Si la masa por unidad de superficie de panel es ρ, escribir, en función de θ, la expresión del momento cinético $\mathbf{H}_O$. Hallar, además, los valores máximo, mínimo e intermedio del momento de inercia respecto a los ejes que pasan por O.

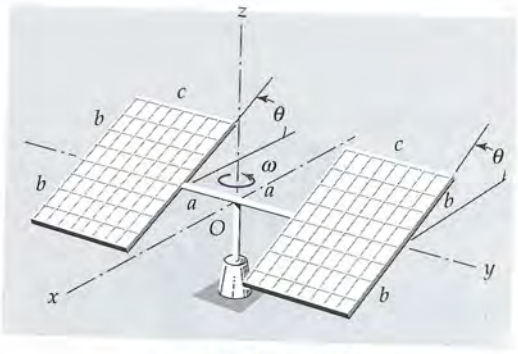


Figura problema 7.66

7.67 Se repite aquí el disco del problema 7.33 con sus dos componentes de velocidad angular. Si el disco tiene una masa de 60 kg, calcular su energía cinética T y el módulo H_O de su momento cinético respecto al punto O.

Resp. $H_O = 51{,}5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, $T = 223\ \text{J}$

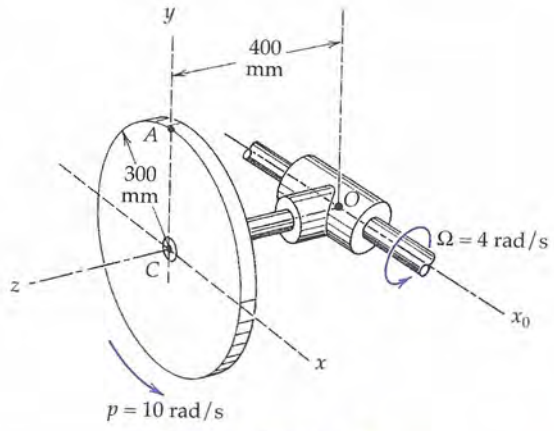


Figura problema 7.67

7.68 El cilindro circular macizo de masa m, radio r y longitud b rota alrededor de su eje geométrico a la velocidad cons-

http://gratislibrospdf.com/

tante p rad/s. Simultáneamente, el soporte y su árbol solidario rotan alrededor del eje x a la velocidad ω rad/s. Escribir la expresión del momento cinético $\mathbf{H}_O$ del cilindro respecto a O con los ejes de referencia indicados.

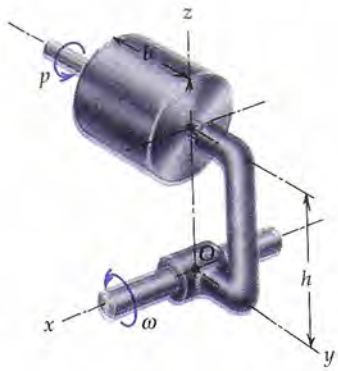


Figura problema 7.68

7.69 El disco uniforme del problema 7.39, que se repite aquí, tiene una masa de 2,5 kg. Siendo $p = 240$ rpm y $N = 30$ rpm las velocidades de rotación indicadas, hallar su momento cinético $\mathbf{H}_O$ respecto al punto fijo O y su energía cinética T. El espesor del disco es pequeño en comparación con su radio.

$$\textit{Resp.}\ \mathbf{H}_O = \pi\,(0{,}1123\mathbf{j} + 0{,}1\mathbf{k})\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

$$T = 0{,}456\pi^2\ \text{J}$$

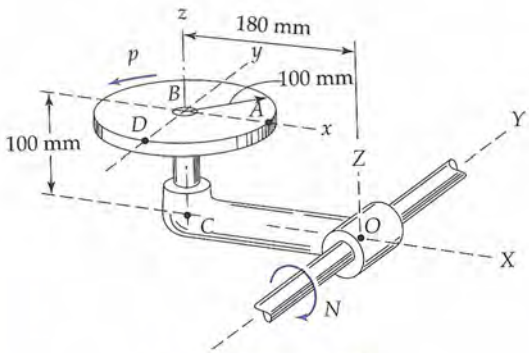


Figura problema 7.69

7.70 El disco macizo de masa $m = 2$ kg y radio $r = 100$ mm rueda sin deslizamiento describiendo una circunferencia de radio $b = 200$ mm sobre el plano horizontal. Si el eje geométrico OC del árbol de la rueda gira en torno al eje z con una velocidad angular $\omega = 4\pi$ rad/s, determinar la expresión del momento cinético del disco respecto al punto fijo O. Calcular también la energía cinética de la rueda.

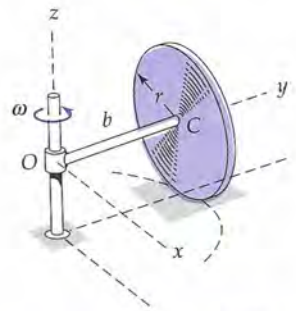


Figura problema 7.70

7.71 Se repite aquí el disco uniforme del problema 7.45 con las tres componentes de velocidad angular. Hallar la energía cinética T y el momento cinético $\mathbf{H}_O$ del disco respecto a O en el instante representado, en que su plano x-y coincide con el plano X-Y. La masa del disco es m.

$$\textit{Resp.}\ \mathbf{H}_O = \frac{1}{4}mr^2\left[-\omega_1\mathbf{i} + \left(1 + \frac{4b^2}{r^2}\right)\omega_2\mathbf{j} + 2p\mathbf{k}\right]$$

$$T = \frac{1}{8}mr^2\left[\omega_1^2 + \left(1 + \frac{4b^2}{r^2}\right)\omega_2^2 + 2p^2\right]$$

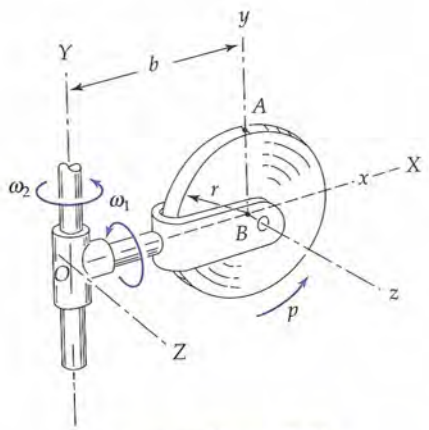


Figura problema 7.71

▶**7.72** Se repite aquí el robot del problema 7.15. Para manipular la pieza en forma de halterio, el dispositivo robótico gira en torno a su base a la velocidad constante Ω. Simultáneamente, el brazo cilíndrico gira hacia arriba a la velocidad $\dot{\gamma}$ y la garra gira en torno a la recta OG a la velocidad ω_p. Para unos valores dados de la longitud constante $\overline{OG} = l$ y del ángulo γ, hallar el momento cinético $\mathbf{H}_G$ del halterio respecto al centro de masa G y su momento cinético $\mathbf{H}_O$ respecto al punto O. Expresar $\mathbf{H}_G$ en función de sus componentes en los ejes x-y-z y $\mathbf{H}_O$ en función de sus componentes en los ejes X-Y-Z. Los momen-

http://gratislibrospdf.com/

tos de inercia del halterio respecto a los ejes y y z valen $2ma^2$ y el momento de inercia respecto al eje x es despreciable.

Resp. $H_{G_x} = 0$

$$H_{G_y} = -2ma^2\dot{\gamma}$$

$$H_{G_z} = 2ma^2(\omega_p + \Omega \text{ sen } \gamma)$$

$$H_{O_X} = 2m \cos \gamma[a^2(\omega_p + \Omega \text{ sen } \gamma) - l^2\Omega \text{ sen } \gamma]$$

$$H_{O_Y} = -2m\dot{\gamma}(a^2 + l^2)$$

$$H_{O_Z} = 2m[a^2 \text{ sen } \gamma(\omega_p + \Omega \text{ sen } \gamma) + l^2\Omega \cos^2\gamma]$$

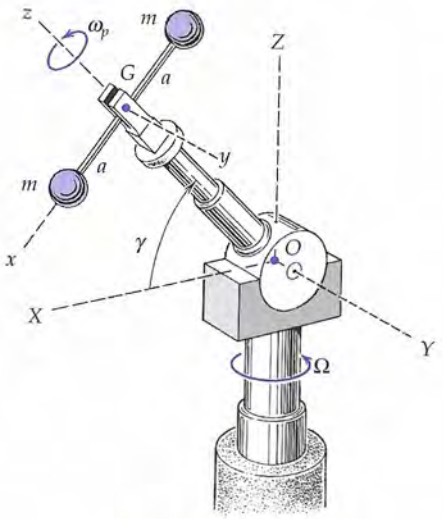


Figura problema 7.72

▶ **7.73** El disco uniforme de masa m y radio r está montado en su eje, el cual pivota en O en torno al eje vertical z_O. Si el disco rueda sin deslizamiento y da una vuelta completa a lo largo del disco fijo de mayor tamaño en un tiempo τ, escribir la expresión del momento cinético del disco respecto a los ejes x-y-z que pasan por O. (*Sugerencia*: La rotación relativa a x-y-z es $R\omega/r$, donde $\omega = 2\pi/\tau$.)

Resp. $\mathbf{H}_O = \dfrac{2\pi mr^2}{\tau}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{R} - \dfrac{R}{r}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{R^2}{r^2} - \dfrac{3}{4}\right)\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{R^2}}\,\mathbf{k}\right]$

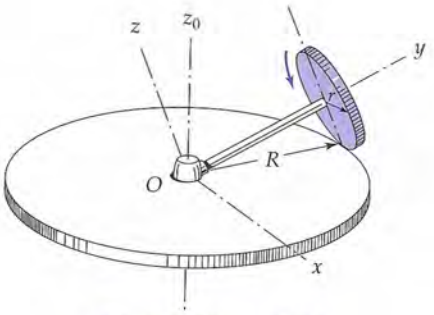


Figura problema 7.73

▶ **7.74** La cáscara semicilíndrica de masa m, radio r y longitud b gira en torno al eje z que pasa por un extremo con velocidad angular constante ω. Hallar el momento cinético $\mathbf{H}$ de la cáscara respecto a los ejes x-y-z.

Resp. $\mathbf{H} = mr\omega\left(\dfrac{b}{2}\mathbf{i} + \dfrac{b}{\pi}\mathbf{j} + 2r\mathbf{k}\right)$

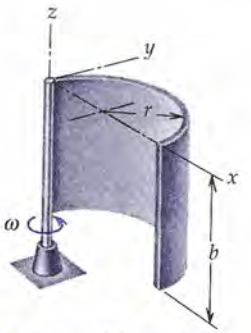


Figura problema 7.74

7.9 ECUACIONES CINÉTICAS Y ENERGÉTICAS DEL MOVIMIENTO

Con la descripción del momento cinético, las propiedades inerciales y la energía cinética de un cuerpo rígido establecidas en los dos apartados anteriores estamos en disposición de aplicar las ecuaciones cinéticas y energéticas generales del movimiento.

http://gratislibrospdf.com/

(a) Ecuaciones cinéticas. En el apartado 4.4 del capítulo 4 establecimos las ecuaciones generales de la cantidad de movimiento y del momento cinético para un sistema de masa constante. Tales ecuaciones son

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}} \qquad [4.6]$$

$$\Sigma \mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}} \qquad [4.7] \text{ o } [4.9]$$

Las ecuaciones 4.7 o 4.9 para un sistema cualquiera de masa constante se expresarán ahora mediante la ecuación única $\Sigma \mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$, donde se toman los términos respecto a un punto fijo cualquiera O o respecto al centro de masa G. En la deducción del principio del momento se tomaba la derivada de $\mathbf{H}$ respecto a un sistema de coordenadas absoluto. Cuando se expresa $\mathbf{H}$ en función de componentes medidas respecto a un sistema de coordenadas móvil x-y-z que tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, la ecuación 7.7 queda en la forma

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{M} &= \left(\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} \\ &= (\dot{H}_x \mathbf{i} + \dot{H}_y \mathbf{j} + \dot{H}_z \mathbf{k}) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}\end{aligned}$$

Los términos entre paréntesis representan la parte de $\dot{\mathbf{H}}$ debida a la variación del valor de las componentes de $\mathbf{H}$, y el producto vectorial representa la parte debida a los cambios de dirección de las componentes de $\mathbf{H}$. Desarrollando el producto vectorial y agrupando términos se tiene

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{M} = {} & (\dot{H}_x - H_y \Omega_z + H_z \Omega_y)\mathbf{i} \\ & + (\dot{H}_y - H_z \Omega_x + H_x \Omega_z)\mathbf{j} \\ & + (\dot{H}_z - H_x \Omega_y + H_y \Omega_x)\mathbf{k}\end{aligned} \qquad (7.19)$$

La ecuación 7.9 es la forma más general de la ecuación del momento respecto a un punto fijo O, o respecto al centro de masa G. Las $\boldsymbol{\Omega}$ son las componentes de la velocidad angular de rotación de los ejes de referencia y las componentes H, en el caso de un cuerpo rígido, son las definidas en las ecuaciones 7.12, donde las $\boldsymbol{\omega}$ son las componentes de la velocidad angular del cuerpo. Aplicamos ahora la ecuación 7.19 a un cuerpo rígido en el que los ejes de coordenadas son *solidarios* al cuerpo. En estas condiciones, cuando se expresan en las coordenadas x-y-z, los *momentos* y *productos de inercia son invariantes con el tiempo* y $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$. Así pues, para ejes solidarios al cuerpo, las tres componentes escalares de la ecuación 7.19 se convierten en

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= \dot{H}_x - H_y \omega_z + H_z \omega_y \\ \Sigma M_y &= \dot{H}_y - H_z \omega_x + H_x \omega_z \\ \Sigma M_z &= \dot{H}_z - H_x \omega_y + H_y \omega_x\end{aligned} \qquad (7.20)$$

Las ecuaciones 7.20 son las ecuaciones generales del momento para el movimiento de un cuerpo rígido con ejes de referencia *solidarios* y son válidas respecto a ejes que pasen por un punto fijo O o por el centro de masa G.

http://gratislibrospdf.com/

En el apartado 7.7 se vio que, en general, para un origen cualquiera fijo a un cuerpo rígido, existen tres ejes principales de inercia para los que se anulan los productos de inercia. Si los ejes de referencia coinciden con los ejes principales de inercia con origen en el centro de masa G o en un punto O fijo al cuerpo y fijo en el espacio, los términos I_{xy}, I_{yz} e I_{xz} son nulos y las ecuaciones 7.20 se reducen a

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z \\ \Sigma M_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x \\ \Sigma M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y \end{aligned} \qquad (7.21)$$

Estas relaciones se conocen con el nombre de *ecuaciones de Euler*[1] y se cuentan entre las más útiles de la Dinámica.

(b) Ecuaciones energéticas. La resultante de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre un cuerpo rígido puede sustituirse por la fuerza resultante $\Sigma\mathbf{F}$ y un par resultante de momento $\Sigma\mathbf{M}$ aplicados al centro de masa. La fuerza resultante y el par resultante realizan, por unidad de tiempo, los trabajos $\Sigma\mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}}$ y $\Sigma\mathbf{M}_G \cdot \boldsymbol{\omega}$, donde $\bar{\mathbf{v}}$ es la velocidad del centro de masa y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo. Integrando respecto al tiempo desde el estado 1 hasta el 2 se obtiene el trabajo total efectuado durante ese intervalo de tiempo. Igualando los trabajos realizados a los respectivos cambios en la energía cinética, expresada según la ecuación 7.15, resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{v}}\, dt = \tfrac{1}{2}\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{G}\Big]_1^2 \qquad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{M}_G \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_G\Big]_1^2 \qquad (7.22)$$

Estas ecuaciones expresan, respectivamente, la variación de energía cinética de traslación y la variación de energía cinética de rotación durante el intervalo de tiempo en que actúa $\Sigma\mathbf{F}$ o $\Sigma\mathbf{M}$, y la suma de ambas expresiones es igual a ΔT.

El teorema de las fuerzas vivas, desarrollado en el capítulo 4 para un sistema general de puntos materiales y que viene dado por

$$U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g \qquad [4.3]$$

fue aplicado al movimiento plano de los cuerpos rígidos en el capítulo 6. La ecuación es válida igualmente para los cuerpos rígidos en movimiento tridimensional. Como hemos visto anteriormente, el teorema de las fuerzas vivas resulta sumamente útil para estudiar las condiciones en los extremos (inicial y final) de los estados de movimiento. En estos casos, el trabajo $U'_{1\text{-}2}$ realizado durante el intervalo por todas las fuerzas activas exteriores al cuerpo o al sistema es igual a la suma de las variaciones correspondientes de energía cinética ΔT, la energía potencial elástica ΔV_e y la energía potencial gravitatoria ΔV_g. La variaciones de energía potencial se determinan de la manera habitual descrita en el apartado 3.7.

La aplicación de las ecuaciones desarrolladas en este apartado vamos a limitarla a dos casos de interés particular, el movimiento paralelo a un plano o movimiento plano general y el movimiento giroscópico, que se examinan en los apartados que siguen.

---

[1] En honor del matemático suizo Leonhard Euler (1707- 1783)

http://gratislibrospdf.com/

Cuando todos los puntos de un cuerpo rígido describen trayectorias contenidas en planos paralelos a un plano fijo, se dice que el cuerpo describe un movimiento plano general, tal como se describió en el apartado 7.4 con relación a la figura 7.3. En este movimiento todas las rectas del cuerpo normales al plano fijo permanecen paralelas a sí mismas en todo instante. En el centro de masa G se sitúa el origen de las coordenadas x-y-z solidarias al cuerpo, coincidiendo el plano x-y con el plano P del movimiento. Entonces, las componentes de la velocidad angular del cuerpo y de los ejes solidarios a él son $\omega_x = \omega_y = 0$ y $\omega_z \neq 0$. En este caso, las componentes del momento cinético según las ecuaciones 7.12 serán

$$H_x = -I_{xz}\omega_z \qquad H_y = -I_{yz}\omega_z \qquad H_z = I_{zz}\omega_z$$

y las relaciones de momentos de las ecuaciones 7.20 se reducen a

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= -I_{xz}\dot{\omega}_z + I_{yz}\omega_z^2 \\ \Sigma M_y &= -I_{yz}\dot{\omega}_z - I_{xz}\omega_z^2 \\ \Sigma M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z \end{aligned} \tag{7.23}$$

Se ve que la tercera ecuación de momentos es equivalente a la primera de las ecuaciones 6.1, donde el eje z pasa por el centro de masa, o bien a la ecuación 6.4 si el eje z pasa por un punto fijo.

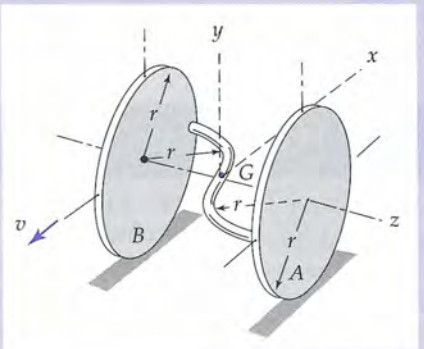
Las ecuaciones 7.23 son válidas para un origen de coordenadas situado en el centro de masa, según se indica en la figura 7.3, o para un origen cualquiera situado en un eje de rotación fijo. Las tres ecuaciones independientes del movimiento que también son aplicables al movimiento plano general son, evidentemente,

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma F_z = 0$$

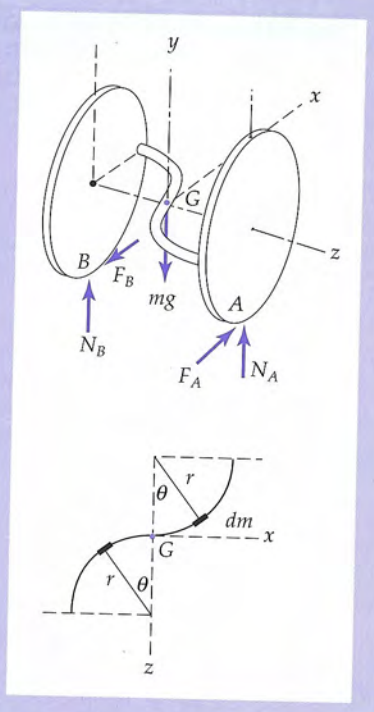
Las ecuaciones 7.23 encuentran una utilización especial para describir el efecto del desequilibrio dinámico de árboles y cuerpos en rodadura.

PROBLEMA TIPO 7.7

Los dos discos, de masa m_1 cada uno, están conectados por la barra curva doblada en forma de dos arcos cuartocirculares. La masa de la barra es m_2. O sea, la masa del conjunto es $m = 2m_1 + m_2$. Si los discos ruedan sin deslizamiento por un plano horizontal de tal modo que sus centros poseen una velocidad constante v, hallar el valor de la fuerza de rozamiento que actúa en cada disco en el instante representado, en que el plano de la barra curva está horizontal.



http://gratislibrospdf.com/



Solución. Se trata de un movimiento plano general, ya que los planos de movimiento de todas las partes del sistema son paralelos. El diagrama para sólido libre presenta las fuerzas normales y de rozamiento en A y B y el peso total mg que actúa en el centro de masa G, donde situamos el origen de coordenadas solidarias al cuerpo.

Ahora aplicamos las ecuaciones 7.23 con $I_{yz} = 0$ y $\dot{\omega}_z = 0$. La ecuación de momentos respecto al eje y requiere determinar I_{xz}. Examinando el diagrama que representa la geometría de la barra curvada y representado por ρ la masa de la barra curvada por unidad de longitud, tenemos

① $$\left[I_{xz} = \int xz\, dm\right] \qquad I_{xz} = \int_0^{\pi/2} (r \operatorname{sen}\theta)(-r + r\cos\theta)\rho r\, d\theta + \int_0^{\pi/2} (-r \operatorname{sen}\theta)(r - r\cos\theta)\rho r\, d\theta$$

Calculando las integrales resulta

$$I_{xz} = -\rho r^3/2 - \rho r^3/2 = -\rho r^3 = -\frac{m_2 r^2}{\pi}$$

Haciendo $\omega_z = v/r$ y $\dot{\omega}_z = 0$ en la segunda de las ecuaciones 7.23, tenemos

$$[\Sigma M_y = -I_{xz}\omega_z{}^2] \qquad F_A r + F_B r = -\left(-\frac{m_2 r^2}{\pi}\right)\frac{v^2}{r^2}$$

$$F_A + F_B = \frac{m_2 v^2}{\pi r}$$

Pero como $\bar{v} = v$ (cte.), es $\bar{a}_x = 0$, por lo cual

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad F_A - F_B = 0 \qquad F_A = F_B$$

Así pues,

$$F_A = F_B = \frac{m_2 v^2}{2\pi r} \qquad \textit{Resp.}$$

Observemos además que, siendo $I_{yz} = 0$ y $\dot{\omega}_z = 0$ para la posición dada, la ecuación de momentos respectos al eje x nos da

② $$[\Sigma M_x = 0] \qquad -N_A r + N_B r = 0 \qquad N_A = N_B = mg/2$$

① **Se pondrá cuidado especial en observar los signos correctos en las coordenadas del elemento de masa *dm* que entran en el producto *xz*.**

② **Cuando el plano de la barra curvada no está horizontal, las fuerzas normales bajo los discos ya no son iguales**

PROBLEMAS

Problemas introductorios

7.75 Cada una de las dos barras de masa m está soldada a la superficie del disco que gira en torno al eje vertical con una velocidad angular constante ω. Hallar el momento flector que actúa en la base de cada barra.

Resp. $M = \frac{1}{2}\, mbl\omega^2$

7.76 El árbol esbelto arrastra dos masas puntuales descentradas, de masa m cada una, y gira con una velocidad angular constante ω tal como se indica. Hallar, para la posición indicada, las componentes x e y de las reacciones en los cojinetes A y B debidas al desequilibrio dinámico del árbol.

http://gratislibrospdf.com/

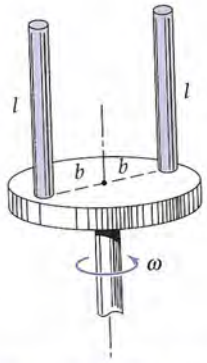


Figura problema 7.75

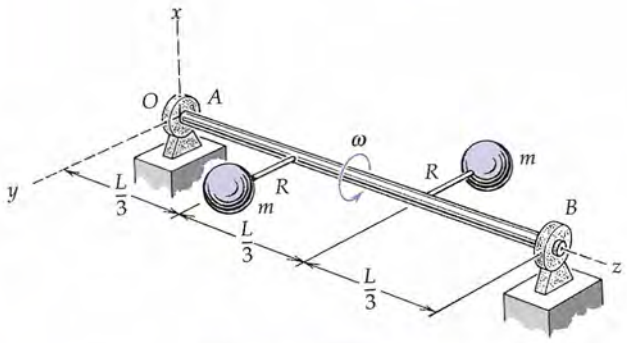


Figura problema 7.76

7.77 El agitador de pintura de la figura está constituido por una varilla de longitud $7b$ y masa ρ por unidad de longitud. Antes de sumergirse en la pintura, gira con una velocidad angular constante ω en torno a su eje z. Hallar el momento flector M en la sección de la varilla correspondiente a la base O del portaherramientas.

Resp. $M = M_x = -2\rho b^3\omega^2$

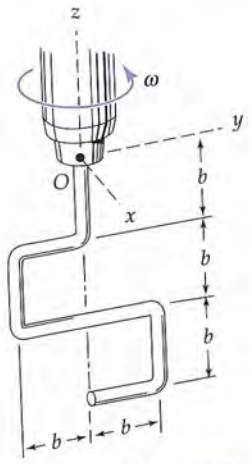


Figura problema 7.77

7.78 El árbol y el disco de 6 kg giran a la velocidad constante ω de 10 000 rpm. Si el centro de masa del disco está descentrado 0,05 mm, hallar las fuerzas horizontales que soportan los cojinetes A y B a causa del desequilibrio.

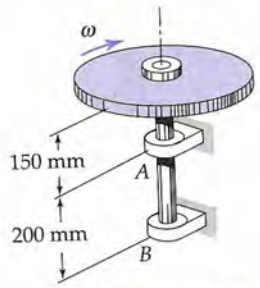


Figura problema 7.78

7.79 En la figura se muestra el esquema del modelo que sirve para representar el desequilibrio dinámico de un cigüeñal, en el que el árbol arrastra tres pequeñas esferas de 0,6 kg unidas a él mediante varillas de masa despreciable. Si el árbol gira a la velocidad constante de 1200 rpm, calcular las fuerzas R_A y R_B que actúan sobre los cojinetes. Se desprecian las fuerzas gravitatorias.

Resp. $R_A = R_B = 615$ N

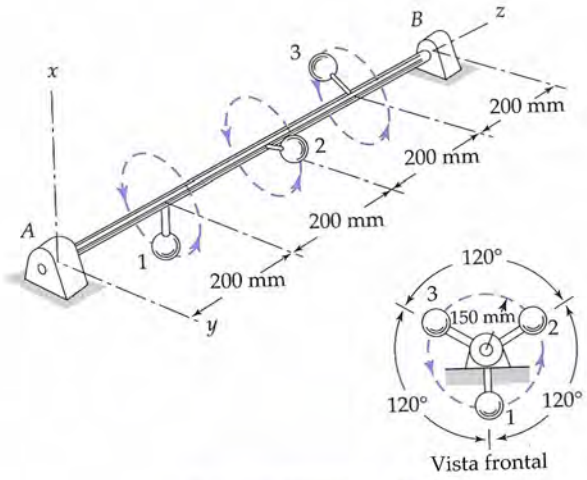


Figura problema 7.79

7.80 La varilla delgada de masa m y longitud L está montada en un manguito giratorio con su extremo desalineado un ángulo β respecto al eje de rotación z. Siendo ω constante, hallar el

http://gratislibrospdf.com/

momento flector M_O en la base O de la varilla. Despreciar el momento debido al peso de la varilla.

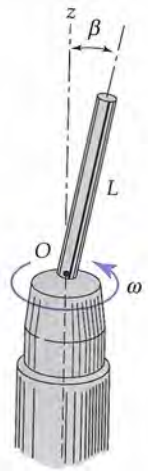


Figura problema 7.80

Problemas representativos

7.81 La varilla de forma irregular tiene una masa ρ por unidad de longitud y gira en torno al eje z del árbol a la velocidad angular constante ω. Hallar el momento flector M en la sección A de la varilla. Se desprecia el pequeño momento que introduce el peso de la varilla.

Resp. $M = \sqrt{13}\rho b^3\omega^2$

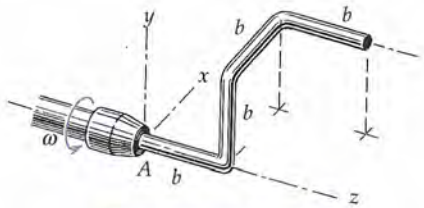


Figura problema 7.81

7.82 Si la varilla del problema 7.81 se pone en movimiento por acción de un par de momento M_O respecto al eje z que le aplica el collarín en A, hallar el momento flector inicial M en dicha sección A. Se desprecia el pequeño momento que introduce el peso de la varilla.

7.83 Cada una de las alas de 200 mm de las varillas acodadas soldadas al árbol vertical tiene una masa de 0,12 kg. Calcular el momento flector M en la sección O del árbol debido a la rotación del conjunto en torno a la vertical del árbol a la velocidad constante de 1200 rpm. Se desprecia el pequeño momento que introduce el peso de las varillas.

Resp. $M = 268$ m·N

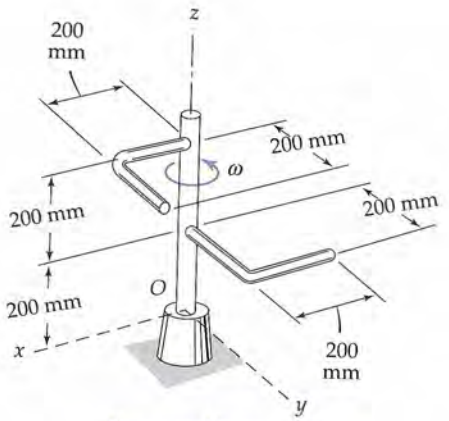
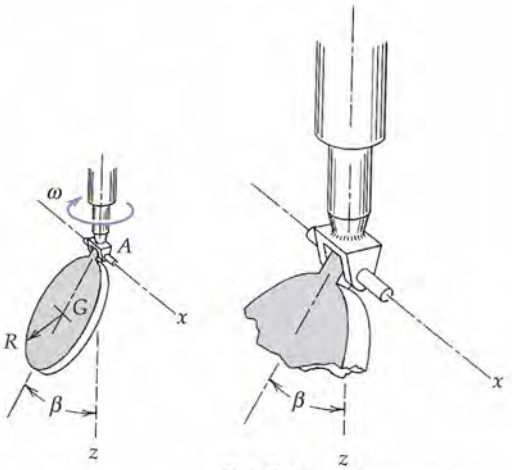


Figura problema 7.83

7.84 Calcular, para el conjunto del problema 7.83, el momento flector M en la sección O del árbol vertical debido a la aceleración angular cuando se pone en movimiento por acción de un par de 64 m · N de momento aplicado al árbol en torno al eje z. Se desprecia el pequeño momento que introduce el peso de las varillas.

7.85 El disco delgado de masa m y radio R está embisagrado por su tangente horizontal al extremo de un árbol giratorio que gira en torno a su eje vertical con una velocidad angular ω. Hallar el ángulo β de equilibrio que forma el plano del disco con la vertical

Resp. $\beta = \arccos \dfrac{4g}{5R\omega^2}$



Detalle de la bisagra en A

Figura problema 7.85

7.86 La gran antena seguidora de satélites tiene un momento de inercia I respecto a su eje z de simetría y un momento de

http://gratislibrospdf.com/

inercia I_O respecto a cada uno de los ejes x e y. Hallar, en función de la orientación θ, su aceleración angular α en torno al eje vertical Z debida a un par de momento M que a Z aplica el mecanismo de arrastre.

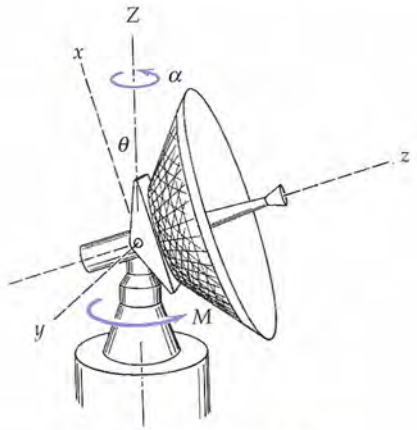


Figura problema 7.86

7.87 Hallar el momento flector M en el punto de tangencia A de la varilla semicircular de radio r y masa m cuando la misma gira alrededor del eje tangente con una velocidad angular constante ω de gran valor. Se desprecia el momento mgr debido al peso de la varilla.

Resp. $M = \frac{2}{\pi} mr^2\omega^2$

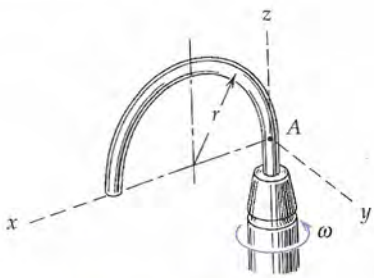


Figura problema 7.87

7.88 Si la varilla semicircular del problema 7.87 se pone en movimiento por acción de un par de momento M_O aplicado a través del collarín en torno al eje de rotación z, hallar el momento flector inicial M en la sección A de la varilla.

7.89 La varilla OA de masa m y longitud l gira libremente en torno a un eje horizontal que pasa por O. El espigón O y el árbol giran con una velocidad angular constante ω en torno al eje vertical z. Escribir la expresión del ángulo θ que forma la varilla con la vertical. ¿Qué valor mínimo debe tener ω para que la varilla adquiera una posición distinta de la vertical?

Resp. $\theta = \arccos \frac{3g}{2l\omega^2}$, $\omega_{\min} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$

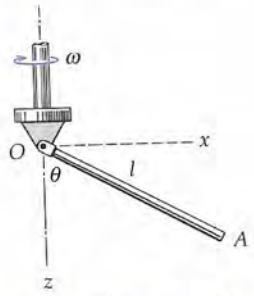


Figura problema 7.89

7.90 Si la varilla del problema 7.89 está soldada a O formando un ángulo θ con la vertical, hallar el momento flector en O debido al efecto combinado de la velocidad angular ω del árbol y el peso de la varilla.

7.91 La placa tiene una masa de 3 kg y está soldada al árbol vertical que gira constantemente a 20π rad/s. Calcular el momento **M** aplicado *al* árbol *por* la placa a consecuencia del desequilibrio dinámico.

Resp. $\mathbf{M} = -79{,}0\mathbf{i}$ m · N

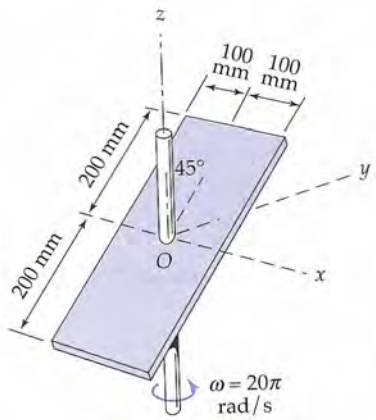


Figura problema 7.91

7.92 El mismo disco del problema 7.63, de masa m y radio r está montado en un árbol vertical y entre su plano y el plano de rotación del árbol hay un pequeño ángulo α. Hallar la ex-

http://gratislibrospdf.com/

presión del momento flector **M** que actúa *sobre* el árbol a consecuencia del balanceo del disco para una velocidad del árbol de ω rad/s.

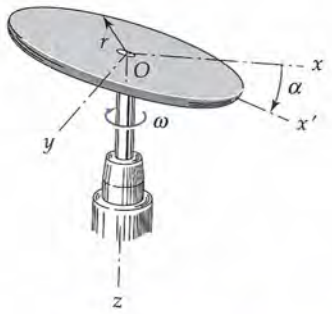


Figura problema 7.92

7.93 Las hojas plegadizas cuadradas y uniformes, de masa m cada una, están articuladas en A y B a la placa cuadrada, la cual es solidaria al árbol que gira en torno al eje vertical z con una velocidad angular constante ω. Hallar la velocidad angular ω necesaria para mantener un determinado ángulo θ positivo.

$$Resp.\ \omega = \sqrt{\frac{1}{b}\frac{6g\ \text{tg}\ \theta}{4\ \text{sen}\ \theta + 3}}$$

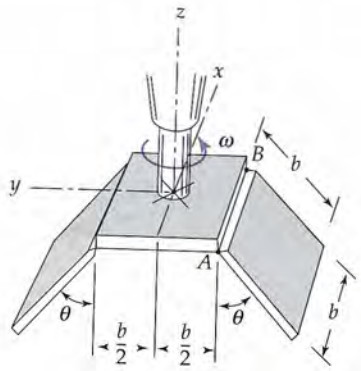


Figura problema 7.93

7.94 Si el mecanismo del problema 7.93 gira con una velocidad angular constante mayor que la calculada en la resolución del problema, hallar el momento por rozamiento que deben resistir los pasadores de las bisagras para que las hojas plegadizas se mantengan en el ángulo θ especificado.

7.95 La varilla uniforme de longitud l está soldada en A al soporte por la cara inferior del disco. Éste gira en torno a un eje vertical con una velocidad angular constante ω. Hallar el valor de ω para el que la soldadura no esté sometida a ningún par de fuerzas, siendo $\theta = 60°$ y $b = l/4$.

$$Resp.\ \omega = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{l}}$$

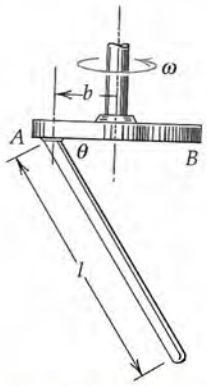


Figura problema 7.95

7.96 El anillo incompleto de la figura tiene una masa ρ por unidad de longitud y está soldado en A al árbol. Hallar el momento flector M en la sección A del anillo debido a su rotación a la velocidad angular constante ω.

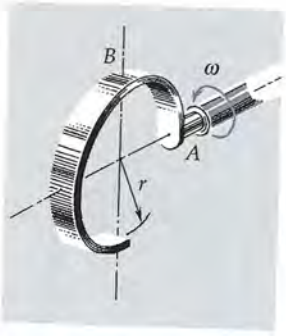


Figura problema 7.96

7.97 Para el anillo incompleto del problema 7.96, hallar el momento torsor T (momento respecto a un eje tangente a la periferia) en la sección B cuando se pone en movimiento por acción de un par de momento M que el árbol transmite al anillo a través de A. La masa del anillo por unidad de longitud es ρ.

$$Resp.\ T = \tfrac{2}{3}M.$$

▶ **7.98** Cada uno de los dos discos tiene una masa m y están soldados al extremo de una varilla rígida de masa m_0 de modo

http://gratislibrospdf.com/

que tienen el eje z común y están separados por una distancia b. Un par M, aplicado a uno de los discos, estando el conjunto inicialmente en reposo, da a los centros de ambos una aceleración $\mathbf{a} = +a\mathbf{i}$. El rozamiento es suficiente para evitar el deslizamiento. Deducir las expresiones de las fuerzas normales N_A y N_B ejercidas por la superficie horizontal sobre los discos cuando comienzan a rodar. Expresar los resultados en función de la aceleración a en vez del momento M.

$$\text{Resp. } N_A = mg + \frac{m_0 g}{2}\left(1 + \frac{a}{3g}\right)$$

$$N_B = mg + \frac{m_0 g}{2}\left(1 - \frac{a}{3g}\right)$$

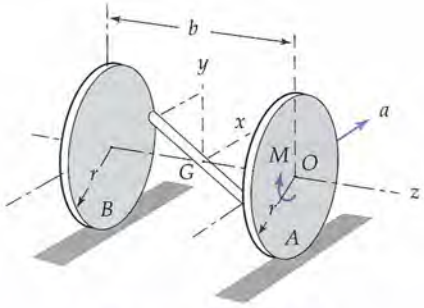


Figura problema 7.98

▶ **7.99** La placa triangular homogénea delgada de masa m está soldada al árbol horizontal que gira libremente en los cojinetes A y B. Si la placa se suelta en reposo desde la posición horizontal representada, hallar el módulo de la reacción en el cojinete A un instante después de iniciado el movimiento.

Resp. $A = mg/6$

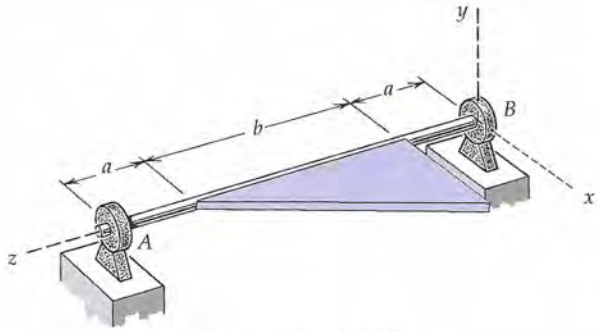


Figura problema 7.99

▶ **7.100** Si la placa triangular homogénea del problema 7.99 se suelta en reposo desde la posición representada, hallar el módulo de la reacción en el cojinete A después de que la placa haya girado 90°.

$$\text{Resp. } A = \frac{mg}{3}\left[\frac{7a + 2b}{2a + b}\right]$$

7.11 MOVIMIENTO GIROSCÓPICO: PRECESIÓN UNIFORME

Entre todos los problemas de la Dinámica, uno de los más interesantes es el del movimiento giroscópico. Este movimiento se genera siempre que el eje alrededor del cual un cuerpo está en rotación gira a su vez alrededor de otro eje. Aunque en la descripción completa de este movimiento intervienen desarrollos de complejidad considerable, los casos habituales y útiles de movimiento giroscópico se dan cuando el eje de un rotor que gira a velocidad constante da vueltas a velocidad constante alrededor de otro eje (movimiento de precesión). En este apartado centraremos nuestra atención en este caso particular.

Las aplicaciones técnicas del movimiento giroscópico son de gran importancia. Montado en una suspensión cardan (fig. 7.19*b*), el giroscopio queda libre de momentos exteriores y su eje mantiene una dirección fija en el espacio independientemente de las estructura a la que está unido. Así es como se utiliza el giroscopio en los sistemas de guiado inercial y en otros mecanismos de control direccional. Añadiendo una masa pendular al aro interno de la suspensión cardánica se consigue que la rotación terrestre haga que el giroscopio tenga precesión de forma que el eje de rotación apunte siempre al norte; este efecto es el fundamento de la brújula giroscópica. El giroscopio ha encontrado también importantes aplicaciones como dispositivo estabilizador. Así, mediante la precesión controlada de un giroscopio de gran tamaño montado en

http://gratislibrospdf.com/

un buque se consigue producir un momento giroscópico capaz de contrarrestar el balanceo del buque en el mar. Además, el efecto giroscópico es una consideración de suma importancia para el proyecto de cojinetes de rotores sometidos a precesión forzada.

El efecto giroscópico vamos a describirlo utilizando primeramente un enfoque físico sencillo basado en los cálculos vectoriales que ya hemos aplicado a la dinámica del plano. Este procedimiento nos facilitará una apreciación física directa del efecto giroscópico. Seguidamente haremos uso de la expresión general del momento cinético (ec. 7.19) para conseguir una descripción más completa.

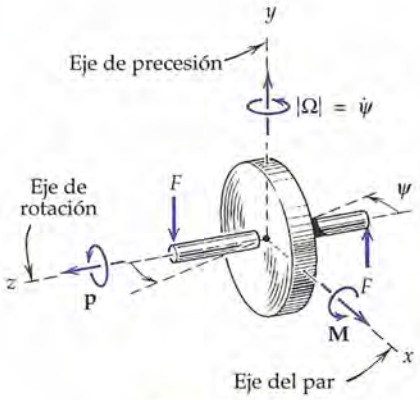


Figura 7.14

(a) Descripción simplificada. En la figura 7.14 se representa un rotor simétrico que gira alrededor del eje z con una gran velocidad angular $\mathbf{p}$, que llamaremos *velocidad de rotación*. Si al eje del rotor le aplicásemos dos fuerzas F formando un par de momento $\mathbf{M}$, cuyo vector representativo estuviese dirigido según el eje x, encontraríamos que el eje del rotor giraría en el plano x-z alrededor del eje y en el sentido indicado con una velocidad angular relativamente pequeña $\Omega = \dot{\psi}$, conocida como *velocidad de precesión*. De esta forma dejamos identificados al eje de rotación ($\mathbf{p}$), al eje del par ($\mathbf{M}$) y al eje de precesión ($\mathbf{\Omega}$), donde los sentidos de los vectores de rotación quedan especificados mediante la habitual regla de la mano derecha. El eje del rotor *no* gira alrededor del eje x en el sentido marcado por $\mathbf{M}$ como sería el caso si el rotor no estuviese girando alrededor de su eje. Para que se comprenda mejor este fenómeno podemos establecer una analogía directa entre los vectores de rotación y los vectores, ya conocidos, que sirven para describir el movimiento curvilíneo de un punto material.

En la figura 7.15*a* se representa una partícula de masa m que se mueve en el plano x-z con una celeridad constante $|\mathbf{v}| = v$. La aplicación de una fuerza $\mathbf{F}$ perpendicular a su cantidad de movimiento $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$ produce en ésta una variación $d\mathbf{G} = d(m\mathbf{v})$. Vemos que $d\mathbf{G}$, y por tanto $d\mathbf{v}$, es un vector que tiene la dirección de la fuerza normal $\mathbf{F}$ según la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$, la cual puede escribirse como $\mathbf{F}\,dt = d\mathbf{G}$. En la figura 7.15*b* vemos que, en el límite, $\text{tg}\, d\theta = d\theta = F\,dt/mv$, o sea, $F = mv\dot{\theta}$. En notación vectorial, siendo $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{j}$, la fuerza queda

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

que es la expresión vectorial equivalente a la ya conocida relación escalar $F_n = ma_n$ para la fuerza normal actuante en la partícula, de lo que se trató extensamente en el capítulo 3.

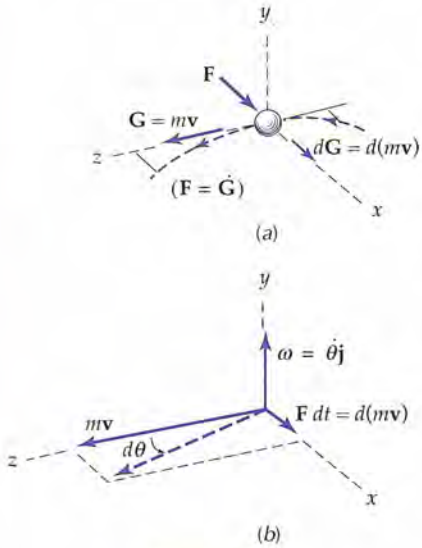


Figura 7.15

Teniendo presentes esas relaciones, retornemos a nuestro problema de rotación. Recordemos ahora que para todo sistema material dado, rígido o no, puede obtenerse una ecuación análoga $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ referida al centro de masa del sistema (ec. 4.9) o a un punto fijo O (ec. 4.7). Apliquemos ahora esta relación al rotor simétrico considerado que se representa en la figura 7.15*c*. Para una velocidad de rotación $\mathbf{p}$ elevada y una velocidad de precesión $\mathbf{\Omega}$ lenta alrededor del eje y, el momento cinético está representado por el vector $\mathbf{H} = I\mathbf{p}$, donde $I = I_{zz}$ es el momento de inercia del rotor respecto al eje de rotación. Inicialmente despreciamos la pequeña componente del momento cinético respecto al eje y que acompaña al lento movimiento de precesión. La aplicación del par de momento $\mathbf{M}$ perpendicular a $\mathbf{H}$ produce una variación $d\mathbf{H} = d(I\mathbf{p})$ en el momento cinético. Aquí vemos que $d\mathbf{H}$, y por tanto $d\mathbf{p}$, es el vector que tiene la dirección del momento $\mathbf{M}$ puesto que $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$, que también puede escribirse $\mathbf{M}\,dt = d\mathbf{H}$. De la misma forma que la variación de la cantidad de movimiento

http://gratislibrospdf.com/

de la partícula tiene la dirección de la fuerza aplicada, la variación del momento cinético del giroscopio tiene la dirección del momento del par de fuerzas aplicado. Vemos, pues, que existe analogía entre los vectores **M**, **H** y $d\mathbf{H}$ y los vectores **F**, **G** y $d\mathbf{G}$. Con estas observaciones, ya no debe extrañar que el vector de rotación sufra una variación en la dirección de **M**, provocando así la precesión del eje del rotor alrededor del eje y.

En la figura 7.15*d* vemos que durante el tiempo dt el momento cinético $I\mathbf{p}$ ha barrido el ángulo $d\psi$, por lo que en el límite, en que $\text{tg}\, d\psi = d\psi$, tendremos

$$d\psi = \frac{M\,dt}{I_p} \qquad \text{o sea} \qquad M = I\frac{d\psi}{dt}p$$

Sustituyendo $d\psi/dt$ por el módulo Ω de la velocidad de precesión queda

$$M = I\Omega p \tag{7.24}$$

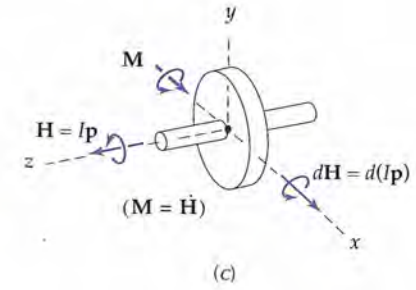
Podemos observar que los vectores **M**, **Ω** y **p** son mutuamente perpendiculares y que pueden quedar relacionados entre sí por el producto vectorial

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{p} \tag{7.24a}$$

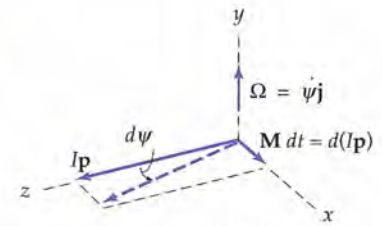
que presenta una analogía completa con la relación anterior $\mathbf{F} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ relativa al movimiento curvilíneo de una partícula desarrollado entre las figuras 7.15*a* y *b*. Las ecuaciones 7.24 y 7.24*a* son válidas para momentos respecto al centro de masa o respecto a un punto fijo del eje de rotación.

Puede recordarse cuál es la relación espacial correcta entre estos tres vectores a partir del hecho de que $d\mathbf{H}$, y por tanto $d\mathbf{p}$, tiene la dirección de **M**, que establece el sentido correcto de la precesión **Ω**. Así el vector de rotación **p** tiende siempre a girar hacia el vector **M**. En la figura 7.16 se indican tres orientaciones relativas de los tres vectores compatibles con su orden correcto. En todo problema este orden debe establecerse correctamente, pues de lo contrario es probable llegar a conclusiones opuestas a la correcta. Resaltemos que la ecuación 7.24, al igual que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y $M = I\alpha$, es una ecuación de movimiento, por lo que el momento **M** representa el momento de *todas* las fuerzas que actúan sobre el rotor y que deben quedar de manifiesto en un correcto *diagrama para sólido libre del rotor*. Señalemos asimismo que, cuando se obliga a un rotor a ejecutar un movimiento de precesión, como es el caso de la turbina de un barco cuando éste vira, ese movimiento engendra un *momento giroscópico* **M** que cumple la ecuación 7.24*a* tanto en módulo como en sentido.

En el precedente análisis del movimiento giroscópico se ha hecho la hipótesis de que la velocidad de rotación es alta y la de precesión baja. Y aunque en la ecuación 7.24 podemos ver que, para valores dados de I y M, la precesión Ω debe ser pequeña si p es grande, examinemos ahora la influencia de Ω en la relación entre los momentos cinéticos. Volveremos a limitar nuestra atención a la precesión uniforme, caso en el que el módulo **Ω** permanece constante. En la figura 7.17 se representa nuevamente el rotor considerado. Dado que éste posee un momento de inercia respecto al eje y y que está animado de una velocidad angular de precesión alrededor del mismo, existirá una componente de momento cinético según dicho eje. Así pues, tenemos las dos componentes $H_z = I_p$ y $H_y = I_0\Omega$, donde I_0 representa I_{yy} e I representa otra vez I_{zz}. Según se indica en la figura, el momento cinético total es **H**. Como antes, la variación de **H** si-



(*c*)



(*d*)

Figura 7.15 (continuación)

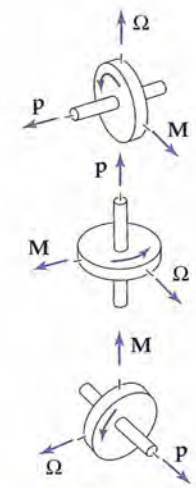


Figura problema 7.16

http://gratislibrospdf.com/

gue siendo $d\mathbf{H} = \mathbf{M}\,dt$ y el ángulo de precesión durante el tiempo dt es $d\psi = M\,dt/H_z = M\,dt/(I_p)$. Así pues, la ecuación 7.24 conserva su validez y, en el caso de la precesión uniforme, constituye una descripción exacta del movimiento en tanto que el eje de rotación sea perpendicular al eje alrededor del cual tiene lugar la precesión.

Consideremos ahora la precesión uniforme de la peonza simétrica de la figura 7.18 en revolución sobre su eje con una velocidad angular elevada p y apoyada en su punto O. En este caso el eje de rotación forma un ángulo θ con el eje vertical Z alrededor del cual tiene lugar la precesión. Aquí volveremos a despreciar la pequeña componente del momento cinético debido a la precesión y supondremos que H es igual a $I\mathbf{p}$, que es el momento cinético respecto al eje de la peonza asociado únicamente a la rotación. El momento resultante respecto a O está producido por el peso y vale $mg\bar{r}$ sen θ, donde $\bar{r}$ es la distancia desde O hasta el centro de masa G. En el diagrama vemos que durante el tiempo dt el vector momento cinético $\mathbf{H}_O$ experimenta una variación $d\mathbf{H}_O = \mathbf{M}_O\,dt$ en la dirección de $\mathbf{M}_O$ y que θ permanece constante. El incremento que experimenta el ángulo de precesión en torno al eje Z es

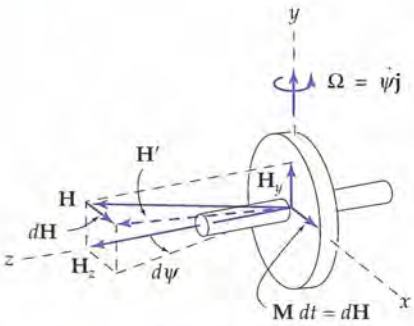


Figura 7.17

$$d\psi = \frac{M_O\,dt}{Ip \text{ sen } \theta}$$

Sustituyendo $d\psi/dt$ por Ω y M_O por su valor $mg\bar{r}$ sen θ, tenemos

$$mg\bar{r} \text{ sen } \theta = I\Omega p \text{ sen } \theta \qquad \text{o sea} \qquad mg\bar{r} = I\Omega p$$

que es independiente de θ. Introduciendo el radio de giro, de forma que $I = mk^2$ y despejando la velocidad de precesión resulta,

$$\left(\Omega = \frac{g\bar{r}}{k^2 p}\right) \tag{7.25}$$

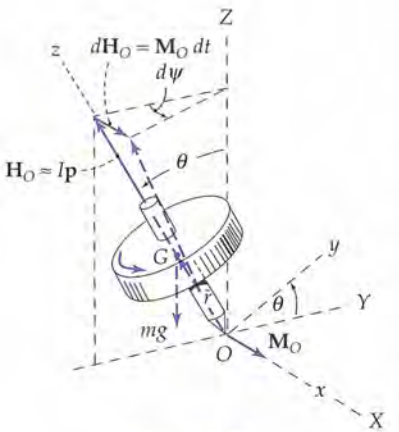


Figura 7.18

A diferencia de la ecuación 7.24 que describe exactamente el movimiento del rotor de la figura 7.17, cuya precesión está confinada en el plano x-z, la ecuación 7.25 es una aproximación basada en la hipótesis de que el momento cinético asociado a Ω es despreciable comparado con el asociado a p. En la parte (b) de este apartado veremos qué error se comete. Fundados en este estudio, la peonza tendrá un movimiento de precesión uniforme con el ángulo constante θ únicamente si se pone en movimiento con un valor de Ω que satisfaga la ecuación 7.25. Si no se cumplen estas condiciones, la precesión resulta desigual y θ puede oscilar con una amplitud que aumenta cuando disminuye la velocidad de rotación. El correspondiente movimiento de vaivén del eje de giro se conoce como *nutación*.

(b) Un estudio más completo. Ahora vamos a utilizar directamente la ecuación 7.19, que es la ecuación general del momento cinético para el caso de cuerpo rígido, aplicándola a un cuerpo en rotación sobre su eje de simetría de revolución. Esta ecuación es válida para rotación alrededor de un punto o del centro de masa. Una peonza, el rotor de un giroscopio y una cápsula espacial, constituyen ejemplos de cuerpos cuyos movimientos pueden describirse mediante las ecuaciones de la rotación en torno a un punto. Las ecuaciones de momento para este tipo general de problemas son bastante complicadas y su

http://gratislibrospdf.com/

resolución completa conlleva el empleo de integrales elípticas y cálculos un tanto laboriosos. En buena parte de los problemas técnicos en los que el movimiento es una rotación intervienen cuerpos que presentan simetría en torno a un eje. Esta simetría introduce simplificaciones y facilita en gran manera la resolución de las ecuaciones.

Consideremos un cuerpo con simetría axial (fig. 7.19*a*) que gire en torno a un punto O de su eje, el cual hacemos coincidir con la dirección z. Tomando O como origen, los ejes x e y se convierten automáticamente en ejes principales de inercia junto con el eje z. Podríamos emplear la misma descripción para la rotación de un cuerpo simétrico análogo en torno a su centro de masa G que se tomaría como origen de coordenadas, tal como se indica en el giroscopio con suspensión cardan de la figura 7.19*b*. También en este caso los ejes x e y son principales de inercia para el punto G. Igualmente podría emplearse esta descripción para representar la rotación en el espacio de un cuerpo de simetría axial, tal como la cápsula espacial de la figura 7.19*c*, en torno a su centro de masa. Se observa en cada caso que, independientemente de la rotación de los ejes o de la rotación del cuerpo en torno a los ejes (en torno al eje z), los momentos principales de inercia respecto a los ejes x e y permanecen constantes con el tiempo. Volvemos a designar los momentos principales de inercia por $I_{zz} = I$ e $I_{xx} = I_{yy} = I_0$. Los productos de inercia son, por supuesto, nulos.

Antes de aplicar la ecuación 7.19 introducimos un sistema de coordenadas que ofrezcan una descripción natural del problema considerado. Esas coordenadas se muestran en la figura 7.20 para el caso de rotación en torno a un punto fijo O. Los ejes X-Y-Z están fijos en el espacio y el plano A contiene los ejes X-Y y el punto O del eje del rotor. El plano B contiene el punto O y es siempre normal al eje del rotor. El ángulo θ mide la inclinación del eje del rotor respecto al eje vertical Z y es también la medida del ángulo que forman los planos A y B. La intersección de estos dos planos es el eje x, y éste queda situado respecto al eje X mediante el ángulo ψ. El eje y está contenido en el plano B y el eje z coincide con el eje del rotor. Los ángulos θ y ψ especifican completamente la posición del eje del rotor. El desplazamiento angular del rotor respecto a los ejes x-y-z está especificado por el ángulo ϕ medido del eje x al eje x' solidario del rotor. La velocidad de rotación es $p = \dot{\phi}$.

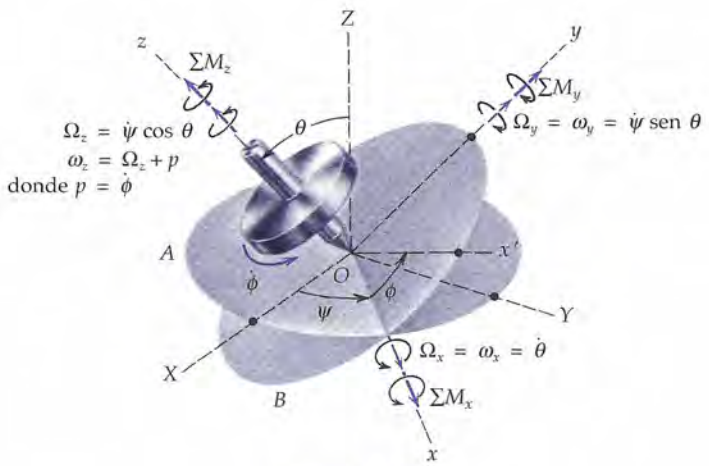
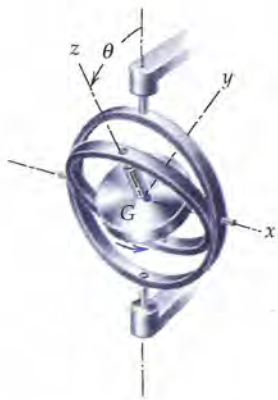
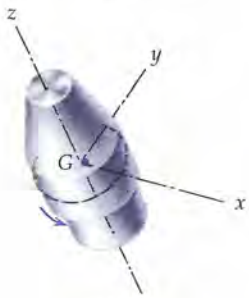


Figura 7.20

(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 7.19

http://gratislibrospdf.com/

En la figura 7.20 las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del rotor y la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ de los ejes x-y-z resultan ser

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \dot{\theta} & \omega_x &= \dot{\theta} \\ \Omega_y &= \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta & \omega_y &= \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \\ \Omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta & \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + p \end{aligned}$$

Es importante observar que las velocidades angulares de los ejes y del cuerpo tienen iguales componentes x e y, pero que las componentes z difieren en la velocidad angular relativa p.

Las componentes del momento cinético de las ecuaciones 7.12 quedan

$$\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\omega_x = I_0\dot{\theta} \\ H_y &= I_{yy}\omega_y = I_0\dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \\ H_z &= I_{zz}\omega_z = I(\dot{\psi} \cos \theta + p) \end{aligned}$$

Aplicando en la ecuación 7.19 las componentes de la velocidad angular y del momento cinético resulta

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= I_0(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) + I\dot{\psi}(\dot{\psi} \cos \theta + p) \operatorname{sen} \theta \\ \Sigma M_y &= I_0(\ddot{\psi} \operatorname{sen} \theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta) - I\dot{\theta}(\dot{\psi} \cos \theta + p) \\ \Sigma M_z &= I\frac{d}{dt}(\dot{\psi} \cos \theta + p) \end{aligned} \qquad (7.26)$$

Estas ecuaciones 7.26 son las ecuaciones generales de la rotación de un cuerpo simétrico en torno a un punto fijo O o a su centro de masa G. En un problema específico, la solución de las ecuaciones dependerá de las sumas de los momentos aplicados al cuerpo respecto a los tres ejes de coordenadas. La aplicación de estas ecuaciones vamos a limitarla a los dos casos especiales de rotación alrededor de un punto que se describen en las secciones siguientes.

(c) Precesión uniforme. Ahora vamos a examinar aquellas condiciones en las que la precesión del rotor es a velocidad uniforme $\dot{\psi}$, con un ángulo θ constante y a la velocidad de rotación p también constante. Entonces,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \text{constante}, & \ddot{\psi} &= 0 \\ \theta &= \text{constante}, & \dot{\theta} &= \ddot{\theta} = 0 \\ p &= \text{constante}, & \dot{p} &= 0 \end{aligned}$$

y las ecuaciones 7.26 se hacen

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta[I(\dot{\psi} \cos \theta + p) - I_0\dot{\psi} \cos \theta] \\ \Sigma M_y &= 0 \\ \Sigma M_z &= 0 \end{aligned} \qquad (7.27)$$

De estos resultados se ve que el momento respecto a O (o respecto a G) que ha de actuar sobre el rotor debe tener la dirección x, puesto que son nulas las com-

http://gratislibrospdf.com/

ponentes y y z. Además, siendo constantes los valores de θ, $\dot{\psi}$ y p se ve que el momento debe ser constante. También es importante observar que el eje de momentos es normal al plano definido por el eje de precesión (eje Z) y el eje de rotación (eje z).

La ecuación 7.27 podemos obtenerla asimismo teniendo en cuenta que las componentes de $\mathbf{H}$ observadas desde x-y-z permanecen constantes, por lo que $(\dot{\mathbf{H}})_{xyz} = \mathbf{0}$. Como en general $\Sigma\mathbf{M} = (\dot{\mathbf{H}})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}$, para el caso de precesión uniforme tenemos

$$\Sigma\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} \qquad (7.28)$$

que es a lo que se reducen las ecuaciones 7.27 al sustituir los valores de $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{H}$.

Aquellos casos, como el de la figura 7.14, en que la precesión tiene lugar alrededor de un eje normal al eje del rotor constituyen con mucho los ejemplos más corrientes de movimiento giroscópico que se dan en las aplicaciones técnicas. Entonces, haciendo las sustituciones $\theta = \pi/2$, $\omega_z = p$, $\dot{\psi} = \Omega$ y $\Sigma M_x = M$ de las ecuaciones 7.27, tenemos

$$M = I\Omega p \qquad [7.24]$$

que ya dedujimos inicialmente en este mismo apartado estudiando directamente este caso particular.

Examinemos ahora la precesión uniforme del rotor (peonza simétrica) de la figura 7.20 para cualquier valor de θ constante distinto a $\pi/2$. El momento ΣM_x respecto al eje x es debido al peso del rotor y vale $mg\bar{r}$ sen θ. Al sustituir en las ecuaciones 7.27 y agrupando términos resulta

$$mg\bar{r} = I\dot{\psi}p - (I_0 - I)\dot{\psi}^2 \cos\theta$$

Vemos que $\dot{\psi}$ es pequeña cuando p es grande, por lo que el segundo término del segundo miembro de la ecuación se hace más pequeño en comparación con $I\dot{\psi}p$. Si despreciamos este término más pequeño, tenemos $\dot{\psi} = mg\bar{r}/(Ip)$ que, tras las mismas sustituciones por $\Omega = \dot{\psi}$ y $mk^2 = I$ que antes, se hace

$$\Omega = \frac{g\bar{r}}{k^2 p} \qquad [7.25]$$

Esta misma relación fue deducida anteriormente suponiendo que el momento cinético estaba totalmente alineado con el eje de rotación.

(d) Precesión uniforme con momento nulo. Consideremos ahora el movimiento de un rotor simétrico sin momento externo respecto a su centro de masa. Los movimientos de este tipo se encuentran en las naves espaciales y proyectiles que giran sobre sí mismos y tienen a la vez movimiento de precesión durante el vuelo. En la figura 7.21 se representa un cuerpo de este tipo en el cual el eje Z, cuya dirección es fija en el espacio, se ha tomado de forma que su dirección coincida con la del momento cinético $\mathbf{H}_G$, que es constante al ser $\Sigma\mathbf{M}_G = 0$. Los ejes x-y-z están fijos de la manera descrita en relación a la figura 7.20. En la figura 7.21 las tres componentes del momento cinético son $H_{G_x} = 0$, $H_{G_y} = H_G$ sen θ y $H_z = H_G$ cos θ. Según las relaciones de definición (ecs. 7.12), con la notación de este apartado esas componentes son también $H_{G_x} = I_0\omega_x$, $H_{G_y} = I_0\omega_y$ y $H_{G_z} = I\omega_z$. Así pues, $\omega_x = \Omega_x = 0$, por lo que θ es constante, lo cual indica que el movimiento es una precesión uniforme alrededor del vec-

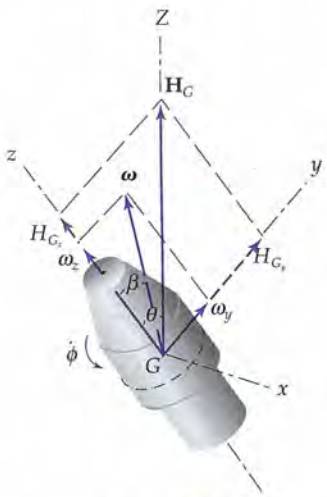


Figura 7.21

http://gratislibrospdf.com/

tor constante $\mathbf{H}_G$. Como su componente x es nula, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del rotor junto con el eje Z permanece en el plano y-z formando un ángulo β con el eje z. La relación entre β y θ se obtiene de $\text{tg}\,\theta = H_{G_y} / H_{G_z} = I_0\omega_y/(I\omega_z)$, que es

$$\text{tg}\,\theta = \frac{I_0}{I}\,\text{tg}\,\beta \tag{7.29}$$

Así pues, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ forma un ángulo constante β con el eje de rotación.

La velocidad de precesión se obtiene fácilmente de la ecuación 7.27 sin más que hacer en ella $M = 0$, con lo que resulta

$$\dot{\psi} = \frac{Ip}{(I_0 - I)\cos\theta} \tag{7.30}$$

De esta relación resulta evidente que la dirección de la precesión depende de los valores relativos de ambos momentos de inercia.

Si $I_0 > I$, será $\beta < \theta$, según se indica en la figura 7.22*a*, y se dice que la precesión es *directa*. En este caso el cono del cuerpo rueda sobre el exterior del cono del espacio.

Si $I > I_0$, será $\theta < \beta$, según se indica en la figura 7.22*b*, y se dice que la precesión es *retrógrada*. En este caso el cono del espacio es interior al cono del cuerpo y $\dot{\psi}$ y p tienen signos opuestos.

Si $I = I_0$, por la ecuación 7.29 será $\theta = \beta$ y la figura 7.22 indica que ambos ángulos han de ser nulos para que sean iguales. En este caso el cuerpo no precesiona y simplemente rota con una velocidad angular $\mathbf{p}$. Esta situación se da en los cuerpos simétricos respecto a un punto, tales como una esfera homogénea.

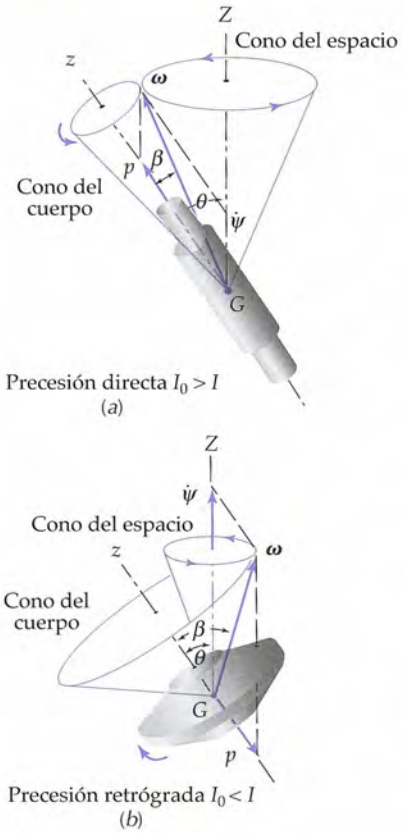
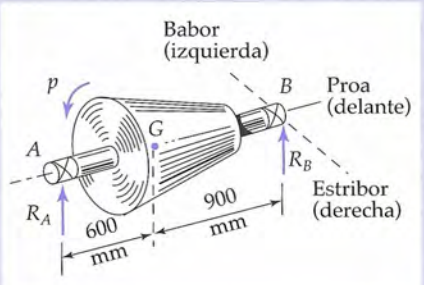


Figura 7.22

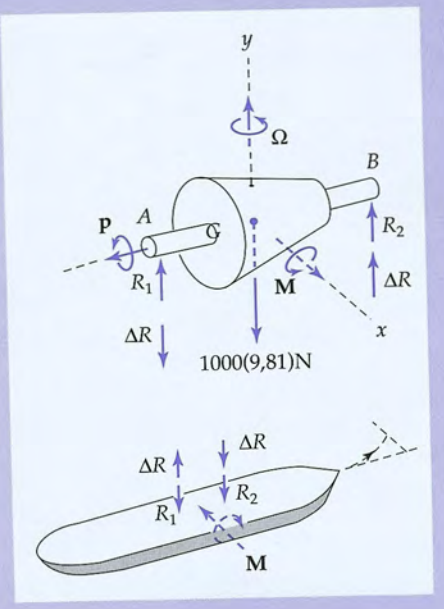
PROBLEMA TIPO 7.8

El rotor de la turbina del grupo generador de un barco tiene una masa de 1000 kg con centro de masa en G y radio de giro de 200 mm. El eje de la turbina está montado horizontalmente sobre cojinetes A y B en la dirección de proa a popa y gira en sentido antihorario a 5000 rpm visto desde popa. Hallar las componentes verticales de las reacciones en los cojinetes A y B si el barco hace un viraje a babor (izquierda) de 400 m de radio a la velocidad de 25 nudos (1 nudo = 0,514 m/s). ¿Se eleva o se hunde la proa a causa del efecto giroscópico?



http://gratislibrospdf.com/

Solución. Las componentes verticales de las reacciones en los cojinetes serán iguales a las reacciones estáticas R_1 y R_2, ocasionadas por el peso del rotor, más o menos el incremento ΔR a causa del efecto giroscópico. La ecuación de momentos de la Estática nos da enseguida $R_1 = 5886$ N y $R_2 = 3294$ N. En el diagrama para sólido libre del rotor se indican los sentidos dados de la velocidad de rotación **p** y de la velocidad de precesión **Ω**. Como el eje de rotación tiende siempre a girar hacia el eje del par, vemos que el eje de éste, **M**, apunta hacia estribor (la derecha), tal como se indica en el mencionado diagrama para sólido libre del rotor. Por consiguiente, el sentido de los incrementos ΔR es hacia arriba en B y hacia abajo en A, para producir el par de momento **M**. Entonces, las reacciones en los cojinetes A y B serán



$$R_A = R_1 - \Delta R \qquad \text{y} \qquad R_B = R_2 + \Delta R$$

La velocidad de precesión Ω es igual a la velocidad del barco dividida por el radio del viraje.

$$[v = p\Omega] \qquad \Omega = \frac{25(0{,}14)}{400} = 0{,}0321 \text{ rad/s}$$

Aplicando ahora la ecuación 7.24 al centro de masa del rotor G resulta

$$[M = I\Omega p] \qquad 1{,}500\Delta R = 1000(0{,}200)^2(0{,}0321)\left[\frac{5000(2\pi)}{60}\right]$$

$$\Delta R = 449 \text{ N}$$

Las reacciones pedidas en los cojinetes son

$$R_A = 5886 - 449 = 5437 \text{ N} \qquad \text{y} \qquad R_B = 3924 + 449 = 3473 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

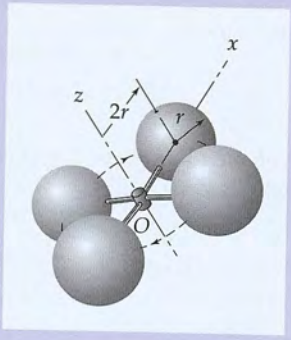
Observemos ahora que, según el principio de acción y reacción, las fuerzas que acabamos de calcular son las ejercidas *sobre* el eje rotor *por* la estructura del barco. En consecuencia, el rotor aplica *al* barco unas reacciones iguales y opuestas, tal como puede apreciarse en la ilustración inferior. Por tanto el efecto del par giroscópico es generar los incrementos ΔR representados y la proa tenderá a hundirse y la popa a elevarse (pero sólo ligeramente).

① Si el barco vira a babor, la rotación es antihoraria observada desde arriba y el vector de precesión Ω es hacia arriba según la regla de la mano derecha.

② Tras imaginar el sentido correcto de M aplicado *al* rotor, es un error muy frecuente aplicarlo al barco en el mismo sentido, olvidando así el principio de acción y reacción. Es evidente que, entonces, los resultados estarán invertidos. (Si tiene Ud un yate no cometa este error al poner en funcionamiento el estabilizador giroscópico vertical para contrarrestar el balanceo.)

http://gratislibrospdf.com/

Se ha propuesto un estación espacial que puede aproximarse satisfactoriamente a cuatro cáscaras esféricas uniformes de masa m y radio r cada una. En primera aproximación, puede despreciarse la masa de la estructura que las une y del equipo interior. Si se diseña la estación para que gire alrededor de su eje z a razón de una vuelta cada cuatro segundos, hallar: (a) el número n de ciclos de precesión para cada revolución alrededor del eje z si el plano de rotación se desvía muy poco respecto a una orientación fija y (b) el período de precesión τ si el eje de rotación z forma un ángulo de 20° respecto al eje de orientación fija alrededor del cual tiene lugar la precesión. Dibujar los conos del espacio y del cuerpo para esta última condición.



Solución. ***(a)*** El número de ciclos de precesión para cada revolución de la estación alrededor del eje z será el cociente entre la velocidad de precesión $\dot{\psi}$ y la velocidad de rotación p que, según la ecuación 7.30, es

$$\frac{\dot{\psi}}{p} = \frac{I}{(I_0 - I)\cos\theta}$$

Los momentos de inercia son

$$I_{zz} = I = 4[\tfrac{2}{3}mr^2 + m(2r)^2] = \tfrac{56}{3}mr^2$$

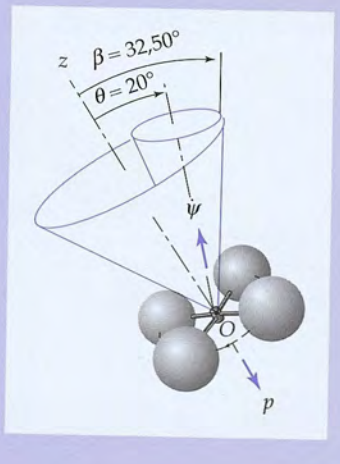
$$I_{xx} = I_0 = 2(\tfrac{2}{3})mr^2 + 2[\tfrac{2}{3}mr^2 + m(2r)^2] = \tfrac{32}{3}mr^2$$

① **La teoría se basa en la hipótesis de que $I_{xx} = I_{yy}$ = momento de inercia respecto a cualquier eje que pase por G perpendicular al eje z. Este es nuestro caso y el lector deberá comprobarlo para su propia satisfacción.**

Si θ es muy pequeño, $\cos\theta \cong 1$ y el cociente entre las velocidades angulares se reduce a

$$n = \frac{\dot{\psi}}{p} = \frac{\frac{56}{3}}{\frac{32}{3} - \frac{56}{3}} = -\frac{7}{3} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo menos indica precesión retrógrada donde, en este caso, $\dot{\psi}$ y p son, esencialmente, de signo contrario. Así pues, la estación realiza siete ciclos de precesión por cada tres revoluciones.



(b) Para $\theta = 20°$ y $p = 2\pi/4$ rad/s, el período de precesión es $\tau = 2\pi/|\dot{\psi}|$, con lo que según la ecuación 7.30

$$\tau = \frac{2\pi}{2\pi/4}\left|\frac{I_0 - I}{I}\cos\theta\right| = 4(\tfrac{3}{7})\cos 20° = 1{,}61 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

La precesión es retrógrada y el cono del cuerpo es exterior al del espacio, según se indica en la figura, donde el cono del cuerpo, en virtud de la ecuación 7.29, está determinado por

$$\text{tg}\,\beta = \frac{I}{I_0}\,\text{tg}\,\theta = \frac{56/3}{32/3}(0{,}3640) = 0{,}6370 \qquad \beta = 32{,}50°$$

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMAS

Problemas introductorios

7.101 Un profesor de Dinámica está enseñando a sus alumnos los fundamentos del giroscopio. Para ello, mantiene suspendida de una cuerda sujeta a uno de los extremos de su eje horizontal una rueda que gira muy rápidamente. Especificar cuál es el movimiento de precesión de la rueda.

Resp. La precesión es antihoraria vista desde arriba.

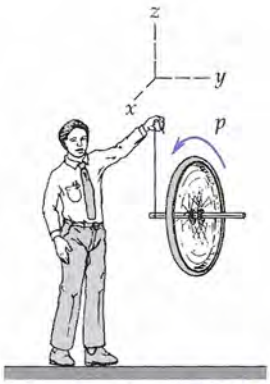


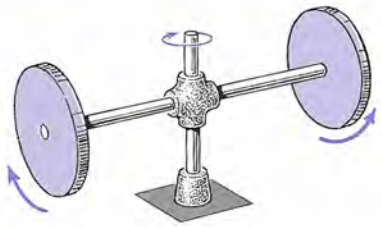
Figura problema 7.101

7.102 Si el barco del problema tipo 7.8 sigue un rumbo recto pero su proa desciende en el momento en que cae en el seno de una ola, determinar la dirección del momento giroscópico ejercido *por* el rotor de la turbina *sobre* la estructura del casco y su efecto en el movimiento del barco.

7.103 Un automóvil tuerce a la derecha viajando por una calzada horizontal. Determinar si la reacción normal bajo la rueda posterior derecha aumenta o disminuye a consecuencia del efecto giroscópico de la precesión de las ruedas.

Resp. Disminuye

7.104 Los dos discos iguales giran libremente alrededor del árbol con unas velocidades angulares del mismo valor pero sentidos contrarios, tal como se muestra. A su vez, el árbol hace girar como se indica al eje vertical. Comprobar si el árbol se comba como en *A* o como en *B* a causa del efecto giroscópico.



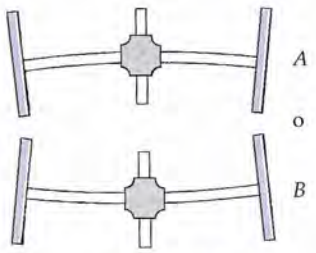


Figura problema 7.104

7.105 El ventilador especial está montado como se muestra. La armadura del motor, el árbol y las paletas tienen una masa conjunta de 2,2 kg y un radio de giro de 60 mm. La posición axial *b* del bloque *A* de 0,8 kg es ajustable. Con el ventilador apagado, el conjunto está equilibrado en torno al eje *x* cuando $b = 180$ mm. El motor y el ventilador funcionan a 1725 rpm en el sentido indicado. Hallar el valor de *b* necesario para que se produzca una precesión uniforme de 0,2 rad/s en torno al semieje *y* positivo.

Resp. $b = 216$ mm

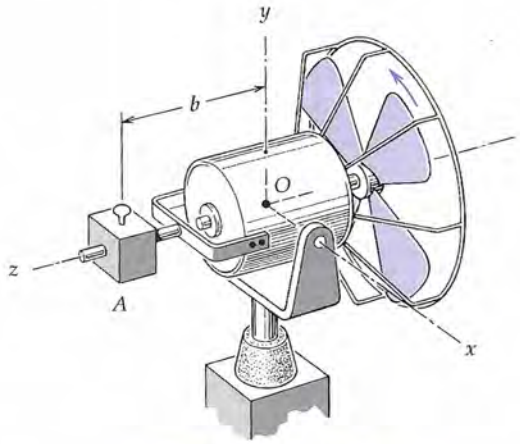


Figura problema 7.105

7.106 Las paletas y la cabeza del rotor del helicóptero tienen una masa de 64 kg y un radio de giro de 3 m respecto al eje de rotación *z*. Mientras el rotor gira a 500 rpm durante un corto intervalo que sigue a un despegue vertical, el aparato se inclina hacia adelante a razón de $\dot{\theta} = 10$ grd/s al objeto de ganar velocidad hacia adelante. Hallar el momento giroscópico *M* que el rotor transmite al fuselaje y explicar si el aparato tiende a desviarse en sentido horario o antihorario tal como lo vería un pasajero mirando hacia adelante.

http://gratislibrospdf.com/

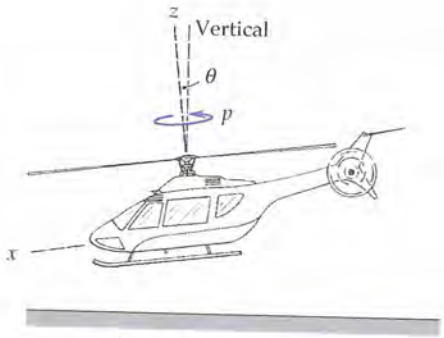


Figura problema 7.106

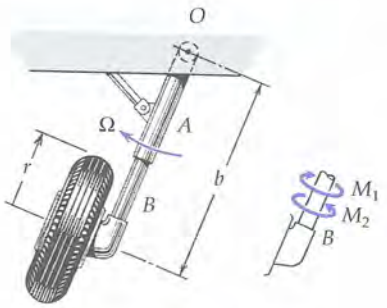


Figura problema 7.109

7.107 El rotor de 210 kg de la turbina de un motor de avión a reacción tiene un radio de giro de 220 mm y rota en sentido antihorario a 18 000 rpm visto de frente. Si el avión viaja a 1200 km/h y comienza a ejecutar un rizo interno de 3800 m de radio, calcular el momento giroscópico M que se transmite a la estructura del fuselaje. ¿Qué enmienda en los mandos deberá efectuar el piloto para mantenerse en el plano vertical?

Resp. $M = 1681$ m · N, timón a la izquierda

7.108 Un autobús no contaminante experimental está propulsado por la energía cinética que se almacena en un volante de inercia de gran tamaño que gira a una velocidad muy alta p en el sentido indicado. Cuando el vehículo encuentra una pendiente ascendente corta, las ruedas delanteras se elevan y ello hace que el volante tenga precesión. ¿Qué variaciones tienen lugar en las fuerzas entre los neumáticos y la calzada durante este cambio repentino?

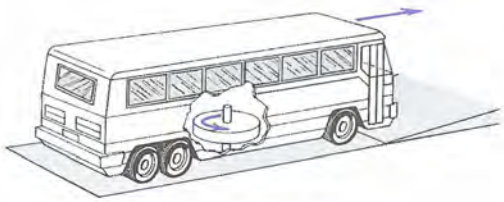


Figura problema 7.108

7.109 Un avión acaba de dejar la pista con una velocidad de despegue v. Las ruedas, que giran libremente, tienen una masa m cada una y un radio de giro k respecto a sus ejes. Vista desde la parte delantera del avión, cada rueda tiene una velocidad angular de precisión Ω mientras el tren de aterrizaje se pliega bajo el ala en torno al eje O. Como resultado del efecto giroscópico, el miembro soporte A ejerce un momento torsional M sobre B para impedir que el miembro tubular gire dentro del manguito de B. Hallar M e identificar si su sentido es el de M_1 o el de M_2.

Resp. $M = M_1 = mk^2\Omega\dfrac{v}{r}$

Problemas representativos

7.110 Un pequeño compresor de aire para cabina de avión consta de una turbina A de 3,50 kg que mueve el ventilador B de 2,40 kg a una velocidad de 20 000 rpm. El árbol de unión está montado transversalmente a la dirección del vuelo y se ve desde la parte posterior del avión. Los radios de giro de A y B son de 79,0 mm y 71,0 mm respectivamente. Hallar las fuerzas radiales que actúan sobre los cojinetes C y D si el avión hace un tonel (rotación alrededor del eje longitudinal de vuelo) en sentido horario, visto desde la parte trasera del aparato, de 2 rad/s. Se desprecian los pequeños momentos debidos a los pesos de los rotores. Dibujar un diagrama para sólido libre del árbol visto desde arriba e indicar la forma que adquiere su eje geométrico con la deformación.

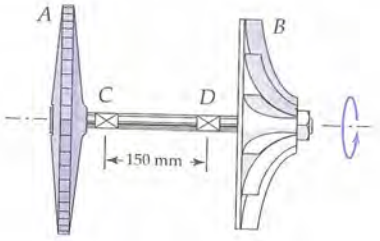


Figura problema 7.110

7.111 En la figura se representa un giroscopio de eje vertical empleado para estabilizar un barco hospital contra el balanceo. El motor A gira el piñón que hace la precesión del giroscopio accionando la gran corona de precesión B y a su rotor solidario en torno a un eje horizontal transversal al barco. El rotor gira dentro de su alojamiento a 960 rpm en sentido horario, visto desde arriba, y tiene una masa de 80 Mg y un radio de giro de 1,45 m. Hallar el momento ejercido por el giroscopio sobre la estructura del casco si el motor mueve la corona B de precesión

http://gratislibrospdf.com/

a una velocidad de 0,320 rad/s. ¿En cuál de los dos sentidos (*a*) o (*b*) debería girar el motor para contrarrestar un balance del barco a babor?

Resp. $M = 5410$ m · kN; en sentido (*b*)

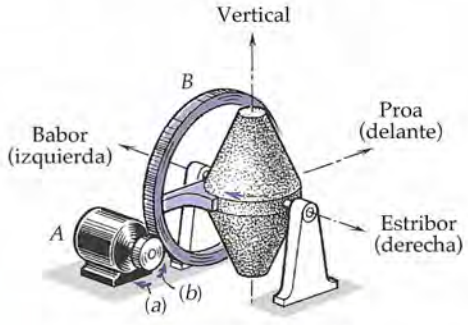


Figura problema 7.111

7.112 El motor eléctrico tiene una masa total de 10 kg y se apoya en los soportes *A* y *B* solidarios del disco giratorio. La armadura del motor tiene una masa de 2,5 kg y un radio de giro de 35 mm y gira en sentido antihorario a razón de 1725 rpm visto desde *A* hacia *B*. La plataforma da vueltas en torno a su eje vertical a la velocidad constante de 48 rpm en el sentido indicado. Hallar las componentes verticales de las fuerzas que soportan los apoyos *A* y *B*.

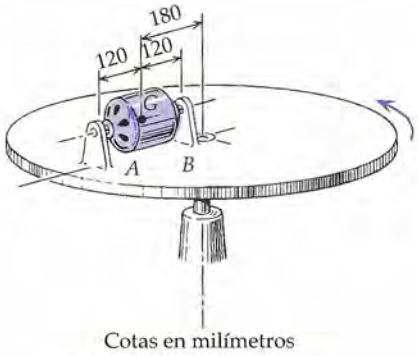


Figura problema 7.112

7.113 Un automóvil experimental está equipado con un estabilizador giroscópico para contrarrestar completamente la tendencia del vehículo a ladearse al tomar una curva (para que no haya cambios en la fuerzas entre neumáticos y calzada). El rotor del giroscopio tiene una masa m_0 y un radio de giro k y está montado sobre cojinetes fijos en un árbol paralelo al puente trasero del automóvil. El centro de masa de éste se halla a una altura h sobre la calzada y el vehículo está pasando por una curva horizontal no peraltada con una celeridad v. ¿A qué velocidad p debe girar el rotor y en qué sentido para contrarrestar completamente la tendencia del automóvil a volcar en un viraje a la derecha o bien a la izquierda?

Resp. $p = \dfrac{mvh}{m_0 k^2}$; en sentido contrario a las ruedas

7.114 Las dos ruedas iguales tienen una masa de 4 kg y un radio de giro $k_z = 120$ mm cada una y ambas están montadas en sendos árboles horizontales *AB* sujetos en *O* a sus árboles verticales. En el caso (*a*) el árbol *AB* es solidario de un manguito *O* que gira libremente en torno al eje vertical *y*. En el caso (*b*) el árbol *AB* es solidario de una horquilla articulada al manguito en torno al eje *x*. Si en la posición de la figura la rueda gira con una velocidad angular elevada $p = 3600$ rpm en torno a su eje *z*, hallar en cada caso la velocidad de precesión que pueda existir y el momento flector M_A en la sección *A* del árbol. Despreciar la pequeña masa del árbol y de los acopladores en *O*.

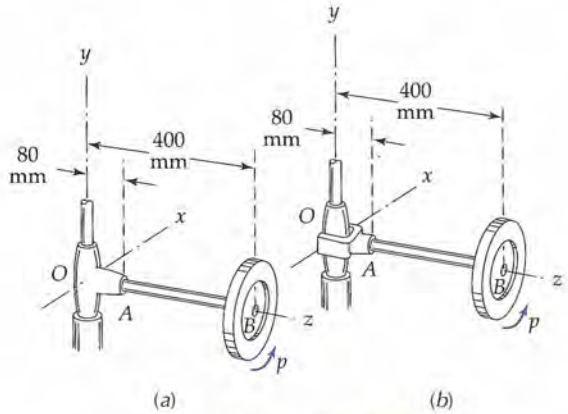


Figura problema 7.114

7.115 Si la rueda del caso (*a*) del problema 7.114 es obligada a sufrir precesión en torno a la vertical con una velocidad $\boldsymbol{\Omega} = 2\mathbf{j}$ rad/s merced a un mecanismo de arrastre, hallar el momento flector en la sección *A* del árbol horizontal. En ausencia de rozamiento, ¿cuál es el momento M_O del par de fuerzas que se aplica en *O* al manguito para mantener ese movimiento?

Resp. $M_A = 30{,}9$ m · N, $M_O = 0$

7.116 El disco de 5 kg y su cubo *A* tienen un radio de giro de 85 mm respecto al eje z_0 y giran con una velocidad $p = 1250$ rpm. Simultáneamente, todo el conjunto rota alrededor del eje vertical *z* con una velocidad $\Omega = 400$ rpm. Calcular el momento giroscópico **M** que *el disco ejerce sobre el árbol* en el punto *C* y el momento flector M_A en la sección *O* del árbol. Despreciar la masa del árbol pero, por lo demás, tener en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre el mismo.

http://gratislibrospdf.com/

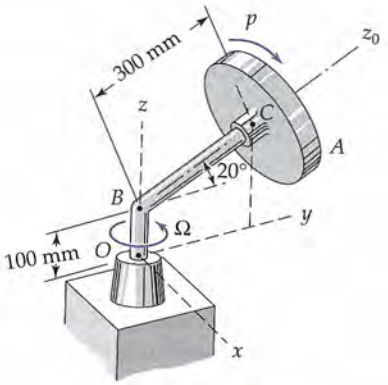


Figura problema 7.116

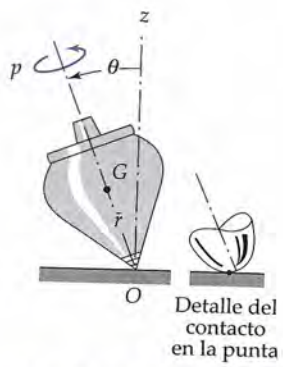


Figura problema 7.118

7.117 Un cono circular, recto y macizo, de masa m, radio de la base $r = 100$ mm y altura $H = 3r = 300$ mm, está suspendido de su vértice en O y rota sobre su eje con una velocidad $p = 2700$ rpm. Hallar el período de la precesión uniforme lenta alrededor de la vertical. ¿Depende el resultado del ángulo θ formado por el eje del cono y la vertical?

Resp. $\tau = 2{,}41$ s

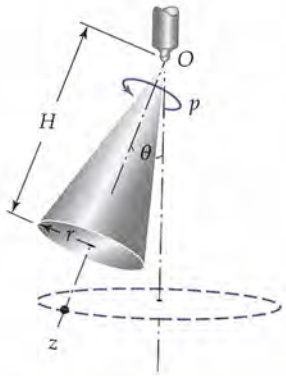


Figura problema 7.117

7.118 La peonza de 12 g, con un radio de giro de 16 mm respecto a su eje de rotación, gira en el sentido indicado con una velocidad $p = 3600$ rpm. El eje de rotación forma un ángulo $\theta = 20°$ con la vertical y entre la punta O y el centro de masa de la peonza hay una distancia $\bar{r} = 60$ mm. Hallar la precesión $\boldsymbol{\Omega}$ y explicar por qué θ decrece paulatinamente en tanto la velocidad de rotación permanece alta. Se acompaña un detalle del contacto en la punta.

7.119 El rotor de 4 kg de masa y 75 mm de radio de giro rota sobre rodamientos de bolas a una velocidad de 3000 rpm en torno a su árbol OG que puede pivotar libremente sobre el eje X y también girar alrededor del eje Z. Calcular el vector $\boldsymbol{\Omega}$ para la precesión en torno al eje Z. Despreciar la masa del árbol OG y calcular el momento giroscópico $\mathbf{M}$ que el árbol ejerce sobre la sección G del rotor.

Resp. $\boldsymbol{\Omega} = -1{,}25\mathbf{K}$ rad/s, $\mathbf{M} = 8{,}30\mathbf{i}$ m·N

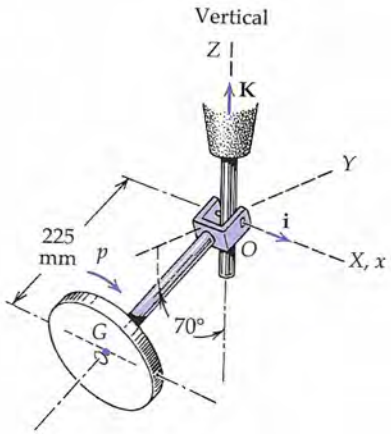


Figura problema 7.119

7.120 Los dos conos macizos de base común y alturas iguales giran en el espacio alrededor de su eje común con una velocidad p. ¿Para qué valor del cociente h/r será imposible la precesión?

7.121 Los dos discos iguales de masa m y radio r cada uno giran como un conjunto rígido en torno al eje que los une. Hallar el valor b para el que no habría movimiento de precesión si el conjunto se moviera libremente en el espacio.

Resp. $b = r$

http://gratislibrospdf.com/

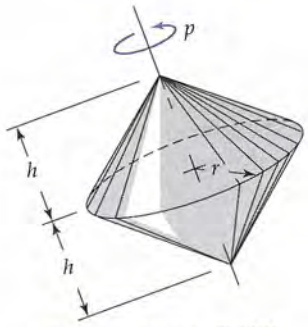


Figura problema 7.120

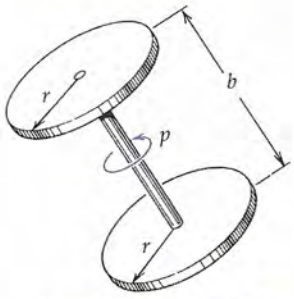


Figura problema 7.121

7.122 Se lanza al aire un anillo delgado con una rotación propia de 300 rpm. Si se observa que su eje geométrico presenta un leve balanceo de precesión, determinar la frecuencia f de ese balanceo.

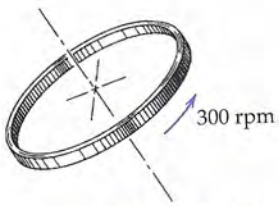


Figura problema 7.122

7.123 La estructura primaria de una estación espacial en fase de proyecto se compone de cinco cáscaras esféricas conectadas por radios tubulares. El momento de inercia de la estructura respecto a su eje geométrico A-A es el doble que respecto a cualquier eje perpendicular a A-A que pase por O. Se pretende que la estación gire en torno a su eje geométrico con una velocidad constante de 3 rpm. Si el eje de rotación A-A tiene movimiento de rotación repecto al eje Z, de orientación fija, y forma con éste un ángulo muy pequeño, calcular a qué velocidad $\dot{\psi}$ se balancea la estación. La aceleración del centro de masa O es despreciable.

Resp. $\dot{\psi} = -6$ rpm; precesión retrógrada

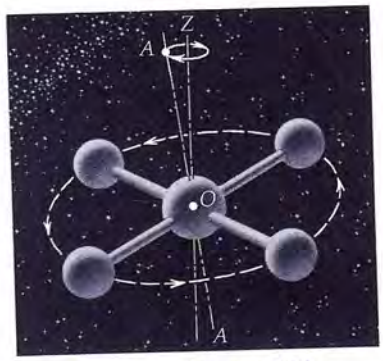


Figura problema 7.123

7.124 La barra rectangular rota en el espacio sobre su eje longitudinal con una velocidad $p = 200$ rpm. Si su eje se balancea, tal como se muestra, describiendo un ángulo total de 20°, calcular el período τ del balanceo.

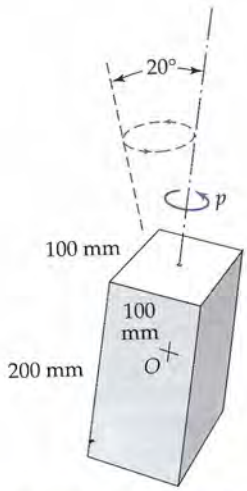


Figura problema 7.124

7.125 El muchacho lanza el disco delgado comunicándole una velocidad de giro de 300 rpm. Se observa que el plano del

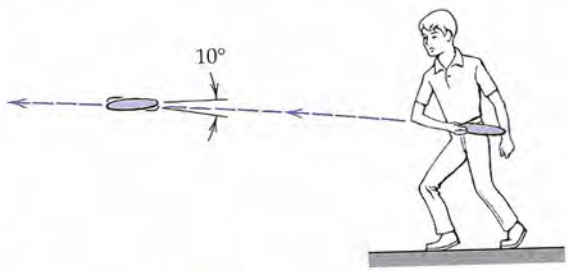


Figura problema 7.125

http://gratislibrospdf.com/

disco se balancea describiendo un ángulo total de 10°. Calcular el período τ del balanceo e indicar si la precesión es directa o retrógrada.

Resp. $\tau = 0{,}0996$ s, retrógrada

7.126 En la figura se representa una pelota de fútbol americano en tres configuraciones de vuelo comunes. El caso (*a*) corresponde a un lanzamiento perfecto en pase con efecto espiral y una velocidad de giro de 120 rpm. El caso (*b*) es un pase espiral bamboleante también con una velocidad de giro de 120 rpm en torno a su propio eje, pero con éste bamboleándose un ángulo total de 20°. El caso (*c*) es un tiro libre de lado a lado con una velocidad de rotación de 120 rpm. Especificar para cada caso los valores de p, θ, β y $\dot{\psi}$ definidos en este apartado. El momento de inercia del balón respecto a su eje mayor es 0,3 del momento de inercia respecto al eje de simetría transversal.

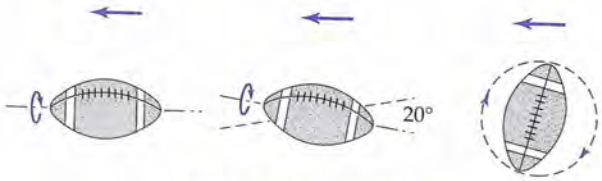


Figura problema 7.126

7.127 La cápsula espacial de la figura es simétrica respecto a su eje z y respecto a ese eje tiene un radio de giro de 720 mm. Los radios de giro respecto a los ejes x e y en el centro de masa valen ambos 540 mm. Cuando se mueve en el espacio, el eje z genera un cono con un ángulo total en el vértice de 4° en su rotación alrededor del eje del momento cinético total. Si la cápsula tiene una velocidad de giro $\dot{\phi}$ respecto al eje z de 1,5 rad/s, calcular el período τ de cada precesión. ¿Tiene el vector de rotación el sentido positivo o negativo del eje z?

Resp. $\tau = 1{,}831$ s, sentido negativo.

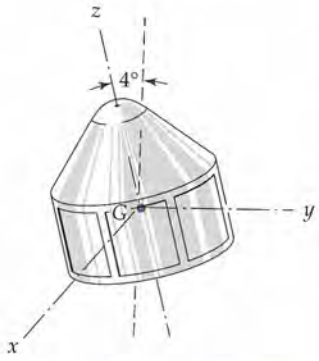


Figura problema 7.127

7.128 La caja rectangular de sección cuadrada, paredes finas y extremos abiertos gira en el espacio, tal como se representa, en torno a su eje longitudinal. Si éste tiene un leve movimiento de balanceo, ¿para qué valores del cociente l/b resultará una precesión directa o una precesión retrógrada?

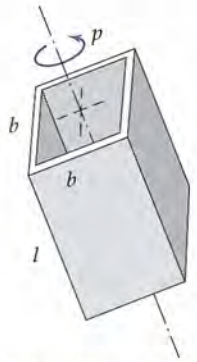


Figura problema 7.128

7.129 La hélice de avión de dos palas tiene una velocidad angular $\dot{\phi}$ alrededor del eje z de su árbol. El avión se encuentra haciendo un viraje hacia la izquierda del piloto, de tal modo que el avión y la hélice tienen una velocidad angular constante (de precesión) $\dot{\psi}$ alrededor de un eje vertical. Hallar, en función de la posición angular ϕ de la hélice, las componentes x, y y z del momento que sobre la misma ejerce su árbol. Los momentos de inercia respecto a los ejes x, y y z son I_{xx}, 0 e I_{zz}, respectivamente. (*Sugerencia*: Emplear la ecuación 7.20 con los ejes x-y-z fijos a la hélice.)

Resp. $M_x = (I_{xx} + I_{zz})\dot{\psi}\dot{\phi}\,\text{sen}\,\phi$

$M_y = (I_{zz} - I_{xx})\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\phi$

$M_z = \frac{1}{2}I_{xx}\dot{\psi}^2\,\text{sen}\,2\phi$

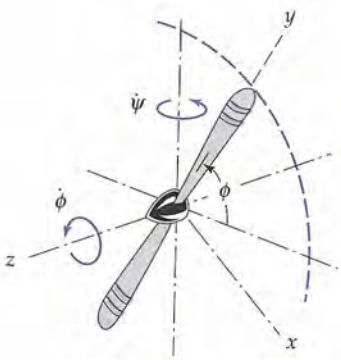


Figura problema 7.129

http://gratislibrospdf.com/

7.130 La barra esbelta uniforme de masa m y longitud l está montada por su centro en el eje A-A, alrededor del cual gira con una velocidad constante $\dot{\phi} = p$. Simultáneamente, la horquilla se hace girar alrededor del eje x con una velocidad angular constante ω_0. Hallar, en función de ϕ, el módulo del momento M necesario para mantener la velocidad constante ω_0. (*Indicación*: Aplicar la ecuación 7.19 para obtener la componente x de M.)

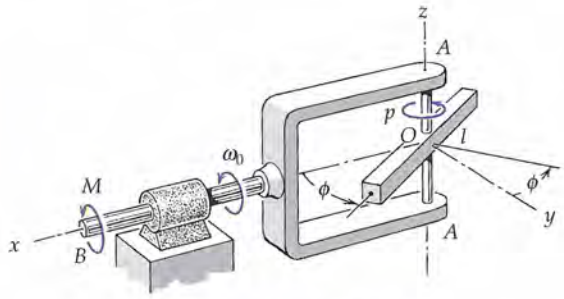


Figura problema 7.130

7.131 Supongamos que el rotor de la figura 7.18 posea una velocidad de giro de 3600 rpm y que esté ejecutando un movimiento de precesión estacionaria alrededor del eje Z bajo un ángulo constante $\theta = 30°$. Además, $\bar{r} = 200$ mm, $k = 150$ mm y el momento de inercia respecto al eje x es cinco veces el momento de inercia respecto al eje de rotación. Empleando la ecuación 7.25, calcular la precesión $\dot{\psi} = \Omega$ y obtener en buena aproximación el error porcentual e en el valor hallado.

Resp. $\dot{\psi} = 0{,}231$ rad/s, $e = 0{,}21\%$ por defecto

7.132 El cuerpo del motor eléctrico pivota libremente sobre el eje horizontal x que pasa por el centro de masa G del rotor. Si el motor gira con una velocidad constante $\dot{\phi} = p$, hallar la aceleración angular $\ddot{\psi}$ que resultará de aplicar el momento M al árbol vertical, siendo $\dot{\gamma} = \dot{\psi} = 0$. Las masas del soporte y del cuerpo se consideran despreciables comparadas con la masa m del rotor. El radio de giro de éste respecto al eje z es k_z y respecto al eje x es k_x.

$$\textit{Resp. } \ddot{\psi} = \frac{M/m}{k_x^2 \cos^2 \gamma + k_x^2 \operatorname{sen}^2 \gamma}$$

7.133 El satélite explorador de la Tierra describe una órbita circular de período τ. Su velocidad angular en torno al eje y, o eje de cabeceo, es $\omega = 2\pi/\tau$ y nula en torno a los ejes x y z. El eje x del satélite apunta siempre hacia el centro de la Tierra. El ingenio dispone de un sistema de mando de orientación compuesto de las tres ruedas representadas, cada una de las cuales puede ser accionada por un motor independiente. En el instante $t = 0$ la velocidad angular Ω_z de la rueda z relativa al satélite es Ω_0 y, en ese mismo instante, las ruedas x e y están en reposo relativo al satélite. Hallar los momentos M_x, M_y y M_z de los pares de fuerzas axiales que deben ejercer los motores sobre los árboles de sus respectivas ruedas para que la velocidad angular ω del satélite permanezca constante. El momento de inercia de cada rueda respecto a su eje es I. Las velocidades de las ruedas de reacción x y z son funciones armónicas del tiempo con período igual al de la órbita. Representar gráficamente, en función del tiempo, durante un período orbital, las velocidades relativas Ω_x, Ω_y y Ω_z de las ruedas. (*Indicación*: El momento del par para acelerar la rueda x es igual a la reacción del momento giroscópico sobre la rueda z y viceversa.)

$$\textit{Resp. } M_x = -I\omega\Omega_0 \cos \omega t$$
$$M_y = 0$$
$$M_z = -I\omega\Omega_0 \operatorname{sen} \omega t$$

Figura problema 7.132

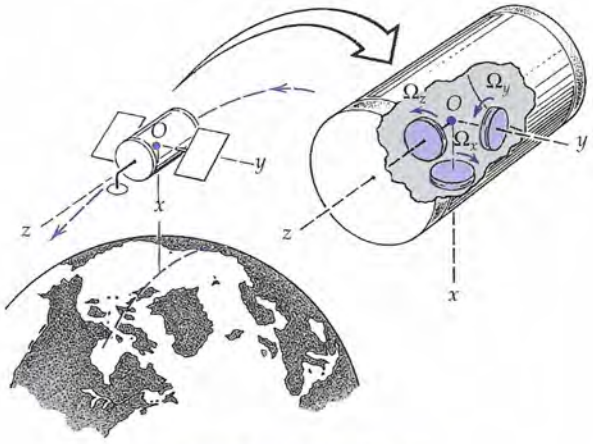


Figura problema 7.133

http://gratislibrospdf.com/

▶ **7.134** La ecuación 7.27, de segundo grado en $\dot{\psi}$, describe la precesión uniforme de un cuerpo de simetría axial. Con $\Sigma M_x = M$, hallar las dos raíces $\dot{\psi}_1$ y $\dot{\psi}_2$ para valores grandes de $\dot{\phi}$. Expresar primero la solución en la forma general $\dot{\psi} = [\,](1 \pm \sqrt{1 - \{\ \}}\,)$. Seguidamente desarrollar el radical en serie convergente reteniendo únicamente los dos primeros términos. Comparar $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_{(-)}$ con la precesión deducida para el rotor de la figura 7.18 en la primera parte del apartado. La raíz $\dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_{(+)}$ representa una precesión rápida que se presenta a un nivel energético más alto difícilmente conseguible experimentalmente.

Resp. $\dot{\psi}_1 = \dfrac{M}{Ip \operatorname{sen} \theta}$, $\dot{\psi}_2 = \dfrac{Ip}{(I_0 - I)\cos\theta}$

donde $p^2 > \dfrac{4}{I^2} M(I_0 - I) \cot\theta$

▶ **7.135** Un proyectil que surca la atmósfera con una velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ que forma un ángulo pequeño θ con su eje geométrico está sometido a una fuerza aerodinámica resultante **R** de sentido, tal como se muestra, esencialmente opuesto al de $\bar{\mathbf{v}}$. Si **R** pasa por un punto C levemente adelantado respecto al centro de masa G, hallar la mínima velocidad de giro p para la cual el proyectil estará estabilizado en rotación con $\dot{\theta} = 0$. El momento de inercia respecto al eje de rotación es I y respecto a un eje transversal que pase por G es I_0. (*Indicación*: Hallar M_x y aplicarlo en la ecución 7.27. Expresar el resultado en forma de ecuación de segundo grado en $\dot{\psi}$ y hallar el valor mínimo de p para el cual es positivo el radicando.)

Resp. $p_{\min} = \dfrac{2}{I}\sqrt{R\bar{r}(I_0 - I)\cos\theta}$

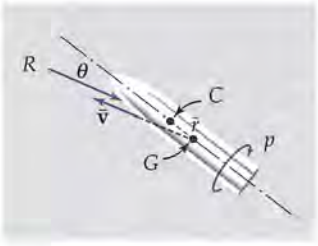


Figura problema 7.135

▶ **7.136** El disco macizo de masa m y poco espesor rota libremente sobre su árbol con la velocidad p. Si el conjunto se abandona en la posición vertical $\theta = 0$, con $\dot{\theta} = 0$, hallar las componentes horizontales de las fuerzas A y B que los respectivos cojinetes ejercen sobre el árbol horizontal cuando el sistema pasa por la posición $\theta = \pi/2$. Despreciar la masa de los dos árboles comparada con m y los rozamientos. Resolver empleando las ecuaciones de momentos adecuadas.

Resp. $A_z = -\dfrac{m\dot{\theta}}{2}\left(\dfrac{r^2}{2b}p + l\dot{\theta}\right)$

$B_z = \dfrac{m\dot{\theta}}{2}\left(\dfrac{r^2}{2b}p - l\dot{\theta}\right)$

donde $\dot{\theta} = 2\sqrt{\dfrac{2gl}{r^2 + 4l^2}}$

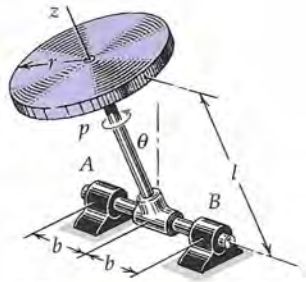


Figura problema 7.136

▶ **7.137** Deducir la ecuación 7.24 relacionando las fuerzas con las aceleraciones en un elemento diferencial del anillo delgado de masa m. El anillo está animado de una velocidad angular constante p en torno al eje z y recibe una velocidad angular adicional constante Ω en torno al eje y mediante la aplicación de un par externo de momento M (no representado). (*Indicación*: La aceleración del elemento en la dirección z se debe (*a*) a la variación del valor de la componente de su velocidad en esa dirección a causa de Ω y (*b*) a la variación de sentido de la componente x de su velocidad.)

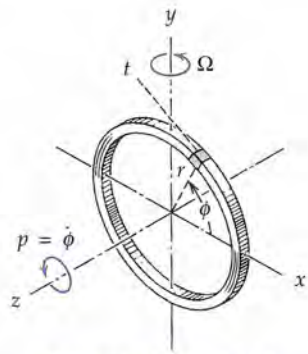


Figura problema 7.137

▶ **7.138** En la figura se representan los elementos de un compás giroscópico cuyo rotor, en una latitud norte γ en la superficie terrestre, está montado en una suspensión cardan que puede girar libremente en torno al eje vertical fijo y. Por tanto, el rotor es capaz de rotar en el plano horizontal x-z, rotación medida por el ángulo β con la dirección norte. Se supone que

http://gratislibrospdf.com/

el giroscopio gira con una velocidad p y que sus momentos de inercia respecto al eje de rotación y al eje transversal que pasa por G son, respectivamente, I e I_0. Demostrar que el eje del giroscopio oscila en torno a la dirección norte de acuerdo con la ecuación $\ddot{\beta} + K^2 b = 0$, donde $K^2 = I\omega_0 p \cos\gamma / I_0$ y que el período de esas oscilaciones respecto al norte para valores pequeños de β, es $\tau = 2\pi\sqrt{I_0/(I\omega_0 p \cos\gamma)}$. (*Indicación*: Las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ de los ejes en función de la velocidad angular ω_0 de la Tierra son

$$\Omega_x = -\omega_0 \cos\gamma \operatorname{sen}\beta$$

$$\Omega_y = \omega_0 \operatorname{sen}\gamma + \dot{\beta}$$

$$\Omega_z = \omega_0 \cos\gamma \cos\beta$$

que pueden emplearse en la componente y de las ecuaciones de momentos 7.19 para determinar β en función del tiempo. Obsérvese que el cuadrado de la velocidad angular ω_0 de la Tierra es pequeño y puede despreciarse frente al producto $\omega_0 p$.)

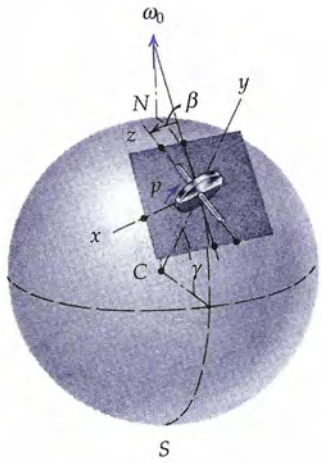
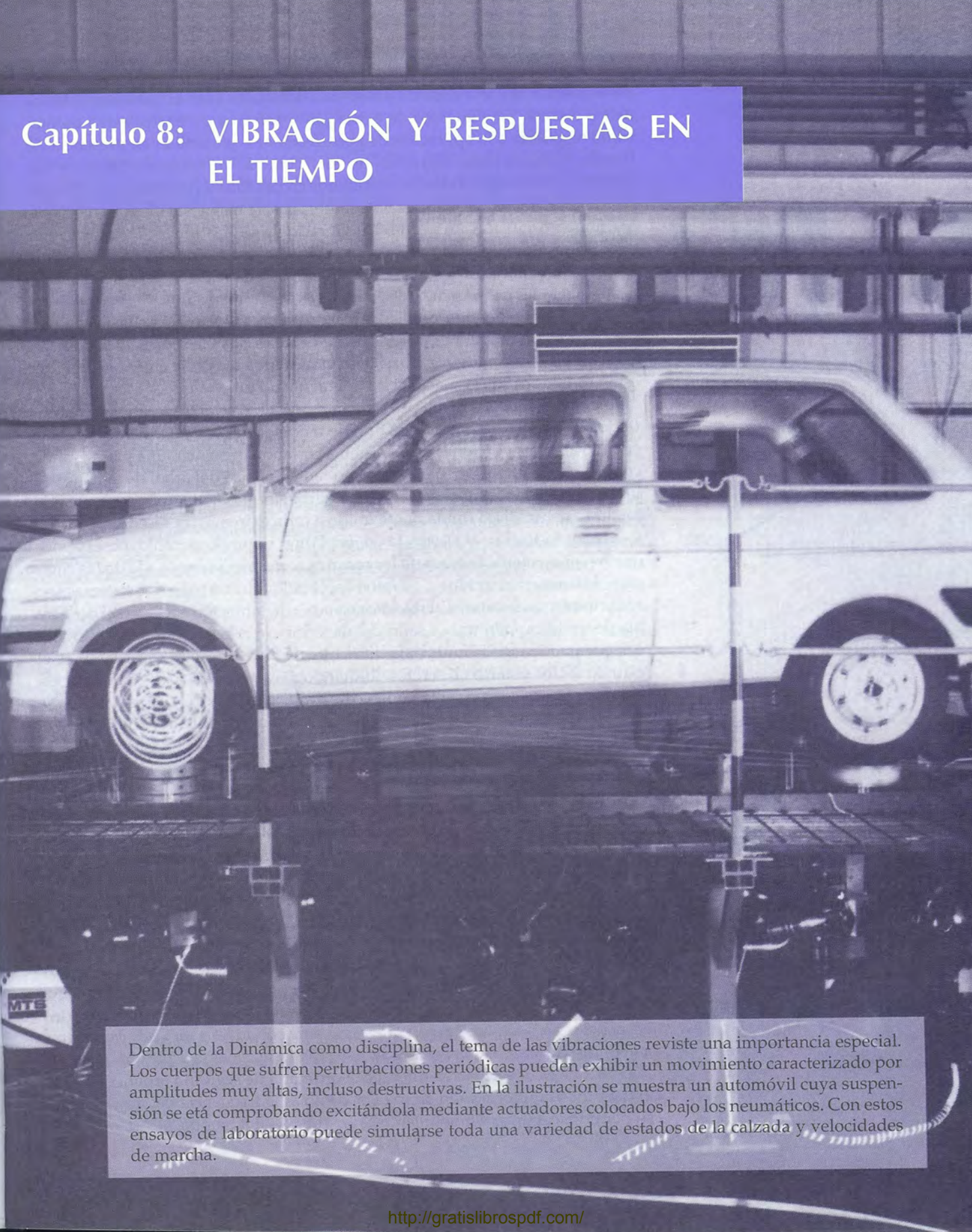


Figura problema 7.138

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

Capítulo 8: VIBRACIÓN Y RESPUESTAS EN EL TIEMPO



Dentro de la Dinámica como disciplina, el tema de las vibraciones reviste una importancia especial. Los cuerpos que sufren perturbaciones periódicas pueden exhibir un movimiento caracterizado por amplitudes muy altas, incluso destructivas. En la ilustración se muestra un automóvil cuya suspensión se etá comprobando excitándola mediante actuadores colocados bajo los neumáticos. Con estos ensayos de laboratorio puede simularse toda una variedad de estados de la calzada y velocidades de marcha.

http://gratislibrospdf.com/

8.1 INTRODUCCIÓN

En Dinámica hay una clase de problemas especiales muy importantes relacionados con los movimientos de traslación y rotación de cuerpos que oscilan como respuesta a la aplicación de perturbaciones que actúan en presencia de fuerzas restauradoras. Ejemplos de esta clase de problemas dinámicos los constituyen la respuesta de las estructuras civiles a los terremotos, las vibraciones de las máquinas rotatorias no equilibradas, la respuesta de una cuerda de instrumento musical punteada, las vibraciones de las líneas de transmisión producidas por el viento y el flameo de las alas de los aviones. En numerosos casos, se hace necesario reducir unos niveles de vibración excesivos a causa de las limitaciones de los materiales o por factores humanos.

En el estudio de todo problema real, el sistema objeto del análisis hay que asimilarlo a un modelo físico. Frecuentemente es posible representar un *sistema continuo* o *de parámetros distribuidos* (aquel cuya masa y elementos elásticos están repartidos en el espacio físico) mediante un *modelo discreto* o *de parámetros concentrados* (aquel cuya masa y elementos elásticos están separados y concentrados). La construcción de este tipo de modelos es particularmente deseable cuando algunas porciones de un sistema continuo presentan una masa grande con relación a otras. Por ejemplo, como modelo físico del árbol de la hélice de un barco se adopta muchas veces una barra sin masa, aunque resistente a la torsión, con un disco rígidamente unido a cada extremo, representado uno de los discos la turbina y el otro la hélice. Como segundo ejemplo, observemos que frecuentemente la masa de los resortes se desprecia frente a la de los cuerpos a los que están unidos. Conviene hacer notar que no todos los sistemas son reducibles a un sistema discreto. Por ejemplo, la vibración transversal de la tabla de un trampolín tras el salto del nadador es un problema de vibraciones con parámetros distribuidos algo dificultoso. En este capítulo iniciaremos el estudio de los sistemas discretos, limitándonos a aquellos cuya configuración puede definirse con una sola variable de desplazamiento. De estos sistemas se dice que poseen *un grado de libertad*. Un estudio más detallado, que incluya el análisis de sistemas de dos o más grados de libertad y sistemas continuos, el lector deberá buscarlo en alguno de los numerosos textos dedicados exclusivamente al tema de las vibraciones.

Este capítulo 8 está dividido en cuatro apartados. En el apartado 8.2 se trata de la oscilación libre del punto material y en el 8.3 se presenta la oscilación forzada del punto material. Cada uno de estos apartados está subdividido en dos, para tratar del movimiento no amortiguado y del movimiento amortiguado. En el apartado 8.4 se estudia la oscilación de los cuerpos rígidos. Por último, en el apartado 8.5 se presenta la resolución de problemas de oscilaciones por métodos energéticos. El estudio de este capítulo se verá muy facilitado teniendo en cuenta que el tema de las oscilaciones es una aplicación directa de los fundamentos de Cinética desarrollados en los capítulos 3 y 6. Concretamente, la ecuación del movimiento se obtiene sin dificultades especiales aplicando las ecuaciones de la Dinámica a un diagrama para sólido libre *dibujado para un valor positivo cualquiera de la variable de desplazamiento*. De esta ecuación de movimiento, que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, se puede extraer toda la información de interés, como es la frecuencia del movimiento, su período o el propio movimiento como función del tiempo.

http://gratislibrospdf.com/

Cuando un cuerpo sujeto a un resorte se aparta de su posición de equilibrio ejecuta, como consecuencia, un movimiento que recibe el nombre de *oscilación libre* si sobre él no actúan fuerzas externas. En la realidad, existe siempre alguna fuerza retardadora o amortiguadora que tiende a reducir el movimiento. Las fuerzas amortiguadoras más comunes son las debidas al rozamiento mecánico y fluido. En la parte (*a*) se considera el caso ideal en que las fuerzas amortiguadoras son lo bastante pequeñas para que puedan despreciarse. En la parte (*b*) se trata el caso en que el amortiguamiento es apreciable y hay que tenerlo en cuenta.

(a) Oscilaciones libres no amortiguadas. Consideremos para empezar la oscilación horizontal del sencillo sistema de una masa con resorte, con ausencia de rozamientos, de la figura 8.1*a*. Adviértase que la variable x designa el desplazamiento, llamado también *elongación*, de la masa a partir de la posición de equilibrio, la cual, para este sistema, es asimismo la posición de deformación nula del resorte. En la figura 8.1*b* se representa gráficamente, para los diferentes tipos de resorte, la fuerza F_s necesaria para deformar el resorte, en función de la deformación. Aunque en algunas aplicaciones se emplean resortes alineales, tanto blandos como duros, aquí vamos a limitar nuestra atención a los resortes lineales. Estos resortes ejercen una fuerza recuperadora sobre la masa que vale kx, es decir, cuando la masa se desplaza hacia la derecha, la fuerza del resorte está dirigida hacia la izquierda y viceversa. Hay que poner atención en distinguir perfectamente entre las fuerzas de módulo F_s que deben aplicarse a ambos extremos del resorte sin masa para producir en él una tracción o una compresión y la fuerza $F = -kx$, de igual módulo, que el resorte ejerce sobre la masa. La constante k se conoce como *constante del resorte, constante recuperadora* o *rigidez* y se expresa en N/m.

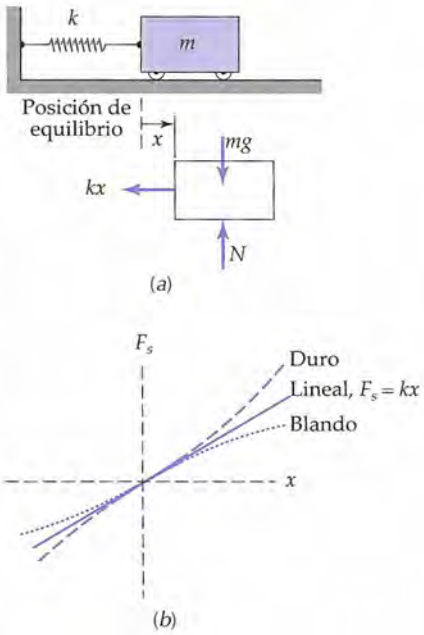


Figura 8.1

La ecuación del movimiento del cuerpo de la figura 8.1*a* se obtiene dibujando su diagrama para sólido libre y aplicando a éste la segunda ley de Newton en la forma $\Sigma F_x = m\ddot{x}$, con lo cual

$$-kx = m\ddot{x} \qquad \text{o sea} \qquad m\ddot{x} + kx = 0 \tag{8.1}$$

La oscilación de una masa sometida a una fuerza restauradora lineal cuando queda descrita por una ecuación como ésta se dice que es un *movimiento armónico simple* y se caracteriza por ser su aceleración proporcional y de signo contrario al desplazamiento o elongación. Normalmente la ecuación 8.1 se escribe

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{8.2}$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \tag{8.3}$$

es una sustitución práctica y conveniente cuyo significado físico se aclarará en breve.

Dado que se prevé un movimiento oscilatorio, buscaremos una solución en la que x sea una función periódica del tiempo t. Así pues, es lógico que probemos con

$$x = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t \tag{8.4}$$

http://gratislibrospdf.com/

o bien con

$$x = C \operatorname{sen}(\omega_n t + \psi) \tag{8.5}$$

Al aplicar directamente estas expresiones en la ecuación 8.2 se comprueba que ambas son válidas como solución. Las constantes A y B, o C y ψ, se determinan mediante las condiciones iniciales, es decir, conociendo la elongación inicial x_0 y la velocidad inicial $\dot{x}_0$ de la masa. Por ejemplo, si operamos con la solución de la forma de la ecuación 8.4 y evaluamos x y $\dot{x}$ haciendo $t = 0$, obtenemos

$$x_0 = A \qquad \text{y} \qquad \dot{x}_0 = B\omega_n$$

Llevando estos valores de A y B a 8.4 queda

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t \tag{8.6}$$

Las constantes C y ψ de la ecuación 8.5 pueden determinarse en función de las condiciones iniciales dadas de una manera similar. Particularizando la ecuación 8.5 y su primera derivada temporal en el instante $t = 0$, resulta

$$x_0 = C \operatorname{sen} \psi \qquad \text{y} \qquad \dot{x}_0 = C\omega_n \cos \psi$$

Despejando C y ψ se obtiene

$$C = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega_n)^2} \qquad \psi = \operatorname{arctg}(x_0\omega_n/\dot{x}_0)$$

Aplicando estos valores en la ecuación 8.5 queda

$$x = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega_n)^2} \operatorname{sen}[\omega_n t + \operatorname{arctg}(x_0\omega_n/\dot{x}_0)] \tag{8.7}$$

Las ecuaciones 8.6 y 8.7 representan dos expresiones matemáticas diferentes del mismo movimiento dependiente del tiempo. Obsérvese que $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\psi = \operatorname{arctg}(A/B)$.

En la figura 8.2 se muestra la representación gráfica habitual de este movimiento. En ella, x es la proyección sobre un eje vertical de un vector rotatorio de longitud C. Este vector rota a la velocidad angular constante $\omega_n = \sqrt{k/m}$,

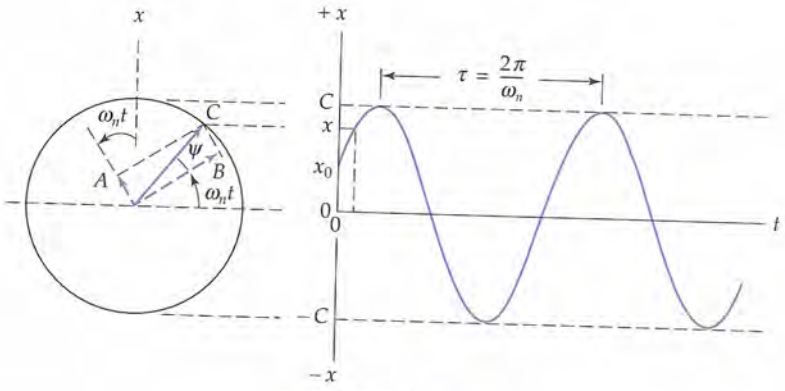


Figura 8.2

http://gratislibrospdf.com/

conocida como *pulsación natural*, o *pulsación propia*, que se mide en radianes por segundo. El número de ciclos completos por unidad de tiempo es la *frecuencia natural*, o *frecuencia propia*, $f_n = \omega_n / 2\pi$ y se expresa en hertz (1 hertz (Hz) = 1 ciclo por segundo). El tiempo que dura un ciclo de movimiento completo (una vuelta del vector de referencia) es el *período* del movimiento y está dado por $\tau = 1/f_n = 2\pi/\omega_n$. Se ve asimismo en la figura que x es la suma de las proyecciones sobre el eje vertical de dos vectores perpendiculares de módulos A y B y cuyo vector suma es precisamente un vector de módulo C que es la *amplitud*. Los vectores de módulos A, B y C giran a la vez con una velocidad angular constante ω_n. Así pues, ya hemos visto que $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ y que $\psi = \text{arctg}\,(A/B)$.

Como observación adicional acerca de las oscilaciones libres de un punto material, adviértase que, si el sistema de la figura 8.1*a* recibe una rotación de 90° en sentido horario para convertirse en el sistema de la figura 8.3, cuyo movimiento es vertical y no horizontal, la ecuación del movimiento no se altera (y por tanto tampoco las demás propiedades) si la elongación x continuamos definiéndola como el desplazamiento desde la posición de equilibrio. En este caso la posición de equilibrio corresponde a un estado del resorte en que éste presenta una deformación δ_{st} no nula. Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama para sólido libre de la figura 8.3

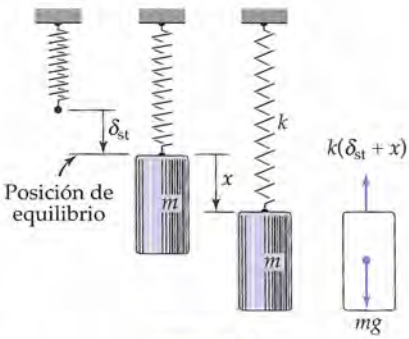


Figura 8.3

$$-k(\delta_{st} + x) + mg = m\ddot{x}$$

Entonces, como en la posición de equilibrio es $x = 0$, la suma de las fuerzas debe ser cero, de modo que

$$-k\delta_{st} + mg = 0$$

Vemos así que las dos fuerzas $-k\delta_{st}$ y mg que aparecen en el primer miembro de la ecuación del movimiento se anulan, quedando

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

que es igual a la ecuación 8.1. La consecuencia aquí es que estableciendo el origen de la elongación en la posición de equilibrio y no en la de deformación del resorte nula, es posible ignorar las fuerzas iguales y opuestas asociadas al estado de equilibrio.[1]

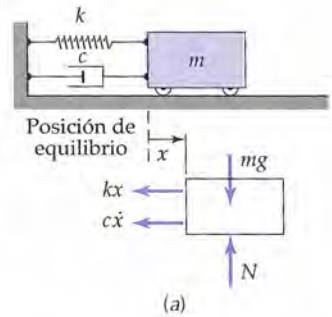


Figura 8.4

(b) Oscilaciones libres amortiguadas. Todos los sistemas mecánicos poseen un cierto grado de rozamiento inherente a los mismos, cuya existencia implica consumo de energía mecánica. Estas fuerzas consumidoras precisan de unos modelos matemáticos que suelen ser complicados. El amortiguador viscoso es un dispositivo que se instala intencionadamente en los sistemas al objeto de limitar o retardar sus vibraciones. Consiste en un cilindro lleno de un fluido viscoso y un pistón con orificios u otro tipo de comunicación a través de los cuales el fluido puede pasar de uno a otro lado del pistón. Los amortiguadores viscosos sencillos se disponen como se esquematiza en la figura 8.4*a* y ejercen una fuerza F_d cuya intensidad es proporcional a la velocidad de la masa, tal como se ilustra en la figura 8.4*b*. La constante de proporcionalidad c se conoce como *coeficiente de amortiguamiento viscoso* y se mide en N·s/m. El sentido de la fuerza

[1] En el análisis de los sistemas no lineales hay que incluir todas las fuerzas, incluso las estáticas asociadas al estado de equilibrio.

http://gratislibrospdf.com/

amortiguadora aplicado a la masa es opuesto al de la velocidad de ésta, es decir, esa fuerza se expresa por $-c\dot{x}$.

Los amortiguadores viscosos con válvulas unidireccionales internas de acción independiente del caudal pueden tener coeficientes de amortiguamiento diferentes según que trabajen a tracción o a compresión; es asimismo posible que sus características sean alineales: Nuestra atención queda limitada al amortiguador lineal simple.

La ecuación del movimiento del cuerpo sometido a amortiguamiento puede deducirse del diagrama para sólido libre de la figura 8.4*a*. Aplicando a éste la segunda ley de Newton resulta

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \qquad \text{o sea} \qquad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{8.8}$$

Además de la sustitución de $\sqrt{k/m}$ por ω_n resulta práctico, por razones que en seguida se harán evidentes, introducir la combinación de constantes

$$\zeta = c/(2m\omega_n)$$

La cantidad ζ recibe el nombre de *índice de amortiguamiento* y constituye una medida de la rigurosidad del amortiguamiento. Recomendamos al lector que compruebe que ζ es adimensional. La ecuación 8.8 puede ahora escribirse

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n{}^2x = 0 \tag{8.9}$$

Para resolver esta ecuación ensayamos soluciones de la forma

$$x = Ae^{\lambda t}$$

Sustituyendo en 8.9 resulta la ecuación característica

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n{}^2 = 0$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = \omega_n(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \qquad \lambda_2 = \omega_n(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

Por superposición la solución general es

$$\begin{aligned} x &= A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t} \\ &= A_1e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} + A_2e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} \end{aligned} \tag{8.10}$$

Como $0 \le \zeta \le \infty$, el radicando $(\zeta^2 - 1)$ puede ser positivo, negativo e incluso nulo, con lo que pueden darse las tres categorías siguientes de movimiento amortiguado:

I. $\zeta > 1$ (*sobreamortiguado*). Las raíces λ_1 y λ_2 son números reales negativos y distintos. El movimiento expresado por la ecuación 8.10 decrece de tal manera que x tiende a cero para grandes valores del tiempo t. No hay oscilaciones y, por tanto, tampoco hay un período asociado al movimiento.

http://gratislibrospdf.com/

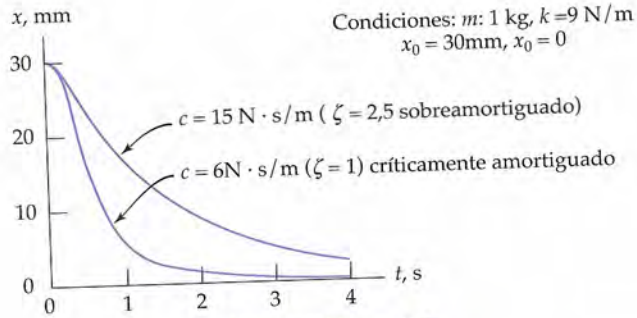


Figura problema 8.5

II. $\zeta = 1$ (*críticamente amortiguado*). Las raíces λ_1 y λ_2 son números reales negativos e iguales ($\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$) y la solución a la ecuación diferencial para el caso particular de raíces iguales está dada por

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t}$$

Aquí también el movimiento decae con x tendiendo a cero, transcurrido un tiempo suficientemente grande, y el movimiento es aperiódico. Un sistema con amortiguamiento crítico, cuando es excitado con una velocidad o un desplazamiento (o ambos), tiende al equilibrio con mayor rapidez que un sistema sobreamortiguado. En la figura 8.5 se ilustran las respuestas de un sistema sobreamortiguado y otro críticamente amortiguado a un desplazamiento inicial x_0 sin velocidad inicial $\dot{x}_0$.

III. $\zeta < 1$ (*subamortiguado*). Teniendo en cuenta que el radicando $(\zeta^2 - 1)$ es negativo y recordando que $e^{(a+b)} = e^a e^b$ podemos volver a escribir como sigue la ecuación 8.10

$$x = \{A_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + A_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t}\}e^{-\zeta\omega_n t}$$

donde $i = \sqrt{-1}$. Conviene ahora emplear un nuevo parámetro ω_d en representación de $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Así,

$$x = \{A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}\}e^{-\zeta\omega_n t}$$

Empleando ahora la fórmula de Euler, $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$, la ecuación anterior podemos escribirla

$$\begin{aligned} x &= \{A_1(\cos \omega_d t + i \operatorname{sen} \omega_d t) + A_2(\cos \omega_d t - i \operatorname{sen} \omega_d t)\}e^{-\zeta\omega_n t} \\ &= \{(A_1 + A_2)\cos \omega_d t + i(A_1 - A_2)\operatorname{sen} \omega_d t\}e^{-\zeta\omega_n t} \\ &= \{A_3 \cos \omega_d t + A_4 \operatorname{sen} \omega_d t\}e^{-\zeta\omega_n t} \end{aligned} \qquad (8.11)$$

http://gratislibrospdf.com/

donde $A_3 = (A_1 + A_2)$ y $A_4 = i(A_1 - A_2)$. Ya hemos visto, con relación a las ecuaciones 8.4 y 8.5, que las sumas de dos armónicos, como los encerrados en los corchetes de la ecuación 8.11, puede sustituirse por una función trigonométrica sencilla que implique un ángulo de fase. Así pues, la ecuación 8.11 podemos escribirla

$$x = \{C \operatorname{sen}(\omega_d t + \psi)\} e^{-\zeta \omega_n t} \tag{8.12}$$

Esta ecuación 8.12 representa una función armónica exponencialmente decreciente como la ilustrada en la figura 8.6 para unos valores numéricos concretos. La pulsación

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

es la llamada *pulsación natural*, o *propia, amortiguada*. El *período amortiguado* está dado por $\tau_d = 2\pi/\omega_d = 2\pi/(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})$.

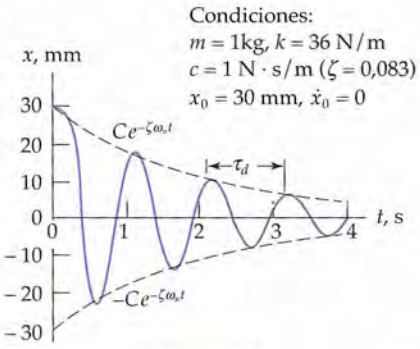


Figura 8.6

Es importante tener muy en cuenta que las expresiones obtenidas para las constantes C y ψ en función de las condiciones iniciales en el caso (*a*) de ausencia de amortiguamiento no son válidas para el caso de amortiguamiento de esta parte (*b*). Para hallar C y ψ, si hay amortiguamiento, debe comenzarse desde el principio, es decir, igualando la expresión 8.12 de la elongación y su primera derivada, ambas particularizadas para $t = 0$, a la elongación x_0 y velocidad $\dot{x}_0$ iniciales, respectivamente.

En el caso de los sistemas no amortiguados, muchas veces hay que determinar experimentalmente el índice de amortiguamiento. La causa suele ser que de otro modo el coeficiente de amortiguamiento viscoso c no puede conocerse bien. Para ello, el sistema se excita con unas condiciones iniciales y se representa gráficamente x en función del tiempo t, tal como se esquematiza en la figura 8.7. Luego, sobre la curva obtenida experimentalmente, se miden dos amplitudes sucesivas x_1 y x_2 y se calcula el cociente

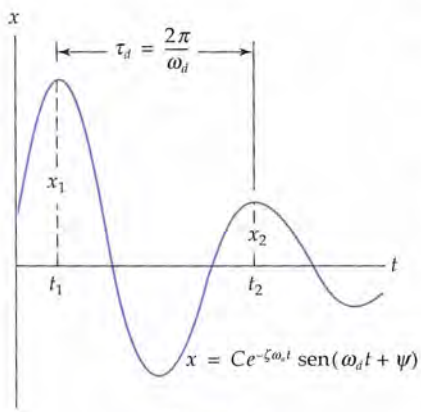


Figura 8.7

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{Ce^{-\zeta\omega_n t_1}}{Ce^{-\zeta\omega_n (t_1 + \tau_d)}} = e^{\zeta\omega_n \tau_d}$$

Por definición, el *decremento logarítmico* es

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \zeta\omega_n \tau_d = \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

De esta expresión se despeja ζ y se obtiene

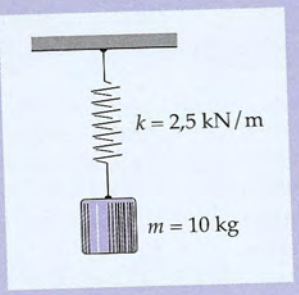
$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

Para un índice de amortiguamiento pequeño es $x_1 \cong x_2$ y $\delta << 1$, por lo que $\zeta \cong \delta/2\pi$. Si los valores de x_1 y x_2 son tan próximos que sea prácticamente imposible distinguirlos experimentalmente, las fórmulas anteriores pueden modificarse para utilizarlas con dos amplitudes separadas n ciclos.

http://gratislibrospdf.com/

Un cuerpo de 10 kg está suspendido de un resorte de constante k = 2,5 kN/m. En el instante t = 0, cuando pasa por la posición de equilibrio estático, está animado de una velocidad descendente de 0,5 m/s. Hallar:

(a) el alargamiento estático δ_{st} del resorte
(b) la pulsación natural (ω_n) y la frecuencia natural (f_n) del sistema
(c) el período τ del sistema
(d) la elongación x en función del tiempo, con x medida desde la posición de equilibrio estático
(e) la velocidad máxima v_{max} que alcanza la masa
(f) la aceleración máxima a_{max} que alcanza la masa



Solución. *(a)* De la ecuación del resorte $F_s = kx$ resulta

(1) $$mg = k\delta_{st} \qquad \delta_{st} = \frac{mg}{k} = \frac{10(9{,}81)}{2500} = 0{,}0392 \text{ m o sea } 39,2 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

(b) $$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2500}{10}} = 15{,}81 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$f_n = (15{,}81)\left(\frac{1}{2\pi}\right) = 2{,}52 \text{ ciclos/s (Hz)} \qquad \textit{Resp.}$$

(c) $$\tau = \frac{1}{f_n} = \frac{1}{2{,}52} = 0{,}397 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

(2) *(d)* De la ecuación 8.6:

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t$$

$$= (0) \cos 15{,}81t + \frac{0{,}5}{15{,}81} \operatorname{sen} 15{,}81t$$

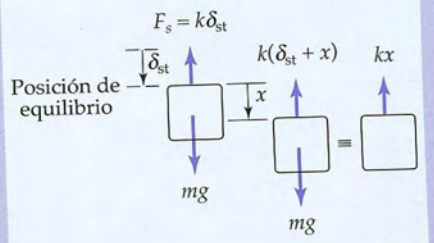
$$= 0{,}0316 \operatorname{sen} 15{,}81t \text{ m o sea } 31{,}6 \operatorname{sen} 15{,}81t \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Como ejercicio, utilicemos ahora la expresión 8.7 para hallar x:

$$x = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega_n)^2} \operatorname{sen}\left[\omega_n t + \operatorname{tg}\left(\frac{x_0\omega_n}{\dot{x}_0}\right)\right]$$

$$= \sqrt{0^2 + \left(\frac{0{,}5}{15{,}81}\right)^2} \operatorname{sen}\left\{15{,}81t + \operatorname{arctg}\left[\frac{(0)(15{,}81)}{0{,}5}\right]\right\}$$

$$= 0{,}0316 \operatorname{sen} 15{,}81t \qquad \textit{Resp.}$$



(1) **Hay que extremar siempre las precauciones en lo referente a las unidades. Tratando con oscilaciones y vibraciones, es muy fácil equivocarse y mezclar milímetros con metros, o ciclos con radianes, y otras parejas de cantidades que intervienen corrientemente en los cálculos.**

(2) **Recuérdese que cuando se toma como referencia la posición de equilibrio estático, la ecuación del movimiento, y por tanto su solución, del presente sistema es igual a la del sistema oscilante horizontal.**

http://gratislibrospdf.com/

(e) La velocidad es $\dot{x} = 15{,}81(0{,}0316)\cos 15{,}81t = 0{,}5\cos 15{,}81t$. Como la función coseno no puede ser mayor que 1 ni menor que –1, la velocidad máxima v_{max} es 0,5 m/s, que en este caso es la velocidad inicial. *Resp.*

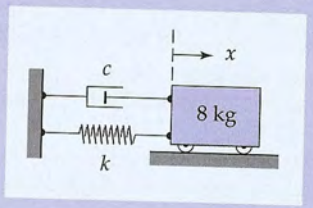
(f) La aceleración es

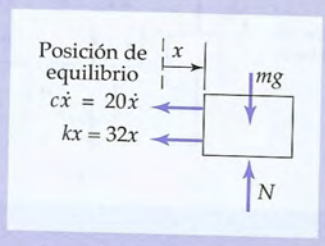
$$\ddot{x} = -15{,}81(0{,}5)\,\text{sen}\,15{,}81t = -7{,}91\,\text{sen}\,15{,}81t$$

La aceleración máxima a_{max} es 7,91 m/s^2. *Resp.*

PROBLEMA TIPO 8.2

El cuerpo de 8 kg se desplaza 0,2 m a la derecha de su posición de equilibrio y se suelta desde el reposo en el instante t = 0. Hallar la elongación en el instante t = 2 segundos. El coeficiente de amortiguamiento viscoso es c = 20 N·s/m y la rigidez del resorte es k = 32 N/m.





Solución. Lo primero es determinar si el sistema está subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado. Para ello, calculamos el índice de amortiguamiento ζ.

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{32/8} = 2\ \text{rad/s} \qquad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{20}{2(8)(2)} = 0{,}625$$

Como $\zeta < 1$ el sistema está subamortiguado. Su pulsación natural amortiguada es $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 2\sqrt{1-(0{,}625)^2} = 1{,}561$ rad/s. El movimiento viene dado por la ecuación 8.12 y es

$$x = Ce^{-\zeta\omega_n t}\,\text{sen}\,(\omega_d t + \psi) = Ce^{-1{,}25t}\,\text{sen}\,(1{,}561t + \psi)$$

La velocidad será, pues,

$$\dot{x} = -1{,}25Ce^{-1{,}25t}\,\text{sen}(1{,}561t + \psi) + 1{,}561Ce^{-1{,}25t}\cos(1{,}561t + \psi)$$

Particularizando las expresiones de la velocidad y la aceleración al instante $t = 0$ resulta

$$x_0 = C\,\text{sen}\,\psi = 0{,}2 \qquad \dot{x}_0 = -1{,}25C\,\text{sen}\,\psi + 1{,}561C\cos\psi = 0$$

Despejando C y ψ de este sistema de dos ecuaciones resulta $C = 0{,}256$ m y $\psi = 0{,}895$ rad. Por tanto, la elongación (en metros) es

$$x = 0{,}256e^{-1{,}25t}\,\text{sen}\,(1{,}561t + 0{,}896)$$

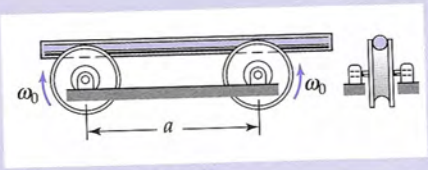
(1) Particularizando al instante $t = 2$ segundos resulta $x_2 = -0{,}0612$ m. *Resp.*

(1) Obsérvese que el coeficiente exponencial $e^{-1{,}25t}$ vale 0,082 para $t = 2$ segundos. De aquí que $\zeta = 0{,}625$ represente un fuerte amortiguamiento, pese a que el movimiento sea oscilatorio.

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMA TIPO 8.3

Las dos poleas fijas giran en sentidos contrarios y son accionadas a la misma velocidad angular ω_0. Sobre ellas y descentrada se coloca, tal como se muestra, una barra redonda. Hallar la frecuencia natural del movimiento de la barra. Entre ésta y las poleas hay un coeficiente de rozamiento cinético μ_c.



Solución. En la figura se representa el diagrama para sólido libre de la barra para un desplazamiento cualquiera x de la misma desde la posición centrada. Las ecuaciones que rigen el comportamiento de la barra son

$$[\Sigma F_x = m\ddot{x}] \qquad \mu_c N_A - \mu_c N_B = m\ddot{x}$$

$$[\Sigma F_y] = 0 \qquad N_A + N_B - mg = 0$$

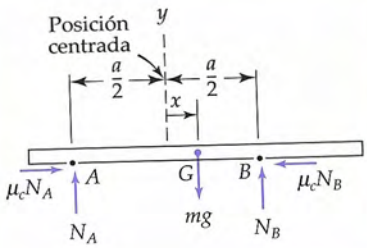
$$[\Sigma M_A = 0] \qquad aN_B - \left(\frac{a}{2} + x\right)mg = 0 \quad (1)$$

Eliminando N_A y N_B entre las dos primeras, resulta

$$\frac{\ddot{x} + 2\mu_c g}{a}x = 0 \quad (2)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la 8.2, por lo que la pulsación natural, en radianes por segundo, será $\omega_n = \sqrt{(2\mu_c g)/a}$ y la frecuencia natural, en ciclos por segundo, será

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(2\mu_c g)/a} \qquad \textit{Resp.}$$



(1) Como la barra es esbelta y no gira, se justifica el empleo de una ecuación de equilibrio de momentos.

(2) Obsérvese que la celeridad angular ω_0 no aparece en la ecuación del movimiento. La causa de ello está en nuestra hipótesis de que la fuerza de rozamiento cinético no depende de la velocidad relativa en la superficie de contacto.

PROBLEMAS

(Salvo que se indique lo contrario, se supondrá que todas las variables de movimiento están referidas a la posición de equilibrio.)

Problemas introductorios— Oscilaciones libres no amortiguadas

8.1 Cuando sobre el plato que está unido al resorte de constante desconocida se coloca un anillo de 3 kg se observa que el descenso estático adicional del plato es 40 mm. Hallar la constante k del resorte en N/m y en kp/cm.

Resp. $k = 736$ N/m
$k = 0{,}750$ kp/cm

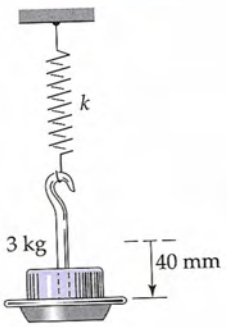


Figura problema 8.1

http://gratislibrospdf.com/

8.2 Hallar la pulsación y la frecuencia naturales del sistema de masa y resorte de la figura en radianes por segundo y en ciclos por segundo (Hz).

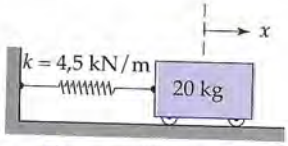


Figura problema 8.2

8.3 Para el sistema del problema 8.2, hallar la elongación x de la masa en función del tiempo si la misma se abandona, en el instante $t = 0$, desde el reposo en una posición situada a 30 mm a la derecha de la posición de equilibrio.

Resp. $x = 30 \cos 15t$ mm

8.4 Para el sistema del problema 8.2, hallar la elongación x de la masa en función del tiempo si la misma se abandona en el instante $t = 0$ en una posición situada a 30 mm a la izquierda de la posición de equilibrio con una velocidad inicial de 120 mm/s hacia la derecha. Hallar la amplitud C del movimiento.

8.5 El émbolo vertical tiene una masa de 2,5 kg y está sujeto entre los dos resortes que se hallan siempre comprimidos. Calcular su frecuencia natural f_n si el mismo se aparta de su posición de equilibrio y se suelta. Se desprecia el rozamiento en la guía.

Resp. $f_n = 7,40$ Hz

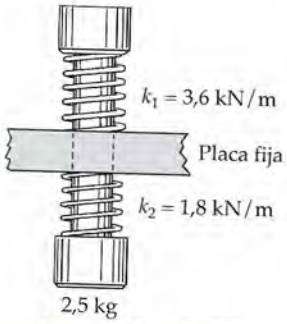


Figura problema 8.5

8.6 Para el sistema de masa y resorte de la figura, hallar el alargamiento estático δ_{st}, el período τ del sistema y la velocidad máxima v_{max} que resultan si el cilindro se desplaza 0,1 m hacia abajo desde su posición de equilibrio y luego se suelta.

8.7 El cilindro del sistema del problema 8.6 se desplaza 0,1 m hacia abajo desde su posición de equilibrio y se suelta en el instante $t = 0$. Hallar la elongación y y la velocidad v cuando $t = 3$ s. ¿Cuánto vale la aceleración máxima?

Resp. $y = 0,0660$ m, $v = 0,451$ m/s, $a_{max} = 3,6$ m/s^2

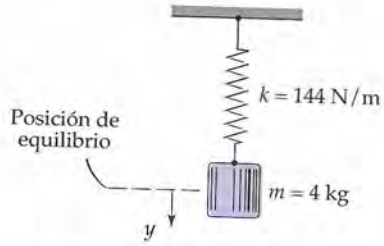


Figura problema 8.6

Problemas representativos— Oscilaciones libres no amortiguadas

8.8 En los dos casos representados sustituir los resortes por un resorte único de constante k (constante equivalente a los dos resortes) que haga oscilar al cuerpo con la misma frecuencia que antes.

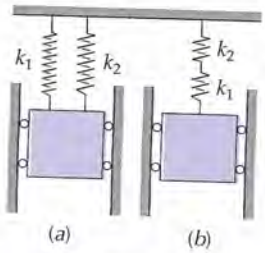


Figura problema 8.8

8.9 Un automóvil viejo, de 1000 kg de masa, se deja caer desde poca altura cuando está siendo trasladado de lugar por una grúa de electroimán. Suponiendo que sus amortiguadores estén ya inservibles, calcular la frecuencia natural f_n en ciclos por segundo (Hz) de las oscilaciones verticales que sobrevienen a consecuencia del choque con el suelo. Cada uno de los cuatro resortes del vehículo tiene una constante de 17,5 kN/m. Como el centro de masa se encuentra equidistante de los puentes y el automóvil está horizontal cuando se deja caer, no existe movimiento de rotación. Formular las hipótesis.

Resp. $f_n = 1,332$ Hz

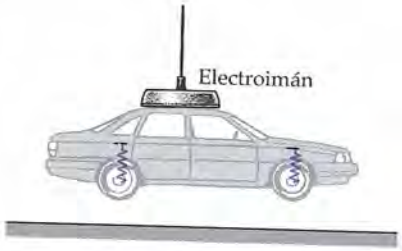


Figura problema 8.9

http://gratislibrospdf.com/

8.10 Si la masa de 100 kg lleva una velocidad descendente de 0,5 m/s al pasar por su posición de equilibrio, calcular el módulo a_{max} de su aceleración máxima. Los resortes tienen cada uno una rigidez $k = 180$ kN/m.

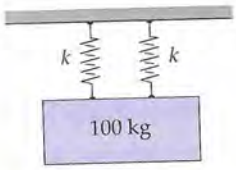


Figura problema 8.10

8.11 Con la hipótesis de ausencia de deslizamiento, hallar la masa m del bloque a colocar encima del carrito de 6 kg para que el período del sistema sea de 0,75 s. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático mínimo μ_e del sistema para el cual el bloque no resbala sobre el carrito cuando éste se aparta 50 mm de su posición de equilibrio y luego se suelta?

Resp. $m = 2{,}55$ kg, $\mu_e = 0{,}358$

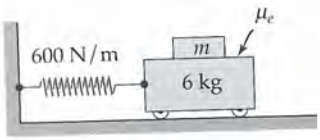


Figura problema 8.11

8.12 Si los dos resortes están sin deformar cuando la masa se halla en la posición central representada, hallar el desplazamiento estático δ_{st} de la misma. ¿Cuál es el período de las oscilaciones en torno a la posición de equilibrio?

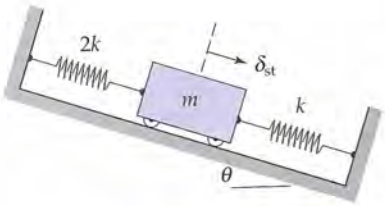


Figura problema 8.12

8.13 Un parachoques de automóvil absorbente de energía tiene, con sus resortes sin deformar, una constante recuperadora equivalente de 525 kN/m. Si el vehículo, de 1200 kg, se aproxima a un muro rígido de gran masa con una celeridad de 8 km/h, hallar (*a*) la velocidad v del automóvil en función del tiempo durante el contacto con el muro, iniciándose ese contacto en el instante $t = 0$, y (*b*) la contracción máxima x_{max} del parachoques.

Resp. (*a*) $v = 2{,}22 \cos 20{,}9t$ m/s,
(*b*) $x_{max} = 106{,}2$ mm

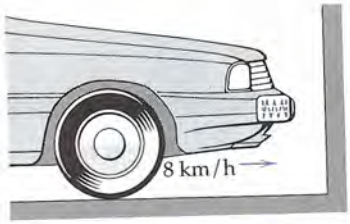


Figura problema 8.13

8.14 Una balanza de resortes clásica registra la fuerza normal que ella ejerce sobre los pies de la persona a la que está pesando. En la situación de movimiento orbital que se da a bordo de la lanzadera espacial no existen tales fuerzas normales. Con lo que sabemos acerca de las oscilaciones, explicar como le sería posible a un(a) astronauta "pesarse" a sí mismo(a).

8.15 Una mujer de 55 kg se halla de pie en el centro de un tablón apoyado por los extremos y produce una flecha de 22 mm en el centro. Si dobla levemente las rodillas al objeto de provocar una vibración vertical, ¿cuál será la frecuencia natural f_n del movimiento? Se supondrá que el tablón responde elásticamente y se despreciará su relativamente pequeña masa.

Resp. $f_n = 3{,}36$ Hz

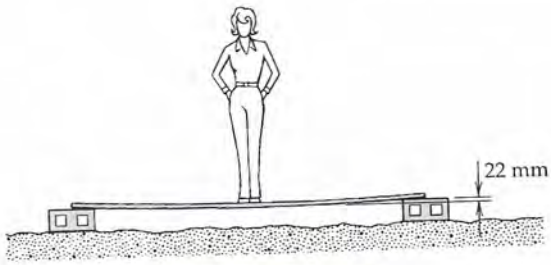


Figura problema 8.15

8.16 El gran cubilete de cemento que cuelga de la grúa mediante un cable elástico tiene una masa de 4000 kg. Cuando se perturba el cubilete, se observa en éste una oscilación vertical de período 0,5 s. ¿Cuál es el desplazamiento estático δ_{st} del cu-

http://gratislibrospdf.com/

bilete? Se desprecia la masa del cable y se supone que la grúa es rígida para la posición entrada de la figura.

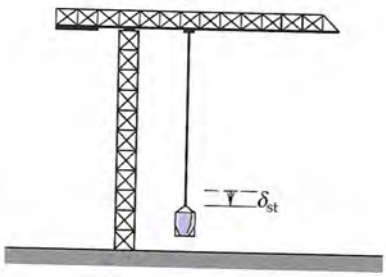


Figura problema 8.16

8.17 Una partícula de masa m está sujeta, tal como se muestra, a dos alambres fuertemente tensos. Hallar la pulsación natural ω_n de las pequeñas oscilaciones verticales del sistema bajo la hipótesis de que la tracción T en ambos alambres se mantiene constante. ¿Es necesario calcular el pequeño desplazamiento estático de la partícula?

Resp. $\omega_n = \sqrt{\dfrac{2T}{ml}}$

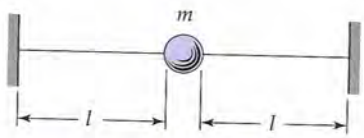


Figura problema 8.17

8.18 Se supone ahora que la partícula del problema 8.17 descansa sobre una superficie horizontal lisa y que oscila a lo largo de una recta equidistante de los puntos de sujeción de los alambres. Se considera ahora que los alambres no sufren una tracción constante, sino que pueden asimilarse a bandas elásticas. La tracción en éstas está dada por $T = k\Delta l$, donde Δl es la variación de longitud de cada banda cuando la partícula se aparta de su posición de equilibrio. Deducir la ecuación alineal del pequeño movimiento del sistema.

8.19 La boya cilíndrica flota en agua salada (densidad, 1030 kg/m^3) y tiene una masa de 800 kg con un centro de masa bajo para que se mantenga estable en la posición vertical. Hallar la frecuencia f_n de sus oscilaciones verticales. Suponer que la superficie del agua permanece tranquila en sus proximidades.

Resp. $f_n = 0{,}301$ Hz

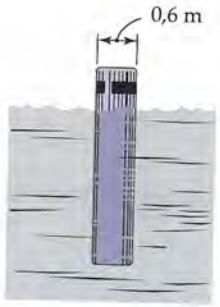


Figura problema 8.19

8.20 Se representa en la figura el modelo de un edificio de un piso. La barra de masa m está soportada por dos columnas livianas elásticas cuyos extremos superior e inferior no pueden rotar. En cada columna, si se aplicara una fuerza F y el momento correspondiente M del modo que se indica, la desviación δ estaría dada por $\delta = PL^3/12EI$, donde L es la longitud real de la columna, E es el módulo de Young e I es el momento de inercia de la superficie de la sección transversal de la columna respecto a su eje neutro. Hallar la frecuencia natural de las oscilaciones horizontales de la barra cuando las columnas se doblan tal como se muestra en la figura.

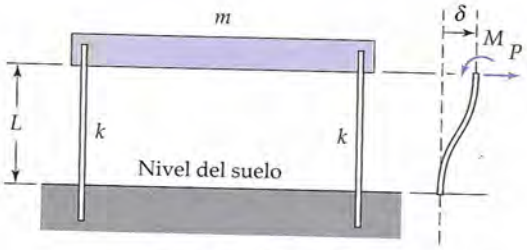


Figura problema 8.20

8.21 Un trozo de masilla de 3 kg se deja caer desde 2 m sobre el bloque inicialmente inmóvil que se apoya en cuatro resortes,

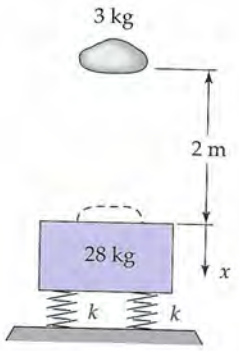


Figura problema 8.21

http://gratislibrospdf.com/

cada uno de los cuales tiene una constante $k = 800$ N/m. Hallar la elongación x en función del tiempo durante la oscilación consiguiente, donde x se mide desde la posición original del bloque representado.

Resp. $x = 9{,}20(1 - \cos 10{,}16t) + 59{,}7 \operatorname{sen} 10{,}16t$ mm

8.22 Calcular la frecuencia natural f_n de las oscilaciones verticales del bloque de 25 kg cuando se pone en movimiento. La rigidez de cada resorte es 1200 N/m. Se desprecian las masas de las poleas.

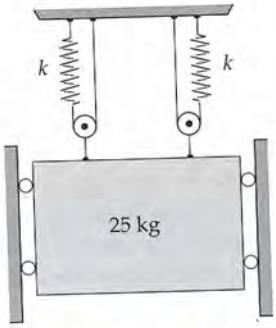


Figura problema 8.22

8.23 La plataforma de la báscula tiene una masa m y está conectada al resorte de rigidez k mediante el sistema de palancas representado. Deducir la ecuación diferencial de las pequeñas oscilaciones verticales de la plataforma y hallar su período τ. Representar por y el desplazamiento vertical de la plataforma y despreciar las masas de las palancas.

Resp. $\ddot{y} + \dfrac{k}{m}\left(\dfrac{c}{b}\right)^4 y = 0$, $\tau = 2\pi\left(\dfrac{b}{c}\right)^2\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

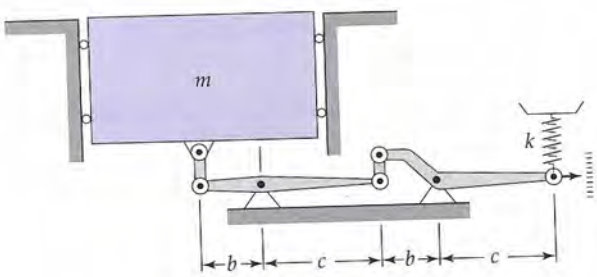


Figura problema 8.23

8.24 Deducir la expresión de la frecuencia f_n de las oscilaciones verticales del cilindro cuando se pone en movimiento. Se desprecian las masas de las pequeñas poleas.

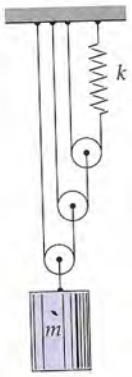


Figura problema 8.24

8.25 Calcular la pulsación natural ω_n del sistema representado. Se desprecian la masa de las poleas y el rozamiento en ellas.

Resp. $\omega_n = \sqrt{\dfrac{4k}{5m}}$

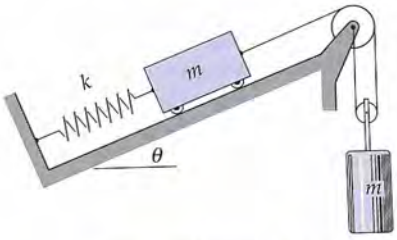


Figura problema 8.25

8.26 Deducir la ecuación diferencial del movimiento del sistema de la figura en función de la variable x_1. La masa de las piezas articuladas es despreciable. Formular la pulsación natural ω_n en rad/s para el caso $k_1 = k_2 = k$ y $m_1 = m_2 = m$. Se supone que en todo el sistema las oscilaciones son pequeñas.

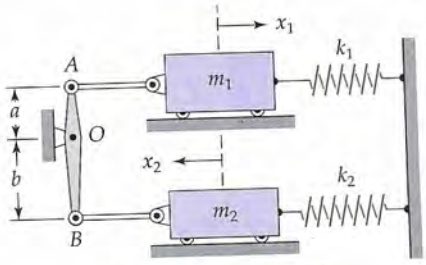


Figura problema 8.26

http://gratislibrospdf.com/

Problemas introductorios—Oscilaciones libres amortiguadas

8.27 Hallar el valor del índice de amortiguamiento ζ del dispositivo sencillo compuesto de masa, amortiguador y resorte representado.

Resp. $\zeta = 0{,}75$

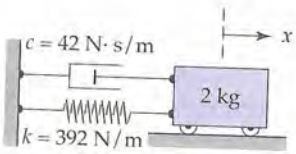


Figura problema 8.27

8.28 El período τ_d de las oscilaciones lineales amortiguadas de una cierta masa de 1 kg es 0,32 s. Si la rigidez del resorte lineal a la que está unida es 850 N/m, calcular el coeficiente de amortiguamiento c.

8.29 A un sistema de masa y resorte inicialmente no amortiguado se le añade un amortiguamiento viscoso. ¿Para qué valor del índice de amortiguamiento ζ será la pulsación natural amortiguada ω_d igual al 75 por ciento de la pulsación natural del sistema original no amortiguado?

Resp. $\zeta = 0{,}436$

8.30 La adición de amortiguamiento a un sistema de masa y resorte no amortiguado hace que el período aumente en un 20 por ciento. Hallar el índice de amortiguamiento ζ.

8.31 Hallar el valor del coeficiente de amortiguamiento viscoso c para el cual es crítico el amortiguamiento del sistema representado.

Resp. $c = 2240$ N · s/m

Figura problema 8.31

Problemas representativos—Oscilaciones libres amortiguadas

8.32 Hallar el valor del coeficiente de amortiguamiento viscoso para el cual el índice de amortiguamiento del sistema vale (*a*) 0,5 y (*b*) 1,5.

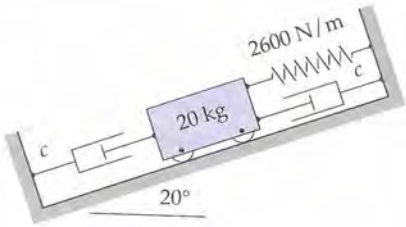


Figura problema 8.32

8.33 Un oscilador armónico lineal de masa 1,10 kg se pone en movimiento bajo amortiguamiento viscoso. Si la frecuencia es 10 Hz y si dos elongaciones sucesivas separadas por un ciclo completo resultan ser 4,65 mm y 4,30 mm, tal como se indica, calcular el coeficiente de amortiguamiento viscoso c.

Resp. $c = 1{,}721$ N · s/m

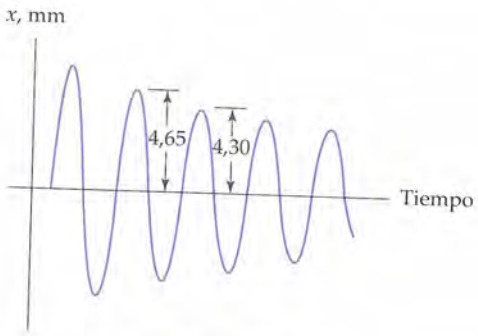


Figura problema 8.33

8.34 Si la amplitud del octavo ciclo de un oscilador lineal con amortiguamiento viscoso es dieciséis veces la del vigésimo ciclo, calcular el índice de amortiguamiento ζ.

8.35 La masa de 2 kg del problema 8.27 se abandona en reposo desde una distancia x_0 a la derecha de la posición de equilibrio. Hallar la elongación x como función del tiempo t, donde $t = 0$ es el instante en que la masa se suelta.

Resp. $x = x_0(\cos 9{,}26t + 1{,}134 \operatorname{sen} 9{,}26t)e^{-10{,}5t}$

8.36 Un sistema amortiguado de masa y resorte se abandona desde el reposo a partir de una posición inicial x_0. Si la amplitud positiva siguiente es $x_0/2$, hallar el índice de amortiguamiento ζ del sistema.

http://gratislibrospdf.com/

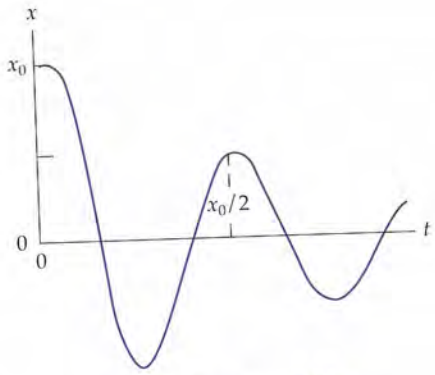


Figura problema 8.36

8.37 Si el cuerpo de masa m de la figura 8.4 está críticamente amortiguado, deducir la expresión de la elongación x medida desde la posición de equilibrio transcurrido un tiempo t después de haberlo soltado estando en reposo desplazado una distancia x_0 de su posición de equilibrio.

$$Resp.\ x = x_0\left(1 + \frac{c}{2m}t\right)e^{-(c/2m)t}$$

8.38 El sistema de la figura se abandona desde el reposo a partir de una posición inicial x_0. Hallar el rebasamiento x_1. Se supone que el movimiento es una traslación en la dirección x.

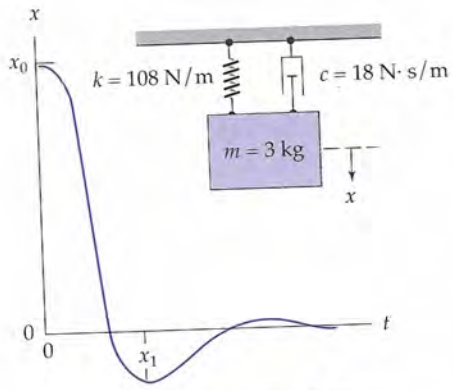


Figura problema 8.38

8.39 La señal procedente de un transductor registra una amplitud decreciente en la oscilación libre de una masa de 4 kg. Calcular la amplitud indicada h, el coeficiente de amortiguamiento c y la rigidez k del apoyo elástico.

Resp. $h = 0{,}075$ mm
$c = 9{,}24$ N·s/m
$k = 115{,}0$ N/m

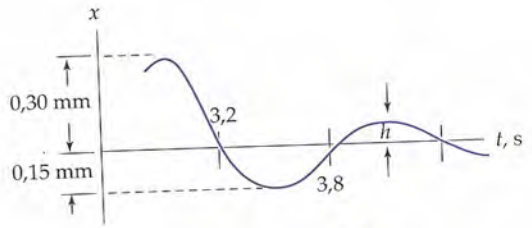


Figura problema 8.39

8.40 Hallar la expresión del decremento logarítmico δ en función de las amplitudes x_1 y x_{n+1} separadas por n ciclos, tal como se muestra en la gráfica de la elongación en función del tiempo.

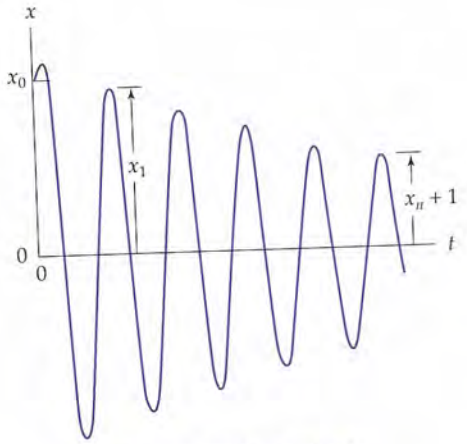


Figura problema 8.40

8.41 La masa del sistema de la figura se abandona desde el reposo en la posición $x_0 = 150$ mm cuando $t = 0$. Hallar la elongación x para $t = 0{,}5$ s si (*a*) $c = 200$ N·s/m y (*b*) $c = 300$ N·s/m.

Resp. (*a*) $x = 110{,}4$ mm,
(*b*) $x = 118{,}0$ mm

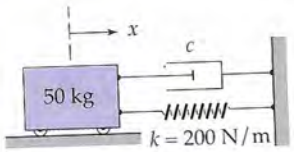


Figura problema 8.41

8.42 El pequeño cañón dispara una bala de 4,5 kg con una velocidad absoluta de 250 m/s que forma una ángulo de 20° con la horizontal. La masa conjunta del cañón y su afuste es de

http://gratislibrospdf.com/

750 kg. Si el mecanismo de retroceso se compone del resorte de constante $k = 27$ kN/m y el amortiguador de coeficiente viscoso $c = 9000$ N·s/m, hallar el retroceso máximo x_{max} del cañón.

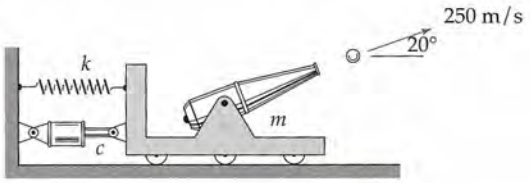


Figura problema 8.42

8.43 La masa de un sistema críticamente amortiguado se suelta en el instante $t = 0$ desde la posición $x_0 > 0$ con una velocidad inicial negativa. Hallar el valor crítico $(\dot{x}_0)_c$ de la velocidad inicial por debajo del cual la masa pasa por su posición de equilibrio.

$$Resp.\ (\dot{x}_0)_c = -\omega_n x_0$$

8.44 Hallar el índice de amortiguamiento ζ del sistema representado. Se desprecian las masas de las poleas y el rozamiento en las mismas y se supone que el cable está siempre tenso.

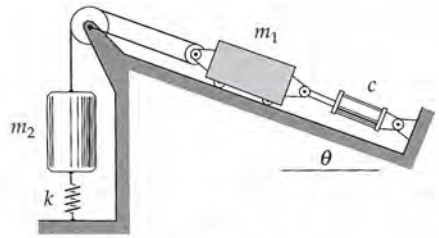


Figura problema 8.44

8.45 Para el sistema representado escribir su ecuación de movimiento en función de la variable x. Hallar la expresión del índice de amortiguamiento ζ en función de las constantes del sistema indicadas. Despreciar la masa de la palanca AB y suponer que se efectúan pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio representada.

$$Resp.\ \ddot{x} + \frac{b^2}{a^2}\frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\frac{c}{\sqrt{km}}$$

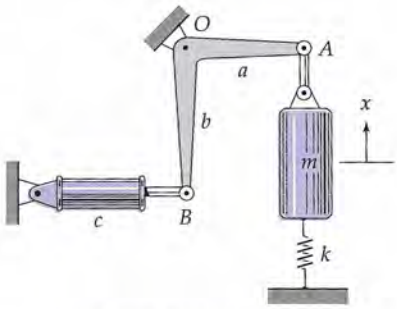


Figura problema 8.45

▶ 8.46 Estudiar el caso de amortiguamiento de Coulomb para el bloque de la figura, en la que el coeficiente de rozamiento cinético es μ_c y cada resorte posee una rigidez k. El bloque se separa una distancia x_0 de la posición neutra y luego se suelta. Encontrar y resolver la ecuación diferencial del movimiento. Representar gráficamente la oscilación resultante e indicar la velocidad de decrecimiento r de la amplitud por unidad de tiempo.

$$Resp.\ r = \frac{2\mu_c g}{\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

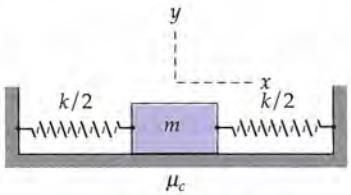


Figura problema 8.46

8.3 OSCILACIONES FORZADAS DE UN PUNTO MATERIAL

Aunque existen numerosos casos en que las oscilaciones son un fenómeno importante, los problemas de oscilaciones más importantes se presentan en aquellas situaciones en que el movimiento está continuamente excitado por una fuerza perturbadora. Esta fuerza puede estar exteriormente aplicada o bien generarse en el seno del sistema por medios como alguna pieza rotatoria desequilibrada. Pueden asimismo excitarse oscilaciones forzadas a consecuencia del movimiento de la cimentación del sistema.

http://gratislibrospdf.com/

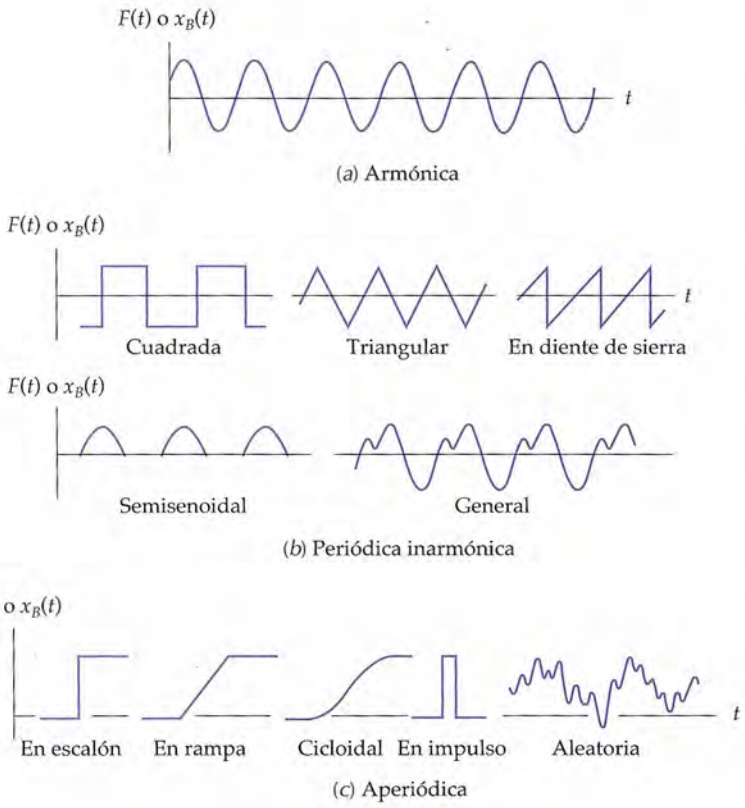


Figura 8.8

En la figura 8.8 se ilustran diversas formas de funciones de fuerzas $F = F(t)$ y de desplazamiento de la base, o cimentación, $x_B = x_B(t)$. La fuerza armónica que se muestra en la parte *a* de la figura se presenta muy a menudo en la práctica y el estudio asociado a las fuerzas armónicas es un primer paso ineludible para analizar y comprender la acción de fuerzas más complicadas. Por esta causa, centraremos nuestra atención en las excitaciones armónicas.

Empecemos considerando el sistema de la figura 8.9*a*, en el que el cuerpo está sometido a la fuerza armónica exterior $F = F_0$ sen ωt, donde F_0 es la amplitud de la fuerza y ω es la pulsación excitadora (en radianes por segundo). Téngase cuidado ahora para no confundir $\omega_n = \sqrt{k/m}$, que es una propiedad del sistema, con ω que es una propiedad de la fuerza aplicada al sistema. Advirtamos también que si la fuerza se expresa en la forma $F = F_0$ cos ωt, en los resultados que van a obtenerse seguidamente basta con sustituir sen ωt por cos ωt. Si al diagrama para sólido libre de la figura 8.9*a* se aplica la segunda ley de Newton se obtiene

$$-kx - c\dot{x} + F_0 \text{ sen } \omega t = m\ddot{x}$$

Esta ecuación adquiere su forma habitual con las mismas sustituciones que en el apartado 8.2. Esta forma es

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n{}^2 x = \frac{F_0 \text{ sen } \omega t}{m} \qquad (8.13)$$

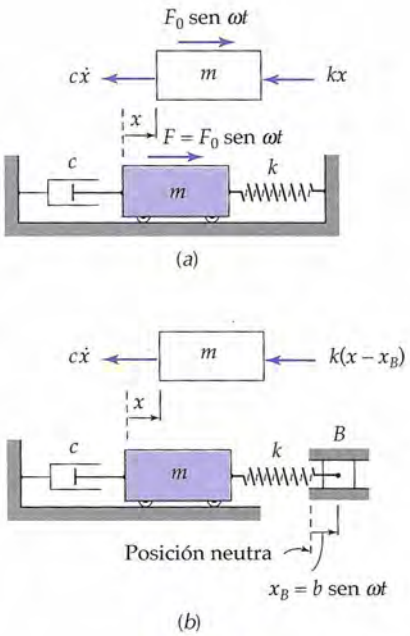


Figura 8.9

http://gratislibrospdf.com/

En muchas ocasiones la excitación de la masa no se debe a una fuerza directamente aplicada, sino al movimiento de la base o cimentación a la que la masa se encuentra conectada mediante resortes u otro montaje de naturaleza elástica. Ejemplos de estos casos los tenemos en los sismógrafos, las suspensiones de los vehículos y las estructuras por las sacudidas de los terremotos. El movimiento armónico de una base es equivalente a la aplicación directa de una fuerza armónica. Para ver esto claramente, consideremos el sistema de la figura 8.9*b*, donde el resorte está unido a la base movible. El diagrama para sólido libre muestra a la masa desplazada una distancia x respecto a la posición natural, o posición neutra, que ocuparía si la base se encontrara en su posición neutra. La base, a su vez, se supone que posee un movimiento armónico $x_B = b \operatorname{sen} \omega t$. Téngase en cuenta que la deformación del resorte es la diferencia entre los desplazamientos inerciales de la masa y la base. Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama para sólido libre se tiene

$$-k(x - x_B) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

o sea

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n{}^2 x = \frac{kb \operatorname{sen} \omega t}{m} \tag{8.14}$$

Se ve en seguida que esta ecuación es formalmente igual a la ecuación fundamental del movimiento 8.13, en la que F_0 aparece sustituida por kb. En consecuencia, todas las conclusiones que se obtengan a continuación son válidas tanto para la 8.13 como para la 8.14.

(a) Oscilaciones forzadas no amortiguadas. Empecemos por el caso en que el amortiguamiento sea despreciable, o sea, $c = 0$. Entonces, la ecuación fundamental del movimiento se hace

$$\ddot{x} + \omega_n{}^2 x = \frac{F_0}{m} \operatorname{sen} \omega t \tag{8.15}$$

La solución completa a esta ecuación 8.15 es la suma de la solución complementaria x_c, que es la solución general a la ecuación 8.15 con el segundo miembro nulo, más la solución particular x_p, que es *cualquiera* de las soluciones a la ecuación completa. Es decir, $x = x_c + x_p$. En la sección (*a*) del apartado 8.2 hemos visto ya cuál es la solución complementaria x_c. La solución particular podemos determinarla haciendo la hipótesis de que la respuesta a la fuerza ha de revestir la misma forma que ésta. A tal fin, supondremos que

$$x_p = X \operatorname{sen} \omega t \tag{8.16}$$

donde X es la amplitud (en unidades de longitud) de la solución particular. Sustituyendo por esta expresión en la ecuación 8.15 y despejando X resulta

$$X = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{8.17}$$

Con esto, la solución particular queda

$$x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \operatorname{sen} \omega t \tag{8.18}$$

http://gratislibrospdf.com/

La solución complementaria, conocida como *solución* o *respuesta transitoria*, carece aquí de interés ya que, con el transcurso del tiempo, se desvanece gradualmente a causa del pequeño amortiguamiento siempre presente en los sistemas y que nunca puede eliminarse por completo. La solución particular x_p representa la parte del movimiento que se mantiene y recibe el nombre de *solución* o *respuesta estacionaria*. Su período es $\tau = 2\pi/\omega$, el mismo que el de la función fuerza. De interés primordial es la amplitud X del movimiento. Si es δ_{st} el desplazamiento estático de la masa bajo una carga estática F_0, se cumple que $\delta_{st} = F_0/k$ y podemos formar el cociente

$$M = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2} \tag{8.19}$$

Este cociente M se conoce como *índice de amplitud* o *factor de amplificación* y constituye una medida de la rigurosidad de las oscilaciones. Observemos particularmente que M *tiende a infinito* cuando ω tiende a ω_n. Por consiguiente, si el sistema no está amortiguado y lo excita una fuerza armónica cuya pulsación ω sea próxima a la natural ω_n del sistema, entonces M, y por tanto X, crecen ilimitadamente. Físicamente, esto significa que la amplitud del movimiento llegaría a los límites del resorte del sistema y ello es una situación a evitar. El valor ω_n se conoce como *pulsación crítica* o *resonante* del sistema y el estado en que ω tiene un valor próximo a ω_n, con la consiguiente amplitud X de un valor muy elevado, se conoce como *resonancia*. Para $\omega < \omega_n$ el factor de amplificación M es positivo y la oscilación está en fase con la fuerza F. Para $\omega > \omega_n$ el factor de amplificación es negativo y la oscilación está en oposición de fase (desfasada 180°) con la fuerza. En la figura 8.10 se representa gráficamente el valor absoluto de M en función del cociente de pulsaciones ω/ω_n.

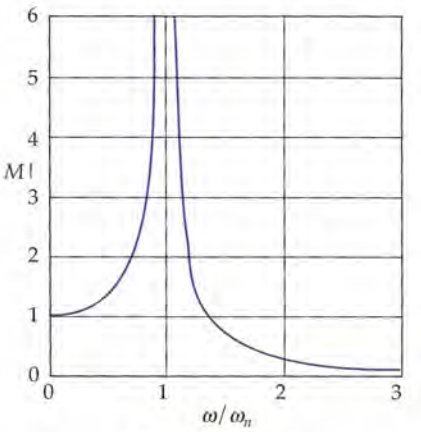


Figura 8.10

(b) Oscilaciones forzadas amortiguadas. Si reintroducimos el amortiguamiento, la ecuación diferencial fundamental del movimiento la escribiremos

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0 \operatorname{sen} \omega t}{m} \tag{8.13}$$

Como en la sección (*a*), la solución completa es la suma de la solución complementaria, que es la solución general a la ecuación 8.13 con el segundo miembro cero, más la solución particular x_p, que es *cualquiera* de las soluciones a la ecuación completa. En la sección (*b*) del apartado 8.2 hemos visto ya cual es la solución complementaria x_c. En virtud de la presencia del amortiguamiento, resulta que una expresión sencilla en seno o coseno, tal como la utilizada en la sección (*a*), ya no es suficientemente general para la solución particular. Así pues, probamos con

$$x_p = X_1 \cos \omega t + X_2 \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{o} \qquad x_p = X \operatorname{sen} (\omega t - \phi)$$

Llevando la segunda de estas expresiones a la ecuación 8.13, igualando coeficientes y despejando X y ϕ del sistema de ecuaciones resultante nos queda

$$X = \frac{F_0/k}{\{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2\}^{1/2}} \tag{8.20}$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left[\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right] \tag{8.21}$$

http://gratislibrospdf.com/

Conocemos así ahora la solución completa y, por tanto, la misma puede escribirse como sigue para un sistema no amortiguado

$$x = Ce^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \psi) + X \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{8.22}$$

El primer término del segundo miembro disminuye con el tiempo y, por ello, se conoce como *solución* o *respuesta transitoria*. La solución particular x_p se conoce como *solución* o *respuesta estacionaria* y constituye la parte de la solución que nos interesa primordialmente. Todas las cantidades que figuran en el segundo miembro de la ecuación 8.22 son propiedades del sistema y de la fuerza aplicada, salvo C y ψ (que dependen de las condiciones iniciales) y el tiempo transcurrido t.

En las proximidades de la resonancia, la amplitud X de la respuesta estacionaria depende fuertemente del índice de amortiguamiento ζ y del cociente, adimensional, de pulsaciones ω/ω_n. Aquí vuelve a ser conveniente formar el cociente adimensional $M = X/(F_0/k)$, conocido como *índice de amplitud* o *factor de amplificación*.

$$M = \frac{1}{\{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2\}^{1/2}} \tag{8.23}$$

En la figura 8.11 se representa gráficamente, con gran exactitud, el factor de amplificación M en función del cociente de pulsaciones ω/ω_n para distintos valores del índice de amortiguamiento ζ. Dicha figura revela la información más esencial concerniente a la oscilación forzada de un sistema de un solo grado de libertad sometido a una excitación armónica. De la gráfica resulta claro que si la amplitud de un movimiento es excesiva, dos remedios posibles serían (*a*) aumentar el amortiguamiento (para que el valor de ζ sea mayor) y (*b*) alterar la pulsación excitadora ω alejándola de la pulsación de resonancia ω_n. El efecto del amortiguamiento se nota perfectamente en la proximidad de la resonancia. En la figura 8.11 se ve asimismo que, salvo para $\zeta = 0$, la curva del factor de amplificación no crece de hecho ilimitadamente para $\omega/\omega_n = 1$. Para cualquier valor dado de ζ la cresta puede calcularse hallando el máximo de M mediante la expresión 8.23.

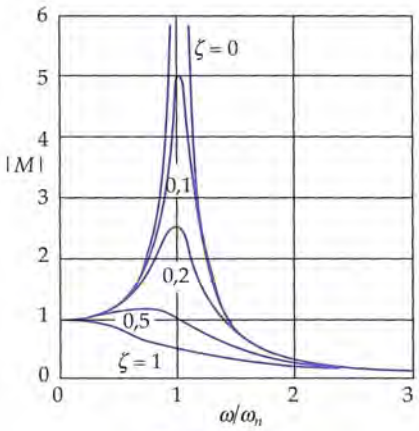


Figura 8.11

El ángulo de fase ϕ, expresado por 8.21, puede variar entre 0 y π y representa la porción de ciclo (y por tanto el tiempo) que la respuesta x_p está rezagada respecto a la función fuerza F. En la figura 8.12 se muestra la variación del ángulo de fase ϕ con el cociente de pulsaciones para distintos valores del índice de amortiguamiento ζ. Se observará que el valor de ϕ en la resonancia es de 90° para todos los valores de ζ. Para complementar la explicación de lo que significa la diferencia de fase entre la respuesta y la función fuerza, en la figura 8.13 se ven dos ejemplos de las variaciones de F y x_p con ωt. En el primer caso es $\omega < \omega_n$ y ϕ se toma como $\pi/4$; en el segundo caso, es $\omega > \omega_n$ y ϕ se toma como $3\pi/4$.

Como una de las aplicaciones más comunes de la excitación armónica vamos a tratar de los instrumentos medidores de vibraciones, tales como sismógrafos y acelerómetros. En la figura 8.14*a* se muestran los elementos constituyentes de esta clase de instrumentos. Obsérvese que todo el sistema está sometido al mo-

http://gratislibrospdf.com/

vimiento x_B del bastidor. Si x denota la posición de la masa *relativa* al bastidor, al aplicar la segunda ley de Newton se obtiene

$$-c\dot{x} - kx = m\frac{d^2}{dt^2}(x + x_B) \qquad \text{o sea} \qquad \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}m = -\ddot{x}_B$$

donde $(x + x_B)$ es la elongación inercial de la masa. Si es $x_B = b$ sen ωt, la ecuación del movimiento con la notación habitual será

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n{}^2x = b\omega^2 \text{ sen } \omega t$$

que es igual a la 8.13 con F_0/m sustituido por $b\omega^2$. Nos sigue interesando únicamente la solución estacionaria x_p. Entonces, según 8.20, tenemos

$$x_p = \frac{b(\omega/\omega)^2}{\{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2\}^{1/2}} \text{ sen } (\omega t - \phi)$$

Si X representa la amplitud de la respuesta relativa x_p, el cociente adimensional X/b será

$$X/b = (\omega/\omega_n)^2 M$$

donde M es el factor de amplificación de la expresión 8.23. En la parte b de la figura 8.14 se representa gráficamente X/b en función del cociente de pulsaciones ω/ω_n. Conviene advertir las similitudes y diferencias entre los factores de amplificación de las figuras 8.14(*b*) y 8.11.

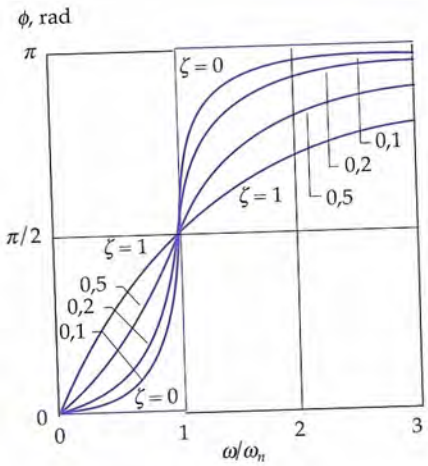


Figura 8.12

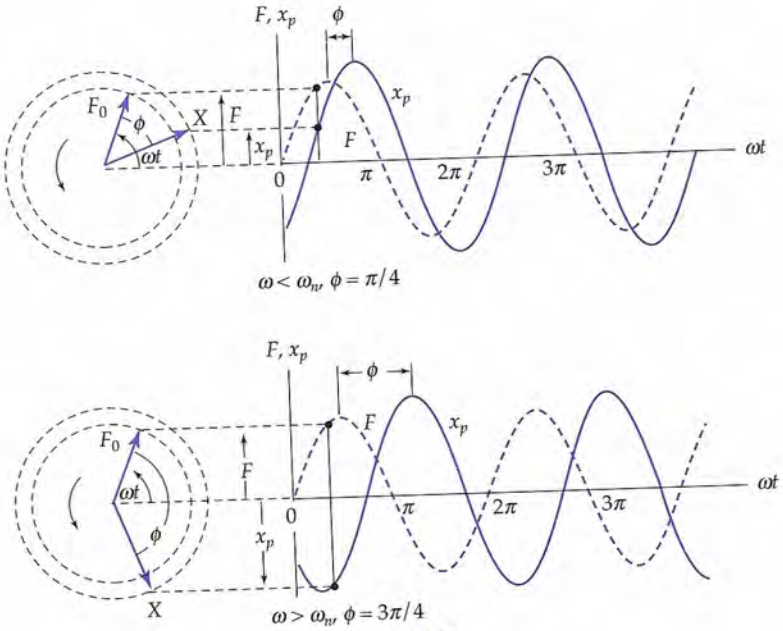
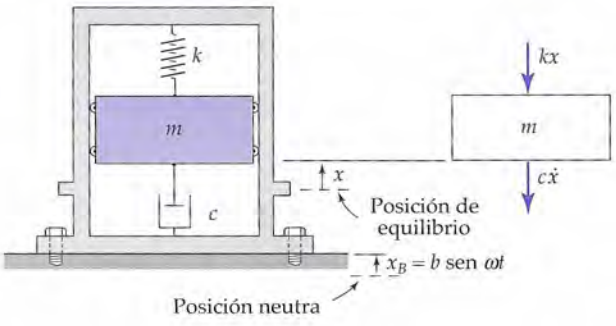
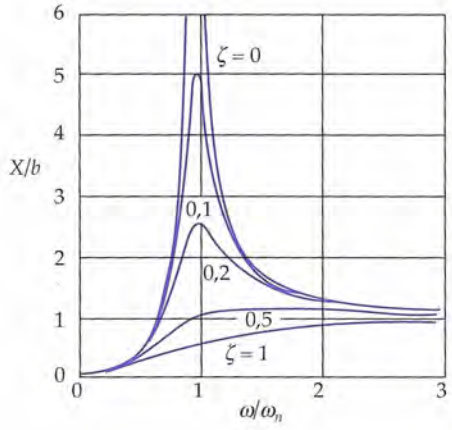


Figura 8.13

http://gratislibrospdf.com/



(a)



(b)

Figura 8.14

Si el cociente de pulsaciones ω/ω_n es grande, será $X/b \cong 1$ para todos los valores del índice de amortiguamiento ζ. En estas condiciones, la elongación de la masa relativa al bastidor es aproximadamente igual al desplazamiento absoluto de éste y el instrumento actúa como un *indicador de desplazamiento*. Para que ω/ω_n sea alto, hace falta que $\omega_n = \sqrt{k/m}$ sea pequeño, lo que supone que el resorte ha de ser blando y la masa grande. Con esta combinación, la masa tenderá a permanecer inmóvil por inercia. Generalmente, los indicadores de desplazamiento tienen un amortiguamiento muy leve.

Por el contrario, si el cociente de pulsaciones ω/ω_n es pequeño, M será próximo a la unidad (véase fig. 8.11) y $X/b \cong (\omega/\omega_n)^2$, o sea, $X \cong b(\omega/\omega_n)^2$. Pero $b\omega^2$ es la aceleración máxima del bastidor y el instrumento podrá usarse como *acelerómetro*. Generalmente, el índice de amortiguamiento se elige de modo que M sea próximo a la unidad para la gama de valores de ω/ω_n más amplia posible. En la figura 8.11 se ve que un índice de amortiguamiento comprendido entre $\zeta = 0{,}5$ y $\zeta = 1$ puede cumplir esta condición.

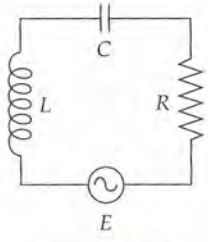


Figura 8.15

Entre los circuitos eléctricos y los sistemas mecánicos de masa y resorte existe una importante analogía. En la figura 8.15 se representa un circuito en serie compuesto de una fuente de tensión E, que es función del tiempo, una inducción L, un condensador C y una resistencia R. Representando la carga mediante la letra q, la ecuación por la cual se rige ésta es

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E \qquad (8.24)$$

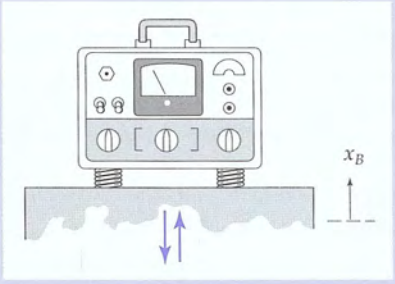
Esta ecuación es formalmente igual a la del sistema mecánico. Así pues, mediante un simple intercambio de símbolos, puede utilizarse el comportamiento del sistema eléctrico para predecir el comportamiento del sistema mecánico y viceversa. Resulta de utilidad la siguiente tabla de equivalentes mecánicos y eléctricos.

http://gratislibrospdf.com/

EQUIVALENTES MECANO-ELECTRICOS					
SISTEMA MECÁNICO			SISTEMA ELÉCTRICO		
MAGNITUD	SÍMBOLO	UNIDAD	MAGNITUD	SÍMBOLO	UNIDAD
Masa	m	kg	Inductancia	L	H henry
Rigidez de un resorte	k	N/m	1/Capacidad	$1/C$	$1/F$ farad
Fuerza	F	N	Tensión	E	V volt
Velocidad	$\dot{x}$	m/s	Intensidad	I	A ampere
Desplazamiento	x	m	Carga	q	C coulomb
Constante de amortiguamiento viscoso	c	N·s/m	Resistencia	R	Ω ohm

PROBLEMA TIPO 8.4

El instrumento de 50 kg se apoya en cuatro resortes de rigidez 7500 N/m cada uno. Si la base en la que descansa el conjunto está sometida a un movimiento armónico dado, en metros, por $x_B = 0{,}002 \cos 50t$, hallar la amplitud estacionaria del movimiento armónico del instrumento. El amortiguamiento es despreciable.



Solución. Para el caso de oscilación armónica de la base sustituimos F_0 por kb en las fórmulas y, así, la ecuación 8.17, que da la amplitud estacionaria, queda

$$X = \frac{b}{1-(\omega/\omega_n)^2} \quad (1)$$

La pulsación de resonancia es $\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{4(7500)/50} = 24{,}5$ rad/s y la pulsación impartida $\omega = 50$ rad/s es dato. Así pues,

$$X = \frac{0{,}002}{1-(50/24{,}5)^2} = -6{,}32(10^{-4})\text{m} \quad \text{o sea} \quad -0{,}632\text{ mm} \quad \textit{Resp.} \quad (2)$$

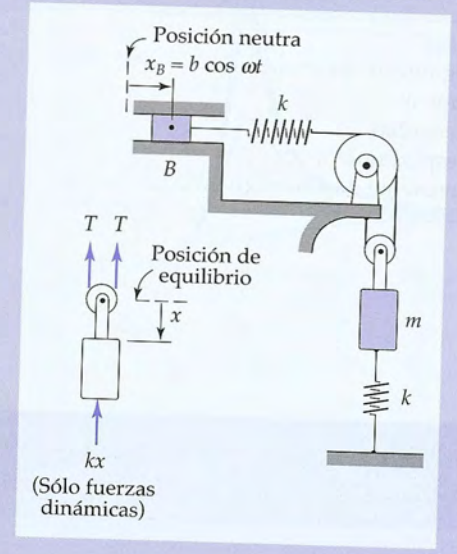
Obsérvese que el cociente de pulsaciones ω/ω_n vale 2 aproximadamente, lo que evita la resonancia.

(1) Téngase en cuenta que la función fuerza puede expresarse con sen $50t$ o con cos $50t$ y el resultado es el mismo.

(2) El signo menos indica que el movimiento está desfasado 180° con la excitación aplicada.

http://gratislibrospdf.com/

El punto B, donde está sujeto el resorte, experimenta un movimiento horizontal $x_B = b \cos \omega t$. Hallar la pulsación excitadora crítica ω_n para la cual tiendan a hacerse excesivamente amplias las oscilaciones de la masa m. Despreciar los rozamientos y las masas asociadas a las poleas. Los dos resortes tienen la misma rigidez k



Solución. Se dibuja el diagrama para sólido libre para dos desplazamientos positivos arbitrarios x y x_B. La variable x se mide hacia abajo desde la posición (1) de equilibrio estático existente cuando $x_B = 0$. El alargamiento adicional del resorte superior, por encima del existente en el equilibrio estático, es $2x - x_B$. Por (2) tanto, la fuerza *dinámica* actuante en el resorte superior, y también la tracción *dinámica T* ejercida en el cable, es $k(2x - x_B)$. Sumando fuerzas en la dirección x resulta

$$[\Sigma F_x = m\ddot{x}] \qquad -2k(2x - x_B) - kx = m\ddot{x}$$

que se convierte en

$$\ddot{x} + \frac{5k}{m}x = \frac{2kb \cos \omega t}{m}$$

La pulsación natural del sistema es $\omega_n = \sqrt{(5k)/m}$. Entonces,

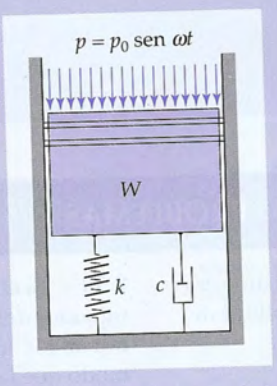
$$\omega_c = \omega_n = \sqrt{5k/m} \qquad \textit{Resp.}$$

(1) Si es necesario recordar algo acerca de la cinemática del movimiento vinculado, véase el apartado 2.9.

(2) En el apartado 8.2 vimos que es posible omitir las fuerzas iguales y opuestas asociadas a la posición de equilibrio estático. Aquí se emplean las expresiones de fuerza dinámica del resorte y tracción dinámica para recalcar el hecho de que sólo hay que considerar los incrementos de las fuerzas adicionales a sus valores estáticos.

http://gratislibrospdf.com/

El pistón de 45 kg está soportado por el resorte de rigidez k = 35 kN/m. Paralelamente al resorte actúa un amortiguador de coeficiente c = 1250 N·s/m. Sobre el pistón, cuya sección de cabeza es de $50(10^{-3})m^2$, actúa una presión cíclica p = 4000 sen 30t. Hallar el desplazamiento en régimen estacionario en función del tiempo y la fuerza máxima que se transmite a la base.



Solución. Comenzamos calculando la pulsación natural y el índice de amortiguamiento del sistema

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{35(10^3)}{45}} = 27{,}9 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{1250}{2(45)(27{,}9)} = 0{,}498 \text{ (subamortiguado)}$$

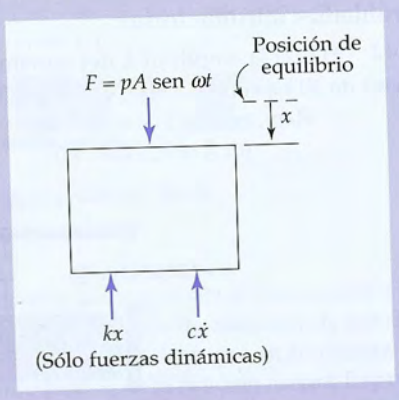
La amplitud en régimen estacionario es, según la ecuación 8.20,

$$X = \frac{F_0/k}{\{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [(2\zeta\omega)/\omega_n]^2\}^{1/2}}$$

$$= \frac{4000(50)(10^{-3})/[35(10^3)]}{\{[1-(30/27{,}9)^2]^2 + [2(0{,}498)(30/27{,}9)]^2\}^{1/2}}$$

$$= 0{,}00528 \text{ m o } 5{,}28 \text{ mm}$$

(1)



(1) **Instamos al lector a que repita estos cálculos con un coeficiente de amortiguamiento igual a cero y que observe así la influencia del relativamente elevado amortiguamiento presente.**

Según la ecuación 8.21, el ángulo de fase es

(2)

$$\phi = \text{arctg}\left[\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right]$$

$$= \text{arctg}\left[\frac{2(0{,}498)(30/27{,}9)}{1-(30/27{,}9)^2}\right]$$

$$= 1{,}716 \text{ rad}$$

(2) **Adviértase que, en este caso, el argumento del arco tangente de ϕ tiene un numerador positivo y un denominador negativo, lo que sitúa a ϕ en el segundo cuadrante. Recuérdese que los límites definidos para ϕ son $0 \leq \phi \leq \pi$**

El movimiento estacionario nos lo da ahora el segundo término del segundo miembro de la ecuación 8.22:

$$x_p = X \text{ sen } (\omega t - \phi) = 5{,}28 \text{ sen } (30t - 1{,}716) \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

La fuerza F_{tr} transmitida a la base es la suma de las ejercidas por el resorte y el amortiguador, o sea

$$F_{tr} = kx_p + c\dot{x}_p = kX \text{ sen } (\omega t - \phi) + c\omega X \cos(\omega t - \phi)$$

http://gratislibrospdf.com/

El valor máximo de F_{tr} es

$$(F_{tr})_{max} = \sqrt{(kX)^2 + (c\omega X)^2} = X\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}$$
$$= 0{,}00528\sqrt{(35\,000)^2 + (1250)^2(30)^2}$$
$$= 271 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

(Salvo que se indique lo contrario, se supondrá que el amortiguamiento es de ligero a moderado, por lo que la amplitud de la respuesta forzada es máxima para $\omega/\omega_n \cong 1$.)

Problemas introductorios

8.47 Hallar la amplitud X del movimiento estacionario de la masa de 10 kg si (*a*) $c = 500$ N·s/m y si (*b*) $c = 0$.

Resp. (*a*) $X = 1{,}344(10^{-2})$ m
(*b*) $X = 2{,}27(10^{-2})$ m

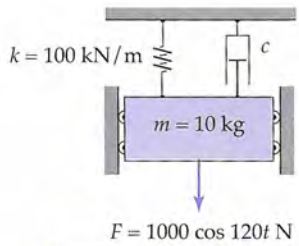


Figura problema 8.47

8.48 Una fuerza armónica de amplitud constante F_0, pero de pulsación variable ω, excita un sistema de masa y resorte con amortiguamiento viscoso. Si la amplitud de la respuesta estacionaria se observa que decrece a la octava parte cuando el cociente de pulsaciones ω/ω_n varía de 1 a 2, hallar el índice de amortiguamiento ζ del sistema.

8.49 El carro de 30 kg está sometido a la acción de la fuerza armónica que se indica. Si $c = 0$, determinar los límites permitidos a la pulsación excitadora ω de modo que la amplitud de la respuesta estacionaria sea inferior a 75 mm.

Resp. $\omega < 4{,}99$ rad/s o $\omega > 6{,}86$ rad/s

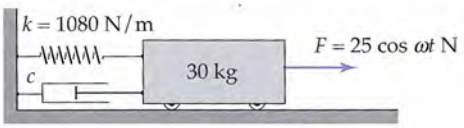


Figura problema 8.49

8.50 Si el coeficiente de amortiguamiento viscoso del amortiguador del sistema del problema 8.49 es $c = 36$ N · s/m, determinar los límites permitidos a la pulsación excitadora ω de modo que la amplitud de la respuesta estacionaria sea inferior a 75 mm. Justificar la solución comparándola con la del problema 8.49.

8.51 Si la pulsación excitadora del problema 8.49 fuese $\omega = 6$ rad/s, determinar el valor que debe tener el coeficiente de amortiguamiento c para que la amplitud de la respuesta estacionaria no exceda de 75 mm.

Resp. $c = 55{,}6$ N · s/m

Problemas representativos

8.52 Un sistema de masa y resorte con amortiguamiento viscoso es impulsado a la pulsación natural no amortiguada ($\omega/\omega_n = 1$). Si el índice de amortiguamiento ζ se duplica de 0,1 a 0,2, calcular la reducción porcentual R_1 que experimenta la amplitud estacionaria. Comparar este resultado con el que se obtiene (R_2) repitiendo los cálculos con la condición $\omega/\omega_n = 2$. Comprobar los resultados a la vista de la figura 8.11.

8.53 Cada una de las bolas de 0,5 kg está sujeta al extremo de la varilla elástica sin peso que flexiona 4 mm cuando recibe la aplicación estática de una fuerza de 2 N. Si el collarín central recibe un movimiento armónico vertical de frecuencia 4 Hz y una amplitud de 3 mm, hallar la amplitud y_0 de la oscilación vertical de cada bola.

Resp. $y_0 = 8{,}15$ mm

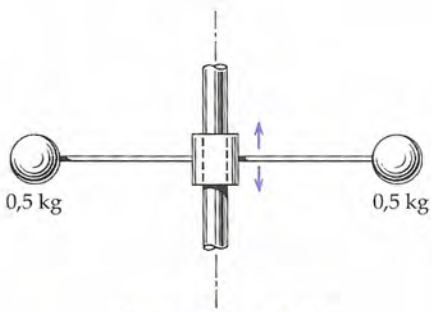


Figura problema 8.53

http://gratislibrospdf.com/

8.54 El movimiento del carro exterior viene dado por $x_B = b$ sen ωt. ¿Para qué valores de la pulsación excitadora ω es inferior a $2b$ la amplitud del movimiento de la masa m relativo al carro?

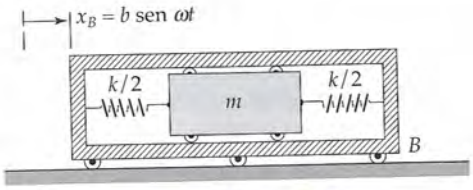


Figura problema 8.54

8.55 Se dice en el texto que los máximos de las curvas del factor de amplificación M no se encuentran en $\omega/\omega_n = 1$. Deducir la expresión que da las posiciones de los máximos en función del índice de amortiguamiento ζ.

$$Resp.\ \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1-2\zeta^2}$$

8.56 Cuando la persona permanece de pie inmóvil en el centro del entramado de piso que se muestra, produce una flecha estática δ_{st} bajo sus pies. Si camina (¡o corre rápido!) por la misma zona, ¿cuántos pasos por segundo harían que el piso vibrase con la máxima amplitud vertical?

Figura problema 8.56

8.57 El elemento de fijación B recibe un movimiento horizontal $x_B = b$ cos ωt. Deducir la ecuación del movimiento de la masa m y definir la pulsación crítica ω_c para la cual las oscilaciones de la masa se hacen excesivamente amplias.

$$Resp.\ m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 b \cos \omega t$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

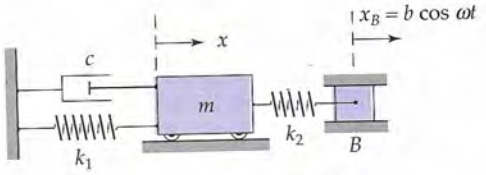


Figura problema 8.57

8.58 El elemento de fijación B recibe un movimiento horizontal $x_B = b$ cos ωt. Deducir la ecuación del movimiento de la masa m y definir la pulsación crítica ω_c para la cual las oscilaciones de la masa se hacen excesivamente amplias. ¿Cuál es el índice de amortiguamiento ζ del sistema?

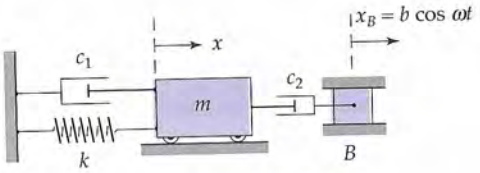


Figura problema 8.58

8.59 Deducir la expresión del *coeficiente de transmisión* T del sistema de la figura. El coeficiente de transmisión es, por definición, el cociente de la fuerza máxima que se transmite a la base dividida por la amplitud F_0 de la función fuerza. Expresar la solución en función de ζ, ω, ω_n y del factor de amplificación M.

$$Resp.\ T = M\sqrt{1 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

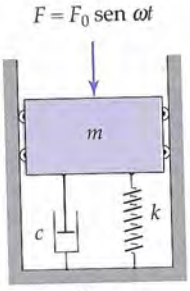


Figura problema 8.59

8.60 Deducir la ecuación del movimiento para el desplazamiento *inercial* x_i de la masa de la figura 8.14. Comentar el proceso de resolución de la ecuación, pero sin acometerlo.

http://gratislibrospdf.com/

8.61 Un dispositivo para generar vibraciones consiste en dos ruedas que giran en sentidos contrarios, llevando cada una de ellas una masa excéntrica $m_0 = 1$ kg de centro de masa situado a la distancia $e = 12$ mm de su eje de rotación. Las ruedas están sincronizadas de manera que las posiciones verticales de las masas no equilibradas coinciden siempre. La masa total del dispositivo es de 10 kg. Determinar los dos valores posibles de la constante k del resorte equivalente que permitan que la fuerza transmitida a la base fija a causa del desequilibrio de los rotores tenga un valor máximo de 1500 N a una velocidad de 1800 rpm. Despréciese el amortiguamiento.

Resp. $k = 823$ kN/m o 227 kN/m

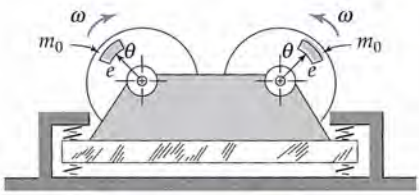


Figura problema 8.61

8.62 El sismógrafo está fijado a una estructura animada de una vibración armónica de 3 Hz. El instrumento tiene una masa $m = 0{,}5$ kg, un resorte de rigidez $k = 20$ N/m y un amortiguador viscoso de coeficiente $c = 3$ N · s/m. Si el valor máximo registrado de x en su movimiento estacionario es $X = 2$ mm, hallar la amplitud b del movimiento horizontal de la estructura.

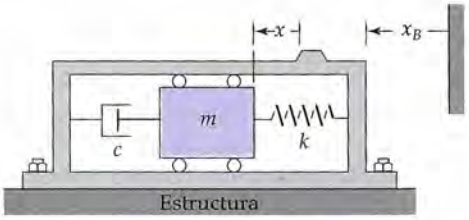


Figura problema 6.62

8.63 Un mecanismo similar al del problema 8.62 va a emplearse para medir la aceleración horizontal de la estructura que está vibrando a 5 Hz. La masa es $m = 0{,}008$ kg, la constante del resorte $k = 150$ N/m y el índice de amortiguamiento es $\zeta = 0{,}75$. Si la amplitud de x es 4,0 mm, calcular aproximadamente la aceleración máxima a_{max} de la estructura.

Resp. $a_{max} = 75{,}0$ m/s^2

8.64 El instrumento de la figura tiene una masa de 43 kg y está montado a la base horizontal mediante resortes. Si la amplitud de las vibraciones verticales de la base es de 0,19 mm, calcular la gama de frecuencias f_n de la base que debe impedirse para que la amplitud de la oscilación vertical del instrumento no exceda de 0,15 mm. Los cuatro resortes son iguales y tienen una rigidez de 7,2 kN/m.

Figura problema 8.64

8.65 El sismógrafo está montado sobre una estructura animada de una vibración vertical de frecuencia 5 Hz y una doble amplitud de 18 mm. El sensor tiene una masa $m = 2$ kg y la rigidez del resorte es $k = 1{,}5$ kN/m. El movimiento de la masa respecto a la base del instrumento se registra en un tambor rotatorio y muestra una doble amplitud de 24 mm durante la situación estacionaria. Calcular la constante de amortiguamiento viscoso c.

Resp. $c = 44{,}6$ N · s/m

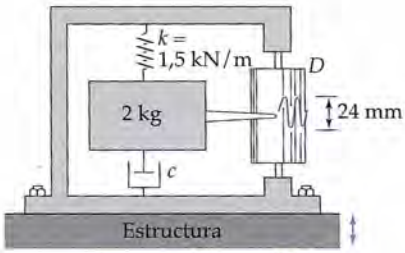


Figura problema 8.65

8.66 Deducir y resolver la ecuación del movimiento de la masa a la que se aplica repentinamente una fuerza F que permanece constante después de su aplicación. En el instante $t = 0$ el desplazamiento y la velocidad de la masa son ambos nulos. Representar gráficamente x en función de t para varios ciclos del movimiento.

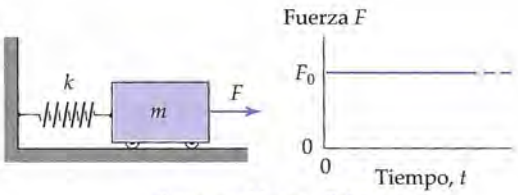


Figura problema 8.66

8.67 La posición de equilibrio de la masa m se da para $y = 0$ e $y_B = 0$. Cuando al cursor B se le comunica un movimiento ver-

http://gratislibrospdf.com/

tical estacionario $y_B = b$ sen ωt, la masa m ejecuta una oscilación vertical estacionaria. Deducir la ecuación diferencial del movimiento de m y especificar la pulsación ω_c para la cual las oscilaciones de m tienden a hacerse demasiado grandes. La rigidez del resorte es k y se desprecian la masa de la polea y el rozamiento en ella.

$$Resp.\ \ddot{y} + \frac{4k}{m}y = \frac{2kb}{m}\ \text{sen}\ \omega t\ ,\ \omega_c = 2\sqrt{k/m}$$

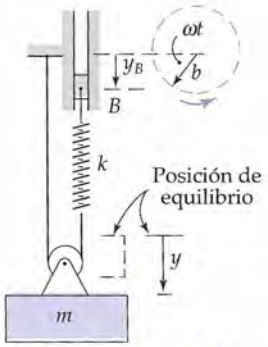


Figura problema 8.67

▶ **8.68** Hallar la amplitud de la vibración vertical del remolque montado sobre resortes cuando avanza a una velocidad de 25 km/h sobre el camino con piso de troncos cuyo contorno puede asimilarse a una sinusoide (o cosinusoide). La masa del remolque es de 500 kg y la de las ruedas es despreciable. Durante la carga, cada incremento de 75 kg comprime 3 mm los resortes. Supóngase que las ruedas están siempre en contacto con el camino y despreciar el amortiguamiento. ¿A qué velocidad crítica v_c será máxima la vibración del remolque?

Resp. $X = 14{,}75$ mm, $v_c = 15{,}23$ km/h

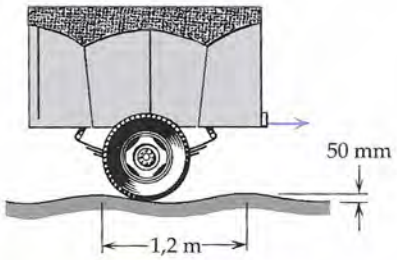


Figura problema 8.68

8.4 OSCILACIONES DE UN CUERPO RÍGIDO

El tema de las oscilaciones planas de un cuerpo rígido es enteramente análogo al de las oscilaciones de un punto material. En este segundo caso la variable que suele interesar es alguna que define una traslación (x), mientras que en las oscilaciones de un cuerpo rígido la variable de máximo interés es alguna que define una rotación (θ). Así pues, los fundamentos de la dinámica de la rotación representan un papel primordial en la deducción de la ecuación de movimiento. Veremos que ésta, en el caso de las oscilaciones rotatorias de un cuerpo rígido, es formalmente igual a la deducida en los apartados 8.2 y 8.3 para las oscilaciones de traslación de un punto material. Tal como ocurría con éste, el diagrama para sólido libre es recomendable y práctico dibujarlo para un desplazamiento positivo cualquiera de la variable de desplazamiento, puesto que un valor negativo de ésta conduce fácilmente a errores de signo en la ecuación de movimiento. La práctica de medir el desplazamiento desde la posición de equilibrio estático y no desde la posición de deformación nula del resorte sigue aquí simplificando la formulación en el caso de los sistemas lineales porque las fuerzas y momentos iguales y opuestos asociados al equilibrio estático se anulan.

En vez de tratar particularmente los casos de (*a*) oscilaciones lineales, amortiguadas y no amortiguadas, y (*b*) oscilaciones forzadas, amortiguadas y no

http://gratislibrospdf.com/

amortiguadas, tal como hicimos con el punto material en los apartados 8.2 y 8.3, entraremos directamente en el problema de las oscilaciones forzadas y amortiguadas.

Como ejemplo ilustrativo, consideremos las oscilaciones de rotación de la barra esbelta de la figura 8.16*a*. En la figura 8.16*b* se muestra el diagrama para sólido libre asociado a la posición horizontal de equilibrio estático. Igualando a cero la suma de momentos respecto a O resulta

$$-P\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{6}\right)+mg\left(\frac{l}{6}\right)=0 \qquad P=\frac{mg}{4}$$

donde P es el módulo de la fuerza estática del resorte.

En la figura 8.16*c* se muestra el diagrama para sólido libre asociado a un desplazamiento angular positivo cualquiera θ. Empleando la ecuación del movimiento de rotación $\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta}$, deducida en el capítulo 6, podemos escribir

$$(mg)\left(\frac{l}{6}\cos\theta\right)-\left(\frac{cl}{3}\dot{\theta}\cos\theta\right)\left(\frac{l}{3}\cos\theta\right)-\left(P+k\frac{2l}{3}\operatorname{sen}\theta\right)\left(\frac{2l}{3}\cos\theta\right)$$
$$+(F_0\cos\omega t)\left(\frac{l}{3}\cos\theta\right)=\frac{1}{9}ml^2\ddot{\theta}$$

donde $I_O=\bar{I}+md^2=ml^2/12+m(l/6)^2=ml^2/9$ se obtiene aplicando el teorema de Steiner para momentos de inercia másicos. Para desviaciones angulares pequeñas es posible aceptar las aproximaciones sen $\theta\cong\theta$ y cos $\theta\cong 1$. Con $P=mg/4$, la ecuación de movimiento, una vez reordenada y simplificada, queda

$$\ddot{\theta}+\frac{c}{m}\dot{\theta}+4\frac{k}{m}\theta=\frac{(F_0l/3)\cos\omega t}{ml^2/9} \tag{8.25}$$

El segundo miembro se ha dejado sin simplificar en la forma $M_0(\cos\omega t)/I_O$, donde $M_0=F_0l/3$ es el módulo del momento respecto al punto O de la fuerza externamente aplicada. Adviértase que los dos momentos iguales y opuestos asociados a las fuerzas de equilibrio estático se han anulado entre ellos en el primer miembro de la ecuación de movimiento de rotación. Por consiguiente, no es necesario incluir en el análisis las fuerzas y los momentos del equilibrio estático.

Llegados aquí, observamos que la ecuación 8.25 es formalmente igual a la 8.13, correspondiente al caso de traslación, y por ello podemos escribir

$$\ddot{\theta}+2\zeta\omega_n\dot{\theta}+\omega_n^2\theta=\frac{M_0\cos\omega t}{I_O} \tag{8.26}$$

Así pues, podemos emplear todas las relaciones desarrolladas en los apartados 8.2 y 8.3 sin más que sustituir las cantidades de traslación por sus homólogas de rotación. En la tabla de la página siguiente se muestra el resultado de efectuar esa sustitución para la barra basculante de la figura 8.16. En dicha tabla, el parámetro k_θ representa la constante del resorte de torsión equivalente del sis-

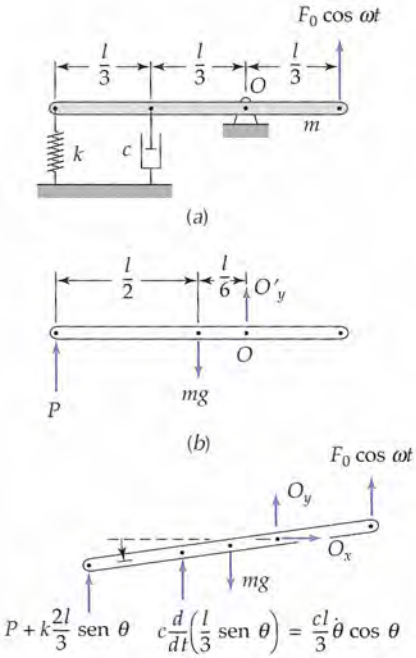


Figura 8.16

http://gratislibrospdf.com/

TRASLACIÓN	ROTACIÓN (problema presente)
$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0\cos\omega t}{m}$	$\ddot{\theta}+\frac{c}{m}\dot{\theta}+\frac{4k}{m}\theta=\frac{M_0\cos\omega t}{I_O}$
$\omega_n=\sqrt{k/m}$	$\omega_n=\sqrt{4k/m}=2\sqrt{k/m}$
$\zeta=\frac{c}{2m\omega_n}=\frac{c}{2\sqrt{km}}$	$\zeta=\frac{c}{2m\omega_n}=\frac{c}{4\sqrt{km}}$
$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=\frac{1}{2m}\sqrt{4km-c^2}$	$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=\frac{1}{2m}\sqrt{16km-c^2}$
$x_c=Ce^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{sen}(\omega_d t+\psi)$	$\theta_c=Ce^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{sen}(\omega_d t+\psi)$
$x_p=X\cos(\omega t-\phi)$	$\theta_p=\Theta\cos(\omega t-\phi)$
$X=m\left(\frac{F_0}{k}\right)$	$\Theta=M\left(\frac{M_0}{k_\theta}\right)=M\frac{F_0(l/3)}{\frac{4}{9}kl^2}=\frac{3F_0}{4kl}$

tema de la figura 8.16 y se determina escribiendo el momento recuperador del resorte. Para un ángulo θ pequeño, este momento respecto a O es

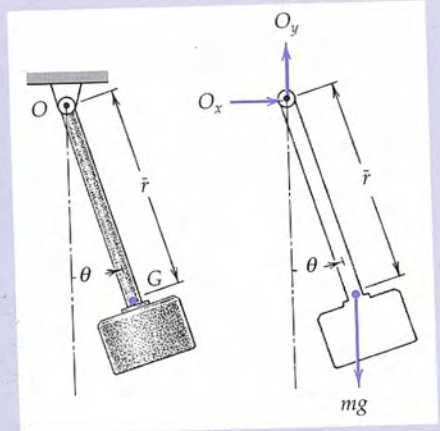
$$M_k=-[k(2l/3)\,\mathrm{sen}\,\theta][(2l/3)\cos\theta]\cong-(\tfrac{4}{9}kl^2)\theta$$

Es decir, $k_\theta=\frac{4}{9}kl^2$. Obsérvese que la cantidad M_0/k_θ es la desviación angular estática que produciría un momento exterior constante M_0.

Concluimos, pues, que existe una analogía exacta entre las oscilaciones de traslación de una partícula y las pequeñas oscilaciones de rotación de un cuerpo rígido. Y aún más, la utilización de esta analogía puede ahorrar toda la labor de deducir las relaciones aplicables a un problema dado de oscilaciones de un cuerpo rígido.

PROBLEMA TIPO 8.7

En la figura se representa simplificadamente un péndulo como los utilizados para ensayos de resiliencia. Deducir su ecuación de movimiento y hallar el período de sus pequeñas oscilaciones alrededor del eje de suspensión O. El centro de masa G está ubicado a una distancia $\bar{r}=0{,}9$ m de O y el radio de giro respecto a O es $k_O=0{,}95$ m. El rozamiento en el cojinete es despreciable.



http://gratislibrospdf.com/

Solución. Dibujamos el diagrama para sólido libre correspondiente a un desplazamiento positivo cualquiera θ, midiéndose éste en sentido antihorario para el sistema de coordenadas elegido. Seguidamente aplicamos la ecuación fundamental del movimiento y obtenemos

(1) Habiendo tomado O como centro de momentos, las componentes O_x y O_y de la reacción del cojinete no entran nunca en la ecuación del movimiento.

$$(1) \qquad [\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta}] \qquad -mg\bar{r}\,\text{sen}\,\theta = mk_O^2\ddot{\theta}$$

o sea

$$\ddot{\theta} + \frac{g\bar{r}}{k_O^2}\,\text{sen}\,\theta = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

Obsérvese que esta ecuación es independiente de la masa. Cuando θ es pequeño, es sen $\theta \cong \theta$ y la ecuación del movimiento puede escribirse

(2) Para oscilaciones de gran amplitud, la determinación del período del péndulo requiere calcular una integral elíptica.

$$\ddot{\theta} + \frac{g\bar{r}}{k_O^2}\,\theta = 0$$

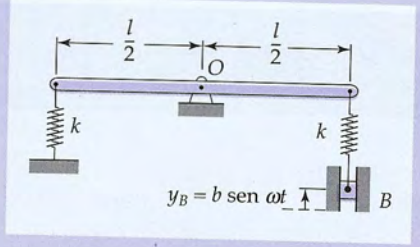
(2) a frecuencia en ciclos por segundo y el período en segundos son

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\bar{r}}{k_O^2}} \qquad \tau = \frac{1}{f_n} = 2\pi\sqrt{\frac{k_O^2}{g\bar{r}}} \qquad \textit{Resp.}$$

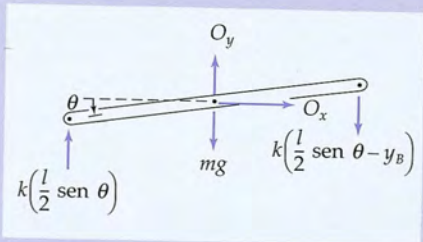
Para los datos dados $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{(0{,}95)^2}{(9{,}81)(0{,}9)}} = 2{,}01$ s *Resp.*

PROBLEMA TIPO 8.8

La barra uniforme de masa m y longitud l tiene un eje de oscilación en su centro. El resorte de constante k de la izquierda está sujeto a una superficie inmóvil, pero el de la derecha, también de constante k, lo está a un soporte sometido a un movimiento armónico dado por $y_B = b$ sen ωt. Hallar la pulsación excitadora de resonancia ω_c.



(1) Como antes, consideramos únicamente las variaciones en las fuerzas debidas a un movimiento de separación de la posición de equilibrio.



Solución. Aplicamos la ecuación de movimiento en su versión de momentos, tomando éstos respecto a O, y obtenemos

$$(1) \qquad -\left(k\frac{l}{2}\,\text{sen}\,\theta\right)\frac{l}{2}\cos\theta - k\left(\frac{l}{2}\,\text{sen}\,\theta - y_B\right)\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta}$$

Con la hipótesis de pequeñas oscilaciones y simplificando queda

$$\ddot{\theta} + \frac{6k}{m}\theta = \frac{6kb}{ml}\,\text{sen}\,\omega t$$

http://gratislibrospdf.com/

(2) La pulsación natural la identificamos observando la ya ahora conocida ecuación y es

$$\omega_n = \sqrt{6k/m}$$

De aquí que una pulsación $\omega_c = \omega_n = \sqrt{6k/m}$ producirá la resonancia (en tanto que además violará nuestra hipótesis de pequeñas oscilaciones).

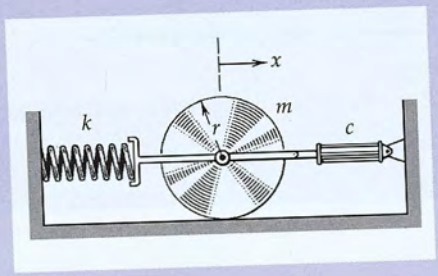
(2) **La forma típica es aquí** $\ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = \dfrac{M_0 \operatorname{sen} \omega t}{I_O}$, **donde** $M_0 = \dfrac{klb}{2}$ **e** $I_O = \frac{1}{12}ml^2$. **La pulsación natural** ω_n **de un sistema no depende de la perturbación externa.**

PROBLEMA TIPO 8.9

Deducir la ecuación del movimiento del cilindro circular homogéneo que rueda sin deslizar. Si su masa es de 50 kg, su radio mide 0,5 m, la constante del resorte vale 75 N/m y el coeficiente de amortiguamiento es 10 N:s/m, hallar

(a) la pulsación natural no amortiguada
(b) el índice de amortiguamiento
(c) la pulsación natural amortiguada
(d) el período del sistema amortiguado.

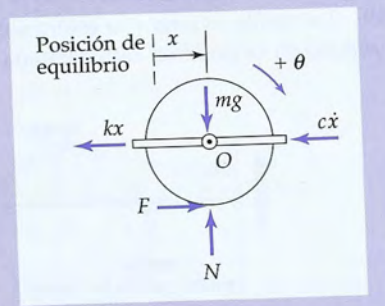
Hallar además x en función del tiempo si el cilindro se suelta desde el reposo en la posición $x = -0{,}2$ m cuando $t = 0$.



(1) **El ángulo** θ **se toma positivo en sentido horario, a efectos de correspondencia cinemática con** x.

(2) **A la fuerza de rozamiento** F **puede atribuirsele un sentido cualquiera. Encontraremos que su sentido** *real* **es hacia la derecha para** $x > 0$, **y hacia la izquierda para** $x < 0$; $F = 0$ **cuando** $x = 0$.

Solución. (1) Como variable del movimiento podemos elegir entre x y la rotación θ del cilindro. Como en el enunciado del problema se nos da un valor de x, el diagrama para sólido libre lo dibujamos para un valor positivo cualquiera de x y escribimos las ecuaciones de movimiento siguientes



(2)
$$[\Sigma F_x = m\ddot{x}] \qquad -c\dot{x} - kx + F = m\ddot{x}$$
$$[\Sigma M_G = \bar{I}\ddot{\theta}] \qquad -Fr = \tfrac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

La condición de rodadura sin deslizamiento es $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$. Llevando esta condición a la ecuación de momentos resulta $F = -\frac{1}{2}m\ddot{x}$. Esta expresión de la fuerza de rozamiento la introducimos en la ecuación de la fuerza en la dirección x y se tiene

$$-c\dot{x} - kx - \frac{1}{2}m\ddot{x} = m\ddot{x} \qquad \text{o sea} \qquad \ddot{x} + \frac{2}{3}\frac{c}{m}\dot{x} + \frac{2}{3}\frac{k}{m}x = 0$$

http://gratislibrospdf.com/

Comparando la ecuación anterior con la 8.9, correspondiente al oscilador amortiguado general, podemos establecer directamente

(*a*) $$\omega_n^2 = \frac{2}{3}\frac{k}{m} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{75}{50}} = 1 \text{ rad/s}$$ *Resp.*

(*b*) $$2\zeta\omega_n = \frac{2}{3}\frac{c}{m} \qquad \zeta = \frac{1}{3}\frac{c}{m\omega_n} = \frac{10}{3(50)(1)} = 0{,}0667$$ *Resp.*

Por tanto, la pulsación natural amortiguada y el período amortiguado son

(*c*) $$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = (1)\sqrt{1-(0{,}0667)^2} = 0{,}998 \text{ rad/s}$$ *Resp.*

(*d*) $$\tau_d = 2\pi/\omega_d = 2\pi/0{,}998 = 6{,}30 \text{ s}$$ *Resp.*

Según la ecuación 8.12, la solución no amortiguada a la ecuación del movimiento es

$$x = Ce^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \psi) = Ce^{-(0{,}0667)(1)t} \operatorname{sen}(0{,}998t + \psi)$$

La velocidad es $$\dot{x} = -0{,}0667Ce^{-0{,}0667t} \operatorname{sen}(0{,}998t + \psi) + 0{,}998Ce^{-0{,}0667t} \cos(0{,}998y + \psi)$$

En el instante $t = 0$, x y $\dot{x}$ valen

$$x_0 = C \operatorname{sen} \psi = -0{,}2$$
$$\dot{x}_0 = -0{,}667C \operatorname{sen} \psi + 0{,}998C \cos \psi = 0$$

Despejando C y ψ de este sistema de ecuaciones, resulta

$$C = -0{,}2004 \text{ m} \qquad \psi = 1{,}504 \text{ rad}$$

Por consiguiente, el movimiento está dado por

$$x = -0{,}2004e^{-0{,}0667t} \operatorname{sen}(0{,}998t + 1{,}504) \text{ m}$$ *Resp.*

PROBLEMAS

Problemas introductorios

8.69 La varilla liviana y la esfera solidaria de masa m están en reposo en la posición representada. Hallar el período τ de las pequeñas oscilaciones en el plano vertical alrededor del eje de suspensión O.

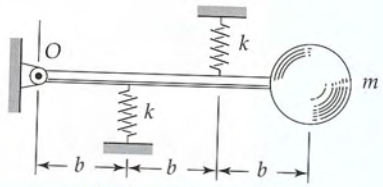


Figura problema 8.69

Resp. $$\tau = 6\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}$$

8.70 Se representa un péndulo invertido cargado con resortes en su posición de equilibrio. Hallar la frecuencia natural f_n de sus pequeñas oscilaciones en torno a la vertical y establecer para qué valor mínimo de la constante k de los resortes tendrán lugar tales oscilaciones. Se desprecia la masa de la varilla.

http://gratislibrospdf.com/

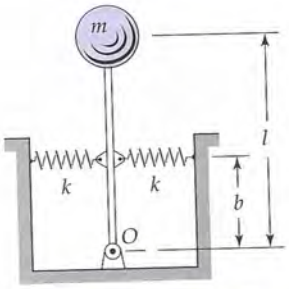


Figura problema 8.70

8.71 La placa delgada cuadrada cuelga de una rótula (no representada) que encaja en la pequeña bola situada en O. Si se hace que la placa se balancee alrededor del eje A-A, hallar el período de las pequeñas oscilaciones. Despreciar el leve descentrado, la masa y el rozamiento de la bola.

Resp. $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{2b}{3g}}$

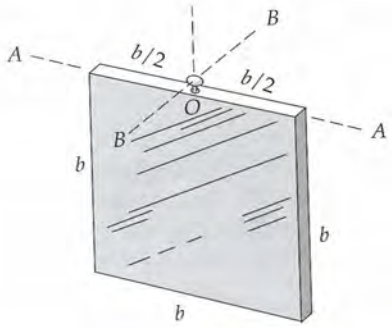


Figura problema 8.71

8.72 Si la placa cuadrada del problema 8.71 se pone a oscilar alrededor del eje B-B, hallar el período de las pequeñas oscilaciones y compararlo con el obtenido en el problema 8.71.

8.73 El marco rectangular está construido de varilla delgada uniforme y cuelga de una rótula (no representada) que encaja en la pequeña bola situada en O. Si se hace que el rectángulo se balancee alrededor del eje A-A, hallar la frecuencia natural de las pequeñas oscilaciones. Despreciar el leve descentrado, la masa y el rozamiento de la bola.

Resp. $\omega_n = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{g}{2b}}$

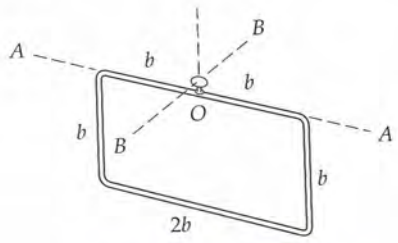


Figura problema 8.73

8.74 Si el marco rectangular del problema 8.73 se pone a oscilar alrededor del eje B-B, hallar la frecuencia natural de las pequeñas oscilaciones y compararla con la obtenida en el problema 8.73.

8.75 La masa de la varilla delgada uniforme es 3 kg. Hallar la posición x en que debe encontrarse el cursor de 1 kg para que el período del sistema sea 0,9 s. Suponer pequeñas oscilaciones en torno a la posición horizontal de equilibrio representada.

Resp. $x = 0{,}587$ m

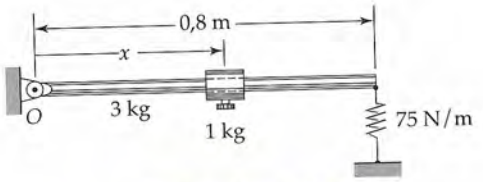


Figura problema 8.75

Problemas representativos

8.76 Para la placa semicircular de radio r, hallar la frecuencia natural f_n de sus pequeñas oscilaciones en el plano vertical en torno al cojinete O.

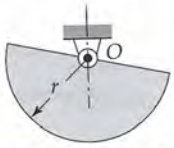


Figura problema 8.76

8.77 El anillo circular de radio r cuelga de una rótula (no representada) que encaja en la pequeña bola situada en O. Deter-

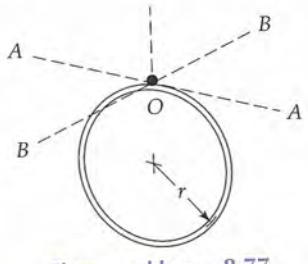


Figura problema 8.77

http://gratislibrospdf.com/

minar el cociente R entre los períodos de las pequeñas oscilaciones alrededor de los ejes B-B y A-A. Despreciar el leve descentrado, la masa y el rozamiento de la bola.

$$Resp.\ R = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

8.78 Hallar la expresión de la frecuencia natural f_n de las pequeñas oscilaciones en torno a O del brazo con contrapeso. La rigidez del resorte es k y su longitud se ajusta de modo que el brazo esté en equilibrio en la posición horizontal representada. Despreciar la masa del resorte y el brazo en comparación con m.

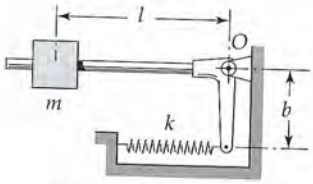


Figura problema 8.78

8.79 El mecanismo representado oscila en el plano vertical alrededor del eje de suspensión O. En la posición de equilibrio, $\theta = 0$, los resortes de igual rigidez están ambos comprimidos. Hallar la expresión del período τ de las pequeñas oscilaciones alrededor de O. El mecanismo tiene una masa m con centro de masa en G y el radio de giro del conjunto respecto a O es k_O.

$$Resp.\ \tau = \frac{2\pi k_O}{\sqrt{\frac{2kb^2}{m} + g\bar{r}}}$$

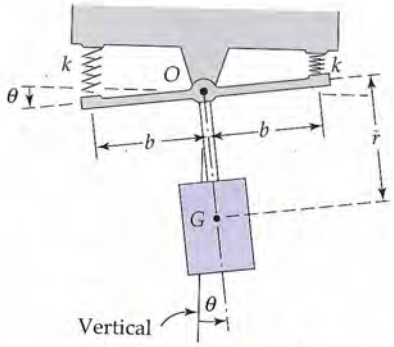


Figura problema 8.79

8.80 El volante está suspendido por su centro de un alambre que cuelga de un soporte fijo y sus oscilaciones de torsión en torno al eje vertical tienen un período τ_1, según las medidas realizadas. Seguidamente, en posiciones opuestas y a sendas distancias r del centro se colocan dos pequeñas pesas de masa m cada una. Con esto se mide un período τ_2 ligeramente mayor. Escribir el momento de inercia I del volante en función de las cantidades medidas.

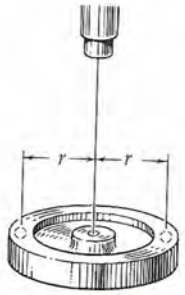


Figura problema 8.80

8.81 La placa cuadrada uniforme está suspendida en un plano horizontal por cuatro cables sujetos a los vértices que bajan desde los puntos A y B situados en la misma recta horizontal a una distancia b por encima de la placa. Hallar la expresión de la frecuencia f_n de las pequeñas oscilaciones de la placa alrededor del eje AB.

$$Resp.\ f_n = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3g}{13b}}$$

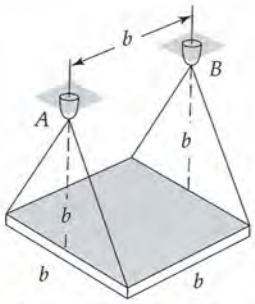


Figura problema 8.81

8.82 Cuando el motor eléctrico se acelera paulatinamente hasta su velocidad de régimen, a las 360 rpm se presentan unas

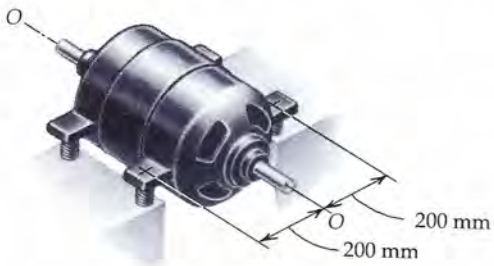


Figura problema 8.82

http://gratislibrospdf.com/

oscilaciones vibratorias bastante intensas de todo el motor en torno a *O-O*, lo que muestra que la velocidad citada corresponde a la frecuencia natural de las oscilaciones libres del motor. Si éste tiene una masa de 43 kg y un radio de giro respecto a *O-O* de 100 mm, hallar la rigidez de cada uno de los soportes elásticos iguales.

8.83 Hallar el valor m_{ef} de la masa del sistema (*b*) de modo que su frecuencia sea la misma que la del sistema (*a*). Téngase en cuenta que los dos resortes son iguales y que la rueda del sistema (*a*) es un cilindro macizo homogéneo de masa m_2. La cuerda no resbala sobre el cilindro.

Resp. $m_{ef} = m_1 + \frac{1}{2}m_2$

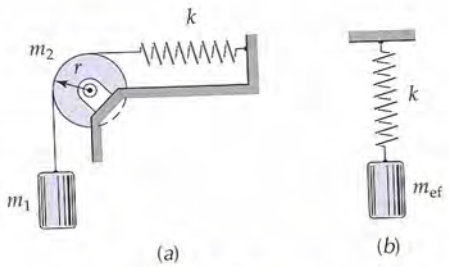


Figura problema 8.83

8.84 La varilla uniforme de masa *m* puede oscilar libremente en torno al eje *O*. Suponer pequeñas oscilaciones y hallar la expresión del índice de amortiguamiento ζ. ¿Para qué valor c_{cr} del coeficiente de amortiguamiento tendrá el sistema amortiguamiento crítico?

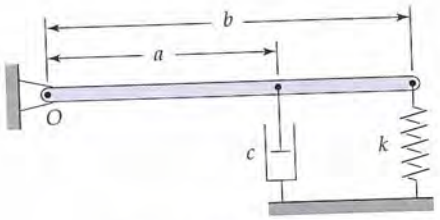


Figura problema 8.84

8.85 El centro de masa G del barco puede suponerse situado en el centro de la sección cuadrada equivalente de 15 m de lado. La altura metacéntrica *h*, determinada por la intersección *M* del plano de simetría del barco con la recta soporte de la fuerza resultante del empuje hidrostático aplicada en el centro de empuje *E*, es 0,9 m. Hallar el período τ de un balanceo completo del barco si la amplitud es pequeña y se desprecia la resistencia del agua. Se desprecian también las variaciones de la sección del barco hacia proa y hacia popa y se tratará el barco cargado como si fuera un bloque macizo de sección cuadrada.

Resp. $\tau = 12{,}95$ s.

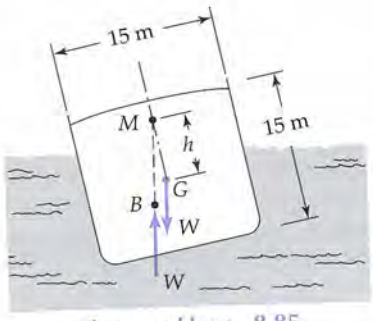


Figura problema 8.85

8.86 Se repite aquí el sistema del problema 8.45. Si la palanca *AB* tiene ahora una masa m_2 y un radio de giro k_O respecto al punto *O*, hallar las expresiones de la pulsación natural no amortiguada ω_n y del índice de amortiguamiento ζ en función de los parámetros del sistema dados. Suponer pequeñas oscilaciones. El coeficiente de amortiguamiento del amortiguador es *c*.

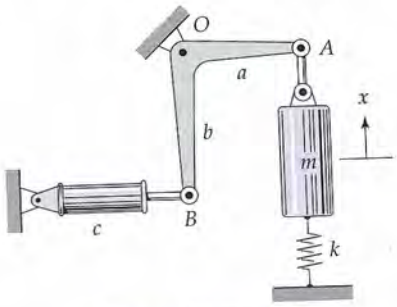


Figura problema 8.86

8.87 La lenteja esférica del péndulo de la figura oscila en el seno de un fluido que le ejerce una fuerza resistente de la forma

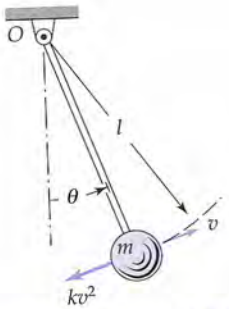


Figura problema 8.87

http://gratislibrospdf.com/

kv^2, donde k es una constante y v es la velocidad de la lenteja. Si la masa de ésta es m y pueden despreciarse la masa y la resistencia de la varilla y el rozamiento en la suspensión, deducir la ecuación del movimiento del péndulo para pequeñas oscilaciones.

$$Resp.\ \ddot{\theta} + \frac{kl}{m}|\dot{\theta}|\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

8.88 Al carro B se le da un movimiento armónico $x_B = b \operatorname{sen} \omega t$. Hallar la amplitud estacionaria θ de la oscilación periódica de la varilla delgada uniforme articulada en P al carro. Se supone que los ángulos son pequeños y se desprecia el rozamiento en el eje de suspensión. El resorte de torsión está sin deformar cuando $\theta = 0$.

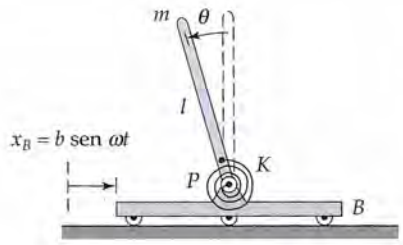


Figura problema 8.88

8.89 Dos barras uniformes iguales están soldadas formando un ángulo recto y están suspendidas, tal como se muestra, de un eje horizontal que pasa por O. Hallar la pulsación excitadora crítica ω_c del bloque B capaz de producir en el sistema unas oscilaciones de amplitud excesiva. La masa del conjunto soldado es m.

$$Resp.\ \omega_c = \sqrt{\frac{6}{5}\left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}\right)}$$

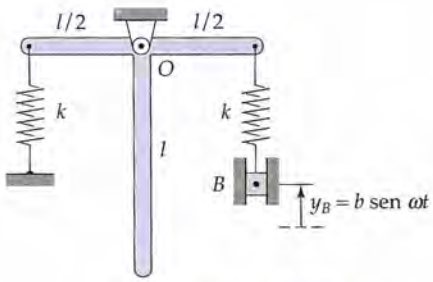


Figura problema 8.89

8.90 El cilindro macizo uniforme de masa m y radio r rueda sin deslizamiento durante su oscilación por la superficie circular de radio R. Si el movimiento está limitado a pequeñas amplitudes $\theta = \theta_0$, hallar el período τ de las oscilaciones. Hallar asimismo la velocidad angular ω del cilindro cuando atraviesa la recta vertical central. (*Advertencia*: No confundir ω con $\dot{\theta}$ ni con ω_n tal como se emplean en las ecuaciones definitorias. Adviértase también que θ no es el desplazamiento angular del cilindro.)

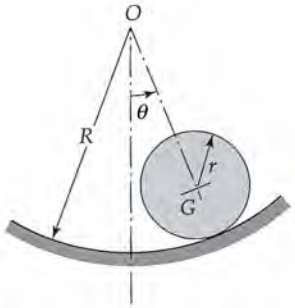


Figura problema 8.90

8.91 La polea cilíndrica maciza y homogénea tiene una masa m_1 y un radio r. Si el punto de fijación B está sometido al desplazamiento armónico indicado, escribir la ecuación de movimiento del sistema en función de la variable x. La cuerda que enlaza la masa m_2 al resorte superior no resbala en la polea.

$$Resp.\ (m_2 + \tfrac{1}{2}m_1)\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = k_1 b \cos \omega t$$

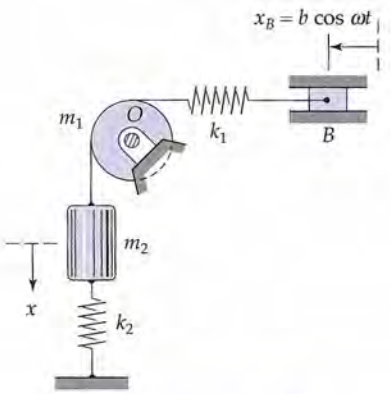


Figura problema 8.91

8.92 Se repite aquí el "maniquí articulado" del problema 6.118. Se supone que la articulación de la cadera O permanece en contacto con el automóvil y el torso, situado por encima de la cadera, se trata como si fuera un cuerpo rígido de masa m. El centro de masa del torso está en G y el radio de giro del mismo respecto a O es k_O. Un resorte de torsión interno ejerce un par de momento $M = K\theta$ sobre el torso, siendo K la constante del resorte y θ la desviación angular medida desde la posición ver-

http://gratislibrospdf.com/

tical inicial. Si el vehículo se detiene bruscamente bajo una desaceleración constante a, deducir la ecuación diferencial del movimiento del torso antes de chocar con el tablero de instrumentos.

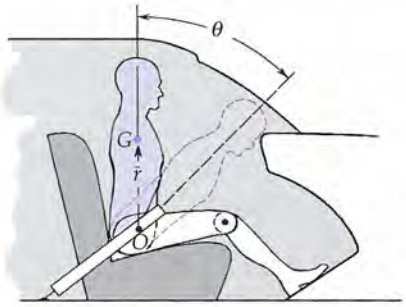


Figura problema 8.92

▶ 8.93 En la figura se ilustran los elementos que componen la suspensión trasera tipo "eje oscilante" de los automóviles. El diferencial D está unido rígidamente al chasis del vehículo. Los semiejes están articulados en sus extremos interiores (punto O del semieje representado) y están unidos rígidamente a las ruedas. Otros componentes de la suspensión, que no se representan, limitan el movimiento de la rueda al plano de la figura. El conjunto de rueda y neumático tiene una masa $M = 45$ kg y su momento de inercia respecto a un eje diametral que pase por el centro de masa G es 1,4 kg·m^2. La masa del semieje es despreciable. La constante del resorte y el coeficiente de amortiguamiento del amortiguador son $k = 8{,}75$ kN/m y $c = 2600$ N·s/m, respectivamente. Si se presenta un desequilibrio estático en la cubierta de la rueda, como el que supone la masa adicional concentrada $m = 0{,}25$ kg que se indica, hallar la velocidad angular ω cuyo efecto sería excitar el sistema de suspensión a su frecuencia natural no amortiguada. ¿Cuál sería la correspondiente celeridad v del vehículo? Hallar el índice de amortiguamiento ζ. Suponer pequeñas oscilaciones y despreciar los efectos giroscópicos y las vibraciones del chasis. Para eludir las complicaciones asociadas con la fuerza normal variable que la calzada ejerce sobre cada rueda, se tratará el vehículo como si estuviera despegado del suelo con la rueda suspendida libremente en el aire.

Resp. $\omega = 10{,}21$ rad/s, $v = 12{,}87$ km/h, $\zeta = 1{,}517$

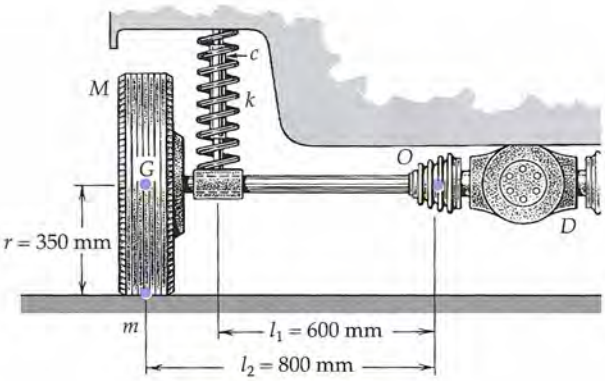


Figura problema 8.93

▶ 8.94 Para la suspensión del automóvil del problema 8.93, hallar la amplitud X del movimiento vertical del punto G si la velocidad angular de la rueda corresponde a (*a*) la frecuencia natural no amortiguada del sistema y (*b*) a una celeridad del vehículo de 90 km/h. Conciliar ambos resultados.

Resp. (*a*) $X = 0{,}611$ mm, (*b*) $X = 1{,}731$ mm

8.5 MÉTODOS ENERGÉTICOS

En los apartados 8.2 a 8.4 hemos deducido y resuelto las ecuaciones del movimiento de puntos materiales y cuerpos rígidos oscilantes aplicando la segunda ley de Newton al diagrama para sólido libre correspondiente a cada caso. Con este método pudimos tener en cuenta los efectos de todas las fuerzas actuantes sobre el cuerpo, incluidas las amortiguadoras por rozamiento. Existen numerosos problemas en los que el efecto del amortiguamiento es pequeño y puede despreciarse, con lo que la energía del sistema prácticamente se conserva. En tales casos el principio de conservación de la energía puede aplicarse con ventaja para establecer la ecuación del movimiento y cuando el movimiento es armónico simple, para determinar la frecuencia o la pulsación de las oscilaciones.

Para ilustrar este otro método empecemos considerando el sistema de la figura 8.17, constituido por el cuerpo de masa m unido al resorte de rigidez k que oscila en el plano vertical. Como antes, lo más práctico es medir la variable x

http://gratislibrospdf.com/

del movimiento a partir de la posición de equilibrio. Con ésta como referencia, la energía potencial total del sistema, elástica más gravitatoria, es

$$V = V_e + V_g = \tfrac{1}{2}k(x + \delta_{st})^2 - \tfrac{1}{2}k\delta_{st}^2 - mgx$$

donde $\delta_{st} = mg/k$ es el desplazamiento estático inicial. Con la sustitución de mg por $\delta_{st}k$ y simplificando queda

$$V = \tfrac{1}{2}kx^2$$

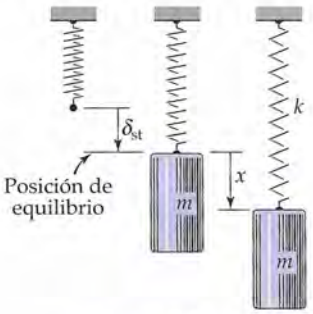


Figura 8.17

Así pues, la energía total del sistema se hace

$$T + V = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Como $T + V$ es constante en los sistemas conservativos, su derivada temporal es nula y, por consiguiente,

$$\frac{d}{dt}(T + V) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

Dividiendo por $\dot{x}$ resulta por fin la ecuación diferencial de movimiento

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

que es igual a la 8.1 deducida en el apartado 8.2 para el mismo sistema que el de la figura 8.17.

La conservación de la energía puede asimismo emplearse para determinar la pulsación o el período de las oscilaciones de los sistemas conservativos lineales sin necesidad de deducir y resolver la ecuación de su movimiento. En un sistema que ejecute oscilaciones armónicas simples en torno a su posición de equilibrio, desde la que se mide la elongación x, la energía varía desde una cinética máxima y potencial nula en la posición $x = 0$, hasta una cinética nula con potencial máxima en la posición de desplazamiento máximo $x = x_{max}$. O sea, podemos escribir

$$T_{max} = V_{max}$$

La energía cinética máxima es $\frac{1}{2}m(\dot{x}_{max})^2$, y la energía potencial máxima es $\frac{1}{2}k(x_{max})^2$. En el caso del oscilador armónico de la figura 8.17 sabemos que la elongación puede escribirse $x = x_{max}\,\mathrm{sen}(\omega t + \psi)$, por lo que la velocidad máxima es $\dot{x}_{max} = \omega_n x_{max}$. Por tanto, podemos escribir

$$\tfrac{1}{2}m(\omega_n x_{max})^2 = \tfrac{1}{2}k(x_{max})^2$$

donde x_{max} es la elongación máxima, para la que es máxima la energía potencial. De esta igualdad de energías se obtiene enseguida

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

Este procedimiento directo de determinación de la pulsación puede emplearse con cualquier movimiento oscilatorio lineal no amortiguado.

La ventaja principal del método energético en el caso de las oscilaciones libres de los sistemas conservativos reside en que hace innecesario desmembrar

http://gratislibrospdf.com/

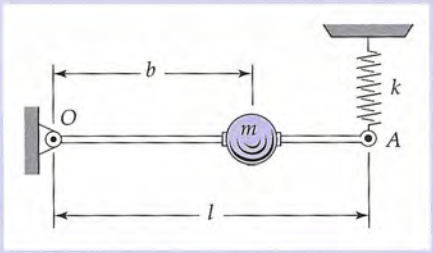
el sistema y recontar todas las fuerzas que actúan en cada miembro. En los apartados 3.7, 6.6 y 6.7 vimos que, para un sistema de cuerpos interconectados, un diagrama de fuerzas activas nos permitía calcular el trabajo U' de las fuerzas exteriores activas para igualarlo a la variación de la energía mecánica total, $T + V$, del sistema. Resulta entonces que para un sistema mecánico conservativo de componentes interconectados que tenga un solo grado de libertad, al ser $U' = 0$ podemos obtener su ecuación de movimiento sin más que igualar a cero la derivada temporal de su energía mecánica total (que es constante), o sea

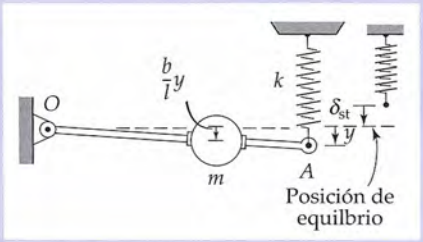
$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

Aquí $V = V_e + V_g$ es la suma de las energías potenciales elásticas y gravitatoria del sistema. Además, tanto para un sistema mecánico interconectado como para un cuerpo único, la pulsación de las oscilaciones naturales se obtiene igualando la expresión de su energía cinética total máxima a la expresión de su energía potencial máxima, tomando la posición de equilibrio como origen de energías potenciales. Este método para determinar la pulsación natural es válido únicamente cuando pueda establecerse claramente que el movimiento del sistema es armónico simple.

PROBLEMA TIPO 8.10

La esferita de masa m está montada en la varilla liviana articulada en O y sujeta por el extremo A al resorte vertical de rigidez k. El extremo A se desplaza una pequeña distancia y_0 por debajo de la posición de equilibrio horizontal y luego se suelta. Por el método de la energía deducir la ecuación diferencial del movimiento para pequeñas oscilaciones de la varilla y determinar la expresión de la pulsación ω_n de sus oscilaciones naturales. El amortiguamiento es despreciable.





Solución. Midiendo desde la posición de equilibrio el desplazamiento y del extremo de la varilla, para pequeños valores de y la energía potencial en una posición cualquiera podemos escribirla

(1) $$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}k(y + \delta_{st})^2 - \frac{1}{2}k\delta_{st}^2 - mg\left(\frac{b}{l}\,y\right)$$

donde δ_{st} es la deformación estática del resorte en el estado de equilibrio. Pero la fuerza en el resorte, si tomamos momentos respecto a O, es $(b/l)mg = k\delta_{st}$. Sustituyendo este valor en la expresión de V y simplificando queda

(2) $$V = \frac{1}{2}ky^2$$

(1) **Para grandes valores de y, el movimiento circular del extremo de la varilla haría que la expresión empleada para el alargamiento del resorte resultase excesivamente errónea.**

(2) **Obsérvese aquí, una vez más, la sencillez de la expresión de la energía potencial cuando se toma como origen la posición de equilibrio.**

http://gratislibrospdf.com/

Para una posición desplazada cualquiera, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}\,\dot{y}\right)^2$$

donde vemos que el desplazamiento vertical de m es $(b/l)y$. Entonces, como la suma de las energías es constante, su derivada temporal será cero y tenemos

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}\,\dot{y}\right)^2 + \frac{1}{2}ky^2\right] = 0$$

que nos da

$$\ddot{y} + \frac{l^2}{b^2}\,\frac{k}{m}\,y = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

donde $\dot{y}$ ha desaparecido. Comparando esta ecuación con la 8.2, podemos escribir directamente que la pulsación del movimiento es

$$\omega_n = \frac{l}{b}\sqrt{k/m} \qquad \textit{Resp.}$$

Otra posibilidad sería igualar la energía cinética máxima, que se da en $y = 0$, a la energía potencial máxima, que se da en $y = y_0 = y_{\max}$, donde la elongación es máxima. O sea,

$$T_{\max} = V_{\max} \qquad \text{da} \qquad \frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}\,\dot{y}_{\max}\right)^2 = \frac{1}{2}k{y_{\max}}^2$$

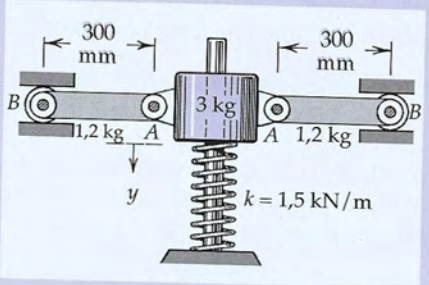
Sabiendo que se trata de una oscilación armónica que puede expresarse como $y = y_{\max}$ sen $\omega_n t$, tenemos $\dot{y}_{\max} = y_{\max}\omega_n$. Llevando esta expresión a la igualdad energética anterior resulta

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}\,y_{\max}\omega_n\right)^2 = \frac{1}{2}k{y_{\max}}^2 \qquad \text{así que} \qquad \omega_n = \frac{l}{b}\sqrt{k/m} \qquad \textit{Resp.}$$

como antes.

PROBLEMA TIPO 8.11

Hallar la pulsación natural ω_n de las oscilaciones verticales del collar de 3 kg al que están articuladas las dos barras uniformes de 1,2 kg, las cuales pueden tratarse como si fueran varillas esbeltas. La rigidez del resorte, que está fijo tanto al collar como a la base, es $k = 1{,}5$ kN/m y las barras están ambas horizontales en la posición de equilibrio. Un pequeño rodillo montado en los extremos B de las barras permite que los extremos A acompañen al collar en su movimiento. La resistencia por rozamiento es despreciable.



http://gratislibrospdf.com/

Solución. En la posición de equilibrio, la compresión P en el resorte es igual al peso del collar de 3kg más la mitad del peso de cada barra, o sea, $P = 3(9{,}81) + 2(0{,}5)(1{,}2)(9{,}81) = 41{,}20$ N. El correspondiente acortamiento estático del resorte es $\delta_{st} = P/k = 41{,}20/1{,}5(10^3) = 27{,}47(10^{-3})$ m. Midiendo la variable de desplazamiento y a partir de la posición de equilibrio, a la que asignamos energía potencial cero, la energía potencial de cada miembro para una posición desplazada cualquiera será

$$(\text{Resorte}) \qquad V_e = \frac{1}{2}k(y+\delta_{st})^2 - \frac{1}{2}k\delta_{st}^2 = \frac{1}{2}ky^2 + k\delta_{st}y$$

$$= \frac{1}{2}(1{,}5)(10^3)y^2 + 1{,}5(10^3)(27{,}47)(10^{-3})y$$

$$= 750y^2 + 41{,}20y \text{ J}$$

$$(\text{Collar}) \qquad V_g = -m_c g y = -3(9{,}81)y = -29{,}43y \text{ J}$$

(1) $$(\text{Cada barra}) \qquad V_g = -m_l g\frac{y}{2} = -1{,}2(9{,}81)\frac{y}{2} = -5{,}89y \text{ J}$$

(1) Adviértase que el centro de masa de cada barra desciende sólo la mitad que el collar.

La energía potencial total del sistema vale pues

(2) $$V = 750y^2 + 41{,}20y - 29{,}43y - 2(9{,}81)y = 750y^2 \text{ J}$$

(2) Recalquemos otra vez que la medición de la variable y a partir de la posición de equilibrio da por resultado que la expresión de la energía potencial sea simplemente $V = \frac{1}{2}ky^2$.

La energía cinética máxima se da en la posición de equilibrio, que es donde la velocidad $\dot{y}$ del collar posee su máximo valor. Para las pequeñas oscilaciones (3) del collar, cada extremo B de las barras prácticamente no se mueve, por lo que las barras pueden tratarse cada una como si rotaran oscilando en torno a cada punto B, tomado como fijo, con una velocidad angular $\dot{y}/0{,}3$. Así pues, la energía cinética de cada pieza es

(3) Es indispensable recordar aquí lo que sabemos acerca de la cinemática del cuerpo rígido.

$$(\text{Collar}) \qquad T = \frac{1}{2}m_c\dot{y}^2 = \frac{3}{2}\dot{y}^2 \text{ J}$$

$$(\text{Cada barra}) \qquad T = \frac{1}{2}I_B\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_l l^2\right)(\dot{y}/l)^2 = \frac{1}{6}m_l\dot{y}^2$$

$$\frac{1}{6}(1{,}2)\dot{y}^2 = 0{,}2\dot{y}^2$$

Por tanto, la energía cinética del collar y ambas barras es

$$T = \frac{3}{2}\dot{y}^2 + 2(0{,}2\dot{y}^2) = 1{,}9\dot{y}^2$$

Expresando el movimiento armónico por $y = y_{max}$ sen $\omega_n t$, tenemos $\dot{y}_{max} = y_{max}\omega_n$, con lo que la igualdad de energías resulta ser

(4) (5) $$1{,}9(y_{max}\omega_n)^2 = 750y_{max}^2 \qquad \text{o sea} \qquad \omega_n = \sqrt{750/1{,}9} = 19{,}87 \text{ Hz} \quad \textit{Resp.}$$

(4) Para que el lector aprecie exactamente las ventajas de aplicar el teorema de las fuerzas vivas a éste y otros problemas similares de sistemas interconectados, le incitamos a que examine los pasos necesarios para resolverlo aplicando los teoremas de la cantidad de movimiento y el momento cinético a las piezas separadas.

(5) Si las oscilaciones fueran amplias, las barras ya no podrían considerarse rotando en torno a puntos fijos. En tal caso, hallaríamos que la velocidad angular de cada barra sería $\dot{y}/\sqrt{0{,}09 - y^2}$, que produciría una respuesta alineal que ya no podría representarse mediante $y = y_{max}$sen ωt.

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMAS

(Resolver los problemas siguientes por el método del apartado 8.5)

Problemas introductorios

8.95 Deducir la ecuación diferencial del movimiento del péndulo cargado por resortes compuesto de una partícula y una varilla rígida sin masa. Suponer pequeñas oscilaciones.

Resp. $\ddot{\theta} + \left(\dfrac{2kb^2 + mgl}{ml^2}\right)\theta = 0$

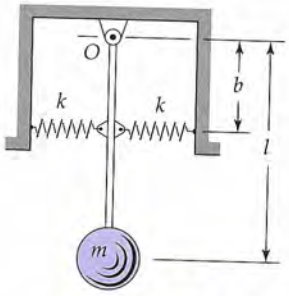


Figura problema 8.95

8.96 La rueda de rayos de radio r, masa m y radio de giro centroidal $\bar{k}$ rueda sin deslizamiento por el plano inclinado. Hallar la frecuencia de oscilación natural y analizar los casos límites de $\bar{k} = 0$ y $\bar{k} = r$.

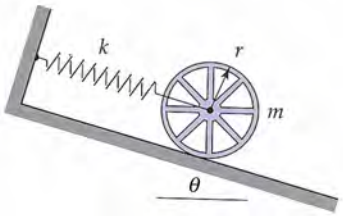


Figura problema 8.96

8.97 Una varilla uniforme de masa m y longitud l está soldada por un extremo a un aro circular sin peso de radio l. El otro extremo coincide con el centro del aro. Hallar el período τ de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición vertical de la varilla si el aro rueda sin deslizamiento por la superficie horizontal.

Resp. $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l}{3g}}$

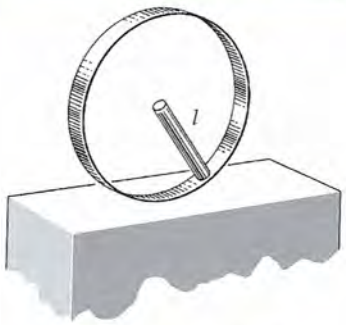


Figura problema 8.97

8.98 El disco tiene un momento de inercia másico I_O respecto a O y sobre él actúa un resorte de torsión de constante K. La posición de los pequeños cursores, de masa m cada uno, es ajustable. Hallar el valor de x para el cual el sistema tiene un período dado τ.

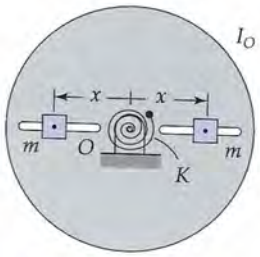


Figura problema 8.98

8.99 Se repite aquí el sistema del problema 8.22. Hallar el período de la oscilación vertical por el método de este apartado. Cada resorte tiene una rigidez de 1200 N/m.

Resp. $\tau = 0{,}321$ s

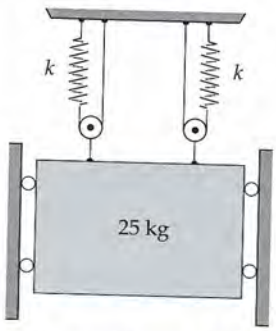


Figura problema 8.99

http://gratislibrospdf.com/

8.100 Hallar la pulsación natural ω_n del sistema representado. Se desprecia la masa de las poleas y el rozamiento en las mismas.

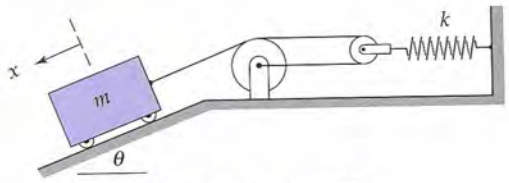


Figura problema 8.100

Problemas representativos

8.101 Calcular la frecuencia f_n de la oscilación vertical del sistema representado. La polea de 40 kg tiene un radio de giro de 200 mm respecto a su centro O.

Resp. $f_n = 1{,}519$ Hz

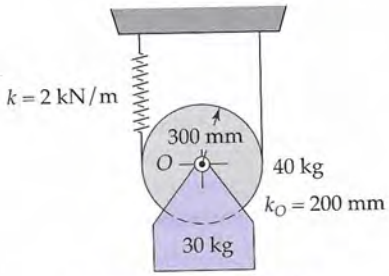


Figura problema 8.101

8.102 El cilindro circular homogéneo del problema 8.90, que se repite aquí, rueda sin deslizamiento por la pista de radio R. Hallar el período τ de las pequeñas oscilaciones.

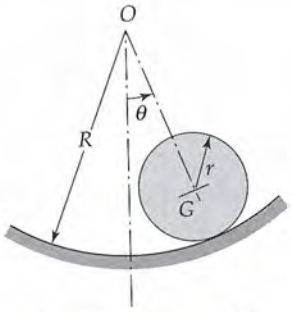


Figura problema 8.102

8.103 Los extremos de la barra uniforme de masa m se deslizan libremente, tal como se muestra, por las ranuras vertical y horizontal. Si la barra se halla en equilibrio estático cuando $\theta = 0$, hallar la pulsación natural ω_n de sus pequeñas oscilaciones. ¿Qué condición hay que imponer a la constante k del resorte para que haya oscilaciones?

Resp. $\omega_n = \sqrt{\dfrac{6k}{m} - \dfrac{3}{2}\dfrac{g}{l}}$, $k > \dfrac{mg}{4l}$

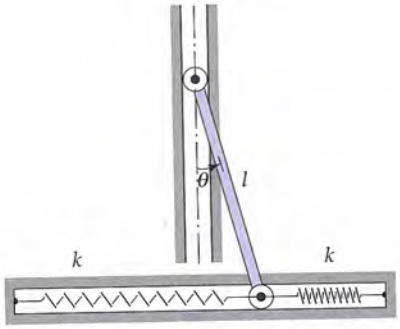


Figura problema 8.103

8.104 La varilla esbelta uniforme de longitud l y masa m_2 está fija al disco uniforme de radio $l/5$ y masa m_1. Si el sistema está representado en su posición de equilibrio, hallar la pulsación natural ω_n y la velocidad angular máxima ω de las pequeñas oscilaciones de amplitud θ_0 en torno al eje O.

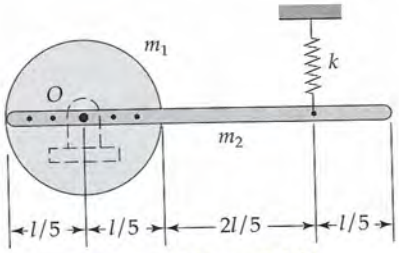


Figura problema 8.104

8.105 Hallar el período τ de las oscilaciones verticales del sistema compuesto del bastidor de 140 kg y dos poleas de 80 kg,

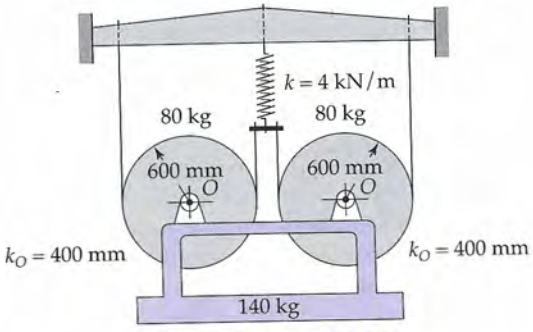


Figura problema 8.105

http://gratislibrospdf.com/

de un radio de giro $k_O = 400$ mm cada una. Los cables flexibles no resbalan en las poleas.

Resp. $\tau = 0{,}957$ s

8.106 Hallar la frecuencia natural f_n de la oscilación vertical del sistema representado.

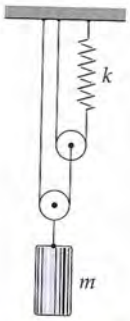


Figura problema **8.106**

8.107 Deducir la frecuencia natural f_n del sistema compuesto de los dos cilindros circulares homogéneos, de masa M cada uno, y la biela AB de masa m. Suponer pequeñas oscilaciones.

Resp. $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{mgr_0}{3Mr^2 + m(r-r_0)^2}}$

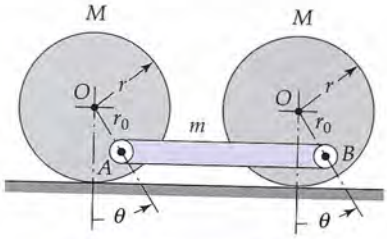


Figura problema **8.107**

8.108 El panel delgado homogéneo de masa m está embisagrado a un eje fijo que forma un ángulo α con la vertical en torno al cual puede oscilar libremente. Hallar el período de las pequeñas oscilaciones.

8.109 El bloque de 12 kg descansa sobre las dos barras de 5 kg, cargadas como se muestra por sendos resortes de torsión de rigidez $K = 500$ N·m/rad cada uno. Esta rigidez basta para que la posición representada sea de equilibrio estable. Hallar la frecuencia natural f_n de las pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio.

Resp. $f_n = 1{,}496$ Hz

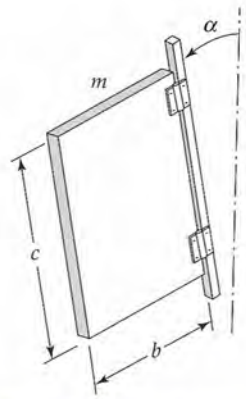


Figura problema **8.108**

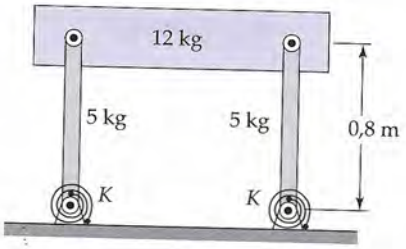


Figura problema **8.109**

8.110 Cada una de las dos correderas A tiene una masa m y está obligada a moverse en las ranuras radiales lisas del volante, que es accionado a una velocidad angular constante ω. Cada uno de los cuatro resortes tiene una rigidez k. ¿Es correcto afirmar que el sistema compuesto por el volante, los bloques y los resortes posee una energía constante? Justificar la respuesta.

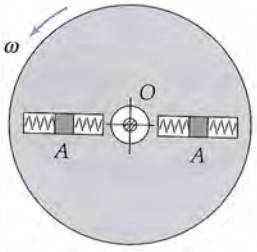


Figura problema **8.110**

8.111 Hallar el período τ del sistema si la pieza articulada AB está horizontal en la posición de equilibrio estático representa-

http://gratislibrospdf.com/

da. El radio de giro de AB respecto a O es k_O y su centro de masa es el punto G. Suponer pequeñas oscilaciones.

$$Resp.\ \tau = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + \frac{k_O^2}{a^2} m_2}{k_1 + \frac{b^2}{a^2} k_2}}$$

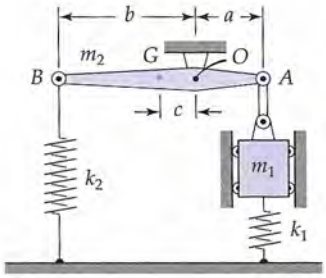


Figura problema 8.111

8.112 En la figura se representa la suspensión delantera de un automóvil. La rigidez de cada uno de los resortes espirales es 46,8 kN/m. Si la masa del travesaño delantero y la porción equivalente de carrocería unida al extremo delantero es 800 kg, determinar la frecuencia natural de las oscilaciones verticales del conjunto de travesaño y carrocería en ausencia de amortiguadores. (*Indicación*: Para relacionar la deformación de los resortes con el desplazamiento del travesaño y la carrocería, suponer que el travesaño está fijo y que el suelo y las ruedas se mueven verticalmente.)

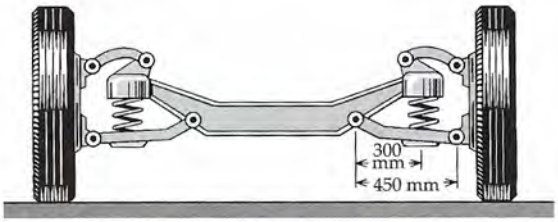


Figura problema 8.112

8.113 Si el bastidor cargado por resortes recibe una leve perturbación vertical estando en la posición de equilibrio representada, hallar su frecuencia de vibración natural f_n. La masa del miembro superior es 24 kg y la del miembro inferior es despreciable. La rigidez de cada resorte es de 9 kN/m.

Resp. $f_n = 2{,}62$ Hz

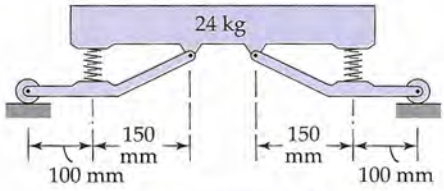


Figura problema 8.113

8.114 La cáscara semicilíndrica de espesor despreciable, pero uniforme, y radio r oscila con pequeña amplitud sobre la superficie horizontal. Si no hay deslizamiento, hallar el período τ de las oscilaciones.

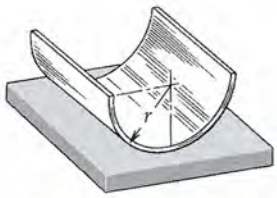


Figura problema 8.114

▶ **8.115** La tolva de cemento tiene una masa total $m = 5500$ kg y está siendo descendida a 1,2 m/s cuando el tambor izador se detiene repentinamente. Hallar el desplazamiento descendente adicional Δh de la tolva y la frecuencia f_n de la consiguiente vibración de la tolva para $h = 12$ m. La longitud del cable de acero de 25 mm de diámetro es $L = 15$ m entre la tolva y el tambor. El módulo elástico del acero es $E = 200$ GPa. (Recuérdese que $E = \sigma/\epsilon$, donde el esfuerzo σ es fuerza por unidad de superficie y la deformación ϵ es el alargamiento elástico por unidad de longitud.)

Resp. $\Delta h = 46{,}7$ mm, $f_n = 4{,}09$ Hz

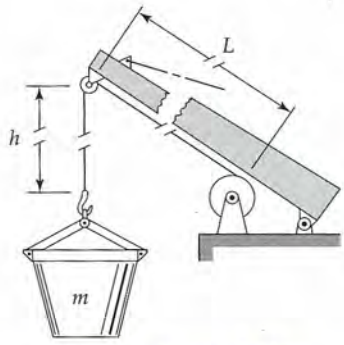


Figura problema 8.115

http://gratislibrospdf.com/

▶ 8.116 En el cilindro de radio R se practica, como se muestra, un orificio de radio $R/4$ para formar un cuerpo de masa m. Si éste rueda sin deslizamiento por la superficie horizontal, hallar el período τ de sus pequeñas oscilaciones.

Resp. $\tau = 41{,}4\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

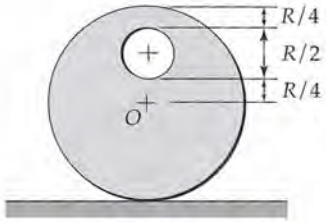


Figura problema 8.116

8.6 REPASO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Al estudiar las oscilaciones de los puntos materiales y los cuerpos rígidos a lo largo de este capítulo 8, hemos visto que el tema es sencillamente una aplicación directa de los principios fundamentales de la Dinámica expuestos y tratados a lo largo de los capítulos 3 y 6. En éstos establecimos cuál es el comportamiento dinámico de un cuerpo en cada instante y, asimismo, determinamos qué cambios experimenta en su movimiento después de intervalos finitos de desplazamiento o tiempo. Este capítulo 8, por el contrario, ha tratado de la resolución de las ecuaciones diferenciales que definen el movimiento, al objeto de expresar como función del tiempo un desplazamiento lineal o angular. Esta información es de importancia crítica en numerosos problemas técnicos.

El estudio de la respuesta en el tiempo de los puntos materiales lo hemos dividido en las dos categorías de movimiento: libre y forzado, con las subdivisiones adicionales de amortiguamiento despreciable o apreciable. Hemos visto que el índice de amortiguamiento ζ es un parámetro adecuado para determinar la naturaleza de las oscilaciones no forzadas, aunque con amortiguamiento viscoso. Lo más importante de las enseñanzas asociadas a la excitación armónica es que el excitar a un sistema ligeramente amortiguado con una fuerza cuya frecuencia sea próxima a la natural o propia del sistema puede causar en éste unas oscilaciones de amplitud excesiva, situación ésta llamada de resonancia y que habitualmente hay que evitar cuidadosamente.

Al estudiar las oscilaciones de un cuerpo rígido, vimos que la ecuación del movimiento presenta una forma igual a la del movimiento de un punto material. Mientras que las oscilaciones de un punto material pueden describirse completamente mediante las ecuaciones que rigen el movimiento lineal, las oscilaciones de un cuerpo rígido suelen requerir las ecuaciones de la dinámica de la rotación.

En el apartado 8.5, final de este capítulo 8, descubrimos de qué modo el método energético puede simplificar la resolución de los problemas de oscilaciones libres en los que pueda despreciarse el amortiguamiento. En estos casos se hace la hipótesis de que la energía del sistema permanece constante. Luego, al igualar a cero su derivada temporal se obtiene directamente la ecuación diferencial del movimiento del sistema. El método energético permite asimismo analizar un sistema conservativo sin desmembrarlo. Ahora bien, cuando la disipación de la energía mecánica no pueda despreciarse, hay que recurrir a las leyes del movimiento en términos de fuerza, masa y aceleración.

En todo este capítulo, la atención la hemos ceñido a los sistemas de un solo grado de libertad, es decir, a aquellos cuya posición queda definida por una

http://gratislibrospdf.com/

única variable. Es este el caso de gran cantidad de problemas técnicos. Si un sistema posee n grados de libertad, posee asimismo n frecuencias naturales. Entonces, si una fuerza armónica se aplica a uno de estos sistemas que esté ligeramente amortiguado, habrá n frecuencias excitadoras capaces de provocar movimientos de tipo resonante. Existe un procedimiento, llamado análisis modal, mediante el cual un sistema complejo de n grados de libertad puede reducirse a n sistemas de un solo grado de libertad. Por esta causa, el conocimiento profundo del contenido de este capítulo es esencial para el estudio ulterior de las vibraciones.

PROBLEMAS DE REPASO

8.117 El proyectil de 0,1 kg se dispara contra el bloque de 10 kg que inicialmente se encuentra en reposo sin que en el resorte actúe fuerza alguna. El resorte tiene ambos extremos sujetos. Calcular la elongación horizontal máxima X del resorte y el período de la oscilación subsiguiente del bloque con el proyectil incrustado.

Resp. $X = 0{,}287$ m, $\tau = 0{,}365$ s

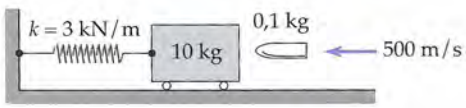


Figura problema 8.117

8.118 Hallar la frecuencia natural f_n de las oscilaciones verticales del cilindro de masa m. Despreciar la del cilindro escalonado y el rozamiento en el mismo.

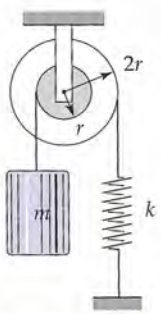


Figura problema 8.118

8.119 El disco uniforme cuelga de una rótula (no representada) que encaja en la pequeña bola O. Hallar el período del pequeño movimiento si el disco se balancea libremente alrededor (*a*) del eje A-A y (*b*) del eje B-B. Despreciar el leve descentrado, la masa y el rozamiento de la bola.

Resp. $(a)\,\omega_n = 2\sqrt{\frac{g}{5r}}$, $(b)\,\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$

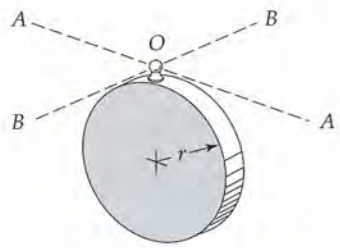


Figura problema 8.119

8.120 Hallar el valor del coeficiente de amortiguamiento c para el cual el sistema está críticamente amortiguado si $k = 70$ kN/m y $m = 90$ kg.

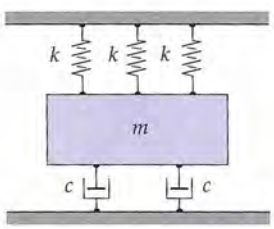


Figura problema 8.120

8.121 El bloque de masa M está suspendido mediante las dos varillas delgadas uniformes de masa m cada una. Hallar la pulsación natural ω_n de las pequeñas oscilaciones del sistema.

Resp. $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}\left(\frac{M+m}{M+\frac{2}{3}m}\right)}$

http://gratislibrospdf.com/

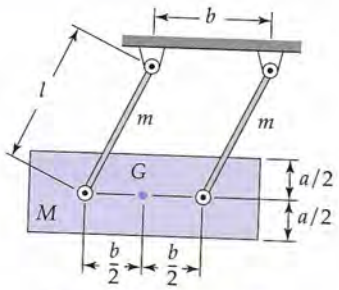


Figura problema 8.121

8.122 El bastidor triangular está construido con una varilla delgada uniforme y oscila en torno a un eje horizontal que pasa por O. Hallar la pulsación excitadora crítica ω_c del bloque B que dé por resultado unas oscilaciones del conjunto propensas a crecer demasiado. La masa total del bastidor es m.

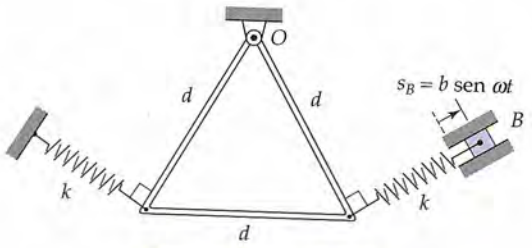


Figura problema 8.122

8.123 Hallar el período τ de las pequeñas oscilaciones del conjunto compuesto de dos barras livianas y dos masas puntuales m. Examinar la solución cuando el ángulo α tiende a los valores 0 y 180°.

$$\text{Resp. } \tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

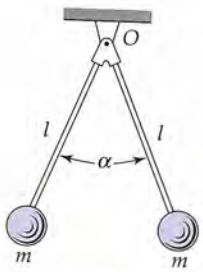


Figura problema 8.123

8.124 La placa triangular uniforme pivota libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por O. Hallar la frecuencia natural de las pequeñas oscilaciones.

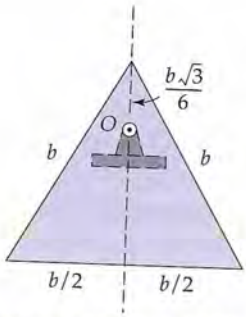


Figura problema 8.124

8.125 Calcular el índice de amortiguamiento ζ del sistema representado si la masa y el radio de giro del cilindro escalonado son $m = 9$ kg y $\bar{k} = 140$ mm, la constante del resorte es $k = 2{,}60$ kN/m y el coeficiente de amortiguamiento del cilindro hidráulico es $c = 30$ N·s/m. El cilindro rueda sin deslizamiento sobre su radio $r = 150$ mm y el resorte resiste tanto a la tracción como a la compresión.

Resp. $\zeta = 0{,}0717$

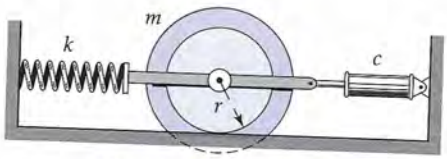


Figura problema 8.125

8.126 Hallar la máxima amplitud x_0 con la que el disco uniforme puede rodar sin deslizamiento por la superficie.

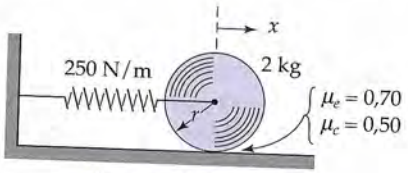


Figura problema 8.126

8.127 El cilindro A de radio r, masa m y radio de giro $\bar{k}$ es accionado por un sistema de cable y resortes unido al cilindro motor B, que oscila como se indica. Si los cables no resbalan en los cilindros y si ambos resortes se tensan hasta el punto de no aflojarse durante un ciclo, hallar la expresión de la amplitud máxima θ_{max} de la oscilación estacionaria del cilindro A.

$$\text{Resp. } \theta_{max} = \phi_0\frac{r_0/r}{1-(\omega/\omega_n)^2} \text{ donde } \omega_n = \frac{r}{\bar{k}}\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

http://gratislibrospdf.com/

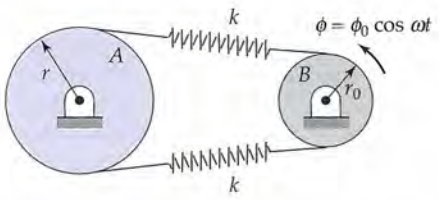


Figura problema 8.127

8.128 Un motor experimental de 220 kg está instalado en un banco de pruebas con soportes elásticos en A y B, de una rigidez de 105 kN/m cada uno. El radio de giro del motor respecto a su centro de masa G es 115 mm. Con el motor parado, calcular la frecuencia natural $(f_n)_y$ de la vibración vertical y la frecuencia $(f_n)_\theta$ de rotación en torno a G. Si se impide el movimiento vertical y se presenta un leve desequilibrio a la rotación, ¿a qué velocidad N no deberá hacerse funcionar el motor?

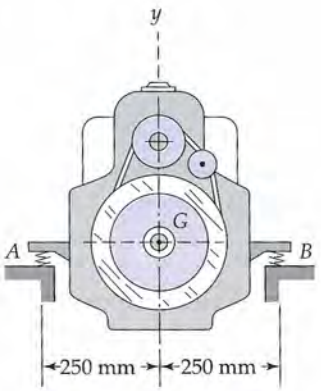


Figura problema 8.128

8.129 La barra uniforme de masa M y longitud l tiene en cada extremo un pequeño rodillo de masa m desprovisto de rozamiento. Hallar el período τ de las pequeñas oscilaciones del sistema sobre la pista curva.

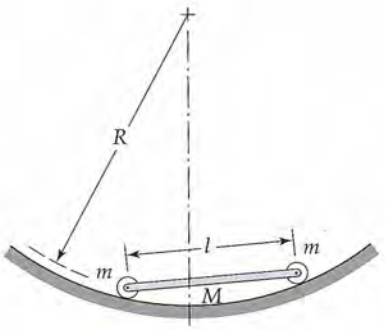


Figura problema 8.129

$$Resp.\ \tau = 2\pi \sqrt{\frac{2mR^2 + MR^2 - \frac{1}{6}Ml^2}{g\sqrt{4R^2 - l^2}(m + M/2)}}$$

8.130 Un bala de 60 g se dispara con una velocidad de 300 m/s contra el bloque de 5 kg montado en la viga en voladizo, sin peso pero rígida. El proyectil se incrusta en el bloque, que se observa que empieza a vibrar con una frecuencia de 4 Hz. Calcular el desplazamiento de vibración máximo A y determinar la constante de amortiguamiento c en N·s/m sabiendo que el cociente entre dos amplitudes separadas diez ciclos completos es 0,6. Despreciar la pérdida de energía durante el primer cuarto de ciclo.

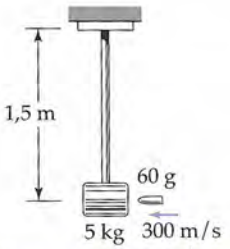


Figura problema 8.130

8.131 Un máquina de 200 kg descansa sobre cuatro soportes de suelo, cada uno de los cuales tiene una constante k = 250 kN/m y un coeficiente de amortiguamiento viscoso efectivo c = 1000 N·s/m. Se sabe que el suelo vibra verticalmente con una frecuencia de 24 Hz. ¿Cuál sería el efecto sobre la oscilación absoluta de la máquina si los soportes se reemplazaran por otros que tuvieran la misma constante k pero un coeficiente de amortiguamiento efectivo doble?

Resp. ¡La amplitud aumentaría en un 28,9%!

8.132 El sistema compuesto de cuatro varillas livianas rígidas y el cilindro de masa m se representa en su posición de

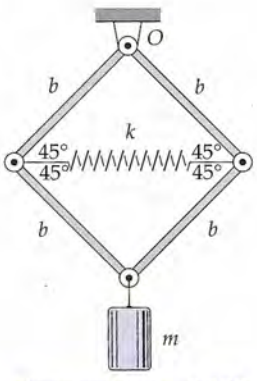


Figura problema 8.132

http://gratislibrospdf.com/

equilibrio. Hallar la pulsación natural ω_n de las oscilaciones verticales de pequeña amplitud del cilindro. (*Indicación*: Retener sólo los términos de primer orden.)

Resp. $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{b}\sqrt{2}}$

*PROBLEMAS ESPECIALES PARA ORDENADOR

***8.133** En el instante $t = 0$ se suelta la masa en reposo de 2 kg desde la posición $x = 15$ mm medida respecto a la posición de equilibrio. Las sucesivas amplitudes positivas se observa que decrecen por un factor de 4. Representar gráficamente el desplazamiento x de la masa en función del tiempo en el intervalo $0 < t < 1$s.

Resp. $x = (15 \cos 19{,}53t + 3{,}31 \operatorname{sen} 19{,}53t)e^{-4{,}31t}$ mm

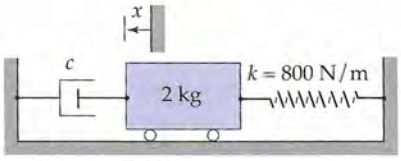


Figura problema 8.133

***8.134** La masa de un sistema críticamente amortiguado de pulsación natural $\omega_n = 4$ rad/s se suelta en reposo desde un desplazamiento inicial x_0. Hallar el tiempo t necesario para que la masa llegue a la posición $x = 0{,}1x_0$.

***8.135** La masa del sistema representado se suelta bajo las condiciones iniciales $x_0 = 0{,}1$ m y $\dot{x}_0 = -5$ m/s con $t = 0$. Representar gráficamente la respuesta del sistema y determinar el(los) instante(s) (si existen) para los que $x = -0{,}05$ m.

Resp. $t_1 = 0{,}0544$ s, $t_2 = 0{,}442$ s

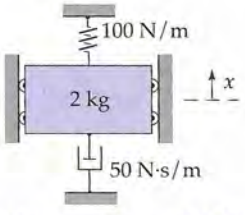


Figura problema 8.135

***8.136** Representar gráficamente la respuesta x del cuerpo de 20 kg a lo largo del intervalo $0 \leq t \leq 1$ segundo. Hallar los valores máximo y mínimo de x y los instantes correspondientes. Las condiciones iniciales son $x_0 = 0$ y $x_0 = 2$ m/s.

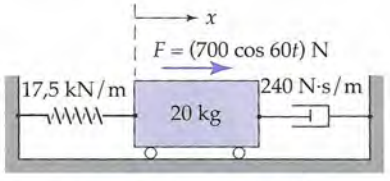


Figura problema 8.136

***8.137** La masa de 4 kg está suspendida mediante el resorte de rigidez $k = 350$ N/m y se encuentra inicialmente en reposo en la posición de equilibrio. Si al cuerpo se aplica una fuerza $F = Ct$, dirigida hacia abajo, tal que alcanza un valor de 40 N cuando $t = 1$ s, deducir la ecuación diferencial del movimiento, resolverla y representar gráficamente la elongación y, en milímetros, en función del tiempo durante el primer segundo. El amortiguamiento es despreciable.

Resp. $y = 114{,}3(t - 0{,}1069 \operatorname{sen} 9{,}35t)$ mm

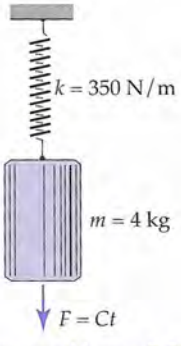


Figura problema 8.137

http://gratislibrospdf.com/

*8.138 Se representan en la figura los elementos de un contador de desplazamiento que se emplea para estudiar el movimiento $y_B = b$ sen ωt de la base. El movimiento de la masa relativo al bastidor se registra en el tambor rotatorio. Si $l_1 =$ 360 mm, $l_2 = 480$ mm, $l_3 = 600$ mm, $m = 0{,}9$ kg, $c = 1{,}4$ N · s/m y $\omega = 10$ rad/s, hallar entre qué limites puede estar el valor de la constante k del resorte para que el desplazamiento relativo registrado en el tambor sea menor que $1{,}5b$. Se supone que el cociente ω/ω_n debe mantenerse mayor que uno.

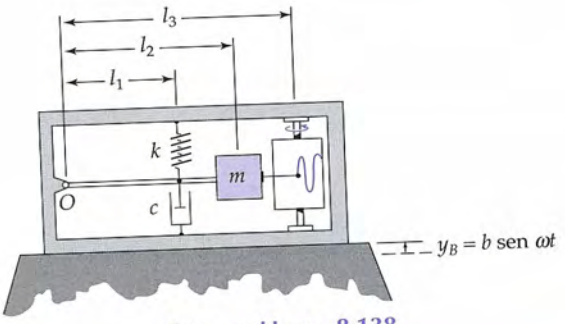


Figura problema 8.138

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

Apéndice A: Momentos de inercia de una superficie

En el apéndice A del *tomo I, Estática*, se expone la teoría y los procedimientos de cálculo de los momentos de inercia de superficies. Dada la importancia del papel que representa esta magnitud en el diseño de estructuras, particularmente las tratadas en Estática, en este tomo de *Dinámica* presentamos únicamente una breve definición para que el lector pueda apreciar las diferencias fundamentales entre los momentos de inercia de superficies y de masas.

Por definición, los momentos de inercia de una superficie plana A respecto a los ejes x e y de su plano y respecto al eje z normal a su plano son

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad I_y = \int x^2\, dA \qquad I_z = \int r^2\, dA$$

donde dA es el elemento infinitesimal de área y $r^2 = x^2 + y^2$. Evidentemente el momento de inercia polar I_z es igual a la suma $I_x + I_y$ de los momentos de inercia rectangulares. Tal como se expone en el apéndice B, al tratar con placas planas finas, el momento de inercia de una superficie puede aprovecharse para calcular el momento de inercia de una masa.

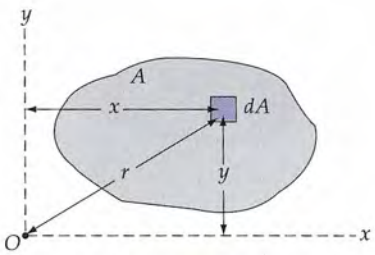


Figura A.1

El momento de inercia de una superficie es una medida de cómo está distribuida esa superficie en torno al eje en cuestión y para éste es una propiedad constante de la superficie. Las dimensiones del momento de inercia de una superficie son (longitud)^4, expresándose en m^4 o en mm^4 en unidades SI. En contraste, el momento de inercia de un cuerpo es una medida de cómo está distribuida su masa en torno al eje en cuestión y sus dimensiones son (masa) (longitud)^2, expresándose en kg·m^2 en unidades SI.

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

Apéndice B: Momentos de inercia de masas

B.1 MOMENTOS DE INERCIA MÁSICOS RESPECTO A UN EJE

La ecuación del movimiento rotatorio respecto a un eje normal al plano del movimiento de un cuerpo rígido en movimiento plano contiene una integral que depende de la distribución de la masa respecto al eje de momentos. Esta integral aparece siempre que un cuerpo rígido adquiere aceleración angular alrededor de su eje de rotación.

Consideremos un cuerpo de masa m (fig. B.1) en rotación alrededor de un eje O-O con aceleración angular α. Los puntos del cuerpo se mueven todos en planos paralelos normales al eje de rotación O-O. Cualquiera de esos planos puede tomarse como plano del movimiento, aun cuando suela designarse como tal al que contiene al centro de masa. Un elemento de masa dm tiene una componente de aceleración tangente a su trayectoria circular igual a $r\alpha$, y en virtud de la segunda ley de Newton del movimiento, la fuerza tangencial resultante que se ejerce sobre ese elemento es $r\alpha\, dm$. El momento de esa fuerza respecto al eje O-O es $r^2\alpha\, dm$ y la suma de los momentos de esas fuerzas extendida a todos los elementos es $\int r^2\alpha\, dm$. En un cuerpo rígido, α es la misma para todas las rectas radiales del cuerpo, por lo que podrá sacarse de la integral. La integral que así queda se denomina momento de inercia I de la masa m respecto al eje O-O y es

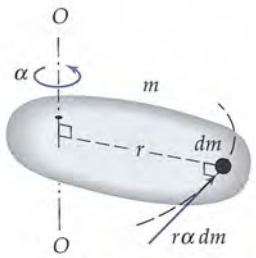


Figura B.1

$$I = \int r^2\, dm \qquad \textbf{(B.1)}$$

Esta integral representa una importante propiedad del cuerpo e interviene en el análisis de fuerzas de todo cuerpo que posea aceleración de rotación en torno a un eje dado. Al igual que la masa m de un cuerpo es una medida de la resistencia a la aceleración de traslación, el momento de inercia I es una medida de la resistencia del cuerpo a ser acelerado en su rotación.

La integral del momento de inercia también puede expresarse en la forma

$$I = \Sigma r_i^2 m_i \qquad \textbf{(B.1a)}$$

donde r_i es la distancia radial del eje de inercia al punto representativo de masa m_i y donde el sumatorio se extiende a todos los puntos materiales del cuerpo.

http://gratislibrospdf.com/

Figura B.2

Si la densidad ρ fuese constante en todo el cuerpo, el momento de inercia sería

$$I = \rho \int r^2 \, dV$$

donde dV es el elemento de volumen. En este caso, la integral define por sí sola una propiedad puramente geométrica del cuerpo. Cuando la densidad no sea constante sino que se exprese como función de las coordenadas, deberá dejarse dentro de la integral y tenerse en cuenta su efecto en el proceso de integración.

En general, en la integración deberán utilizarse las coordenadas que mejor se adapten al contorno del cuerpo. Es particularmente importante elegir adecuadamente el elemento de volumen dV. Deberá tomarse un elemento del orden más bajo posible y utilizarse la expresión correcta del momento de inercia del elemento respecto al eje en cuestión. Por ejemplo, al buscar el momento de inercia de un cono recto de revolución respecto a su eje, podrá utilizarse un elemento en forma de rebanada circular (fig. B.2*a*). El momento de inercia diferencial de este elemento es la expresión correcta del momento de inercia respecto a su eje de un cilindro de revolución de altura infinitesimal. (Esta expresión la obtendremos en el problema tipo B.1.) También podría haberse elegido un elemento en forma de capa cilíndrica de espesor infinitesimal, como el representado en la figura B.2*b*. Como toda la masa del elemento se halla a la misma distancia r del eje de inercia, el momento de inercia infinitesimal de ese elemento sería simplemente $r^2 \, dm$, donde dm es la masa infinitesimal de la capa elemental.

De su definición, las dimensiones del momento de inercia másico son (masa)(longitud)^2 y se expresan en kg·m^2 en el Sistema Internacional.

(a) Radio de giro. El radio de giro k de una masa m respecto a un eje para el cual el momento de inercia es I es

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \qquad \text{o sea} \qquad I = k^2 m \tag{B.2}$$

Así pues, k es una medida de la distribución de la masa de un cuerpo dado alrededor del eje en cuestión y su definición es análoga a la del radio de giro de los segundos momentos de superficie. Si pudiera concentrarse toda la masa m a un distancia k del eje, el momento de inercia correcto sería $k^2 m$. El momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje particular suele indicarse especificando la masa del cuerpo y el radio de giro del cuerpo respecto al eje. Con la ecuación B.2 se calcula entonces el momento de inercia.

http://gratislibrospdf.com/

(b) Cambio de ejes. Si se conoce el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje centroidal, podrá determinarse fácilmente el relativo a un eje paralelo cualquiera. Para demostrarlo, consideremos los dos ejes paralelos a la figura B.3, uno de los cuales es centroidal, es decir, pasa por el centro de masa G. Las distancia radiales de un elemento cualquiera de masa dm a los dos ejes las representamos por r_0 y r, y llamaremos d a la separación de los ejes. Introduciendo el teorema del coseno, $r^2 = r_0^2 + d^2 + 2r_0 d\cos\theta$, en la definición del momento de inercia respecto al eje no centroidal se tiene

$$I = \int r^2\, dm = \int (r_0^2 + d^2 + 2r_0 d\cos\theta)\, dm$$
$$= \int r_0^2\, dm + d^2 \int dm + 2d \int u\, dm$$

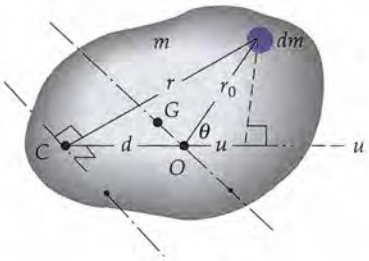


Figura B.3

La primera integral es el momento de inercia $\bar{I}$ respecto al eje que pasa por el centro de masa, el segundo término es md^2 y la tercera integral es nula puesto que la coordenada u del centro de masa respecto al eje que pasa por G es cero. Así pues, el teorema de los ejes paralelos, o de Steiner, dice que

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{B.3}$$

Debe recordarse que este cambio sólo puede hacerse si un eje pasa por el centro de masa y ambos ejes son paralelos. Al sustituir en la ecuación B.3 por las expresiones de los radios de giro, resulta

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \tag{B.3a}$$

que es el teorema de Steiner para obtener el radio de giro k respecto a un eje separado una distancia d de otro eje paralelo centroidal para el cual el radio de giro sea $\bar{k}$.

En los problemas de movimiento plano en que la rotación tiene lugar alrededor de un eje normal al plano del movimiento, basta con un subíndice sencillo para I para designar el eje de inercia. Así, si la placa de la figura B.4 estuviese animada de movimiento plano en el plano x-y, su momento de inercia respecto al eje z que pasa por O se designaría I_0. Sin embargo, en el movimiento tridimensional, en el que pueden aparecer componentes de la rotación en más de un eje, se utilizan subíndices dobles para conservar la simetría de la notación con los términos de los productos de inercia, los cuales se presentan en el apartado B.2. Así pues, los momentos de inercia respecto a los ejes x, y y z se representan, respectivamente, por I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} y en la figura B.5 vemos que son

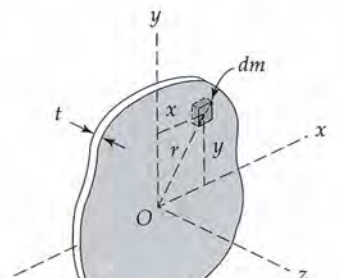


Figura B.4

$$I_{xx} = \int r_x^2\, dm = \int (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_{yy} = \int r_y^2\, dm = \int (z^2 + x^2)\, dm \tag{B.4}$$
$$I_{zz} = \int r_z^2\, dm = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

Estas integrales aparecen en las ecuaciones 7.10 del apartado 7.7 relativo al momento cinético en la rotación tridimensional.

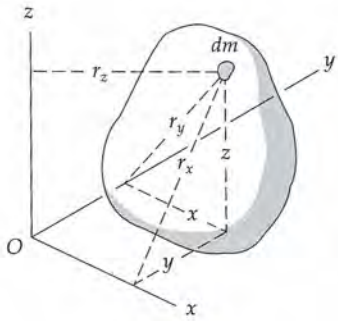


Figura B.5

http://gratislibrospdf.com/

Fácilmente se observa la semejanza existente entre las expresiones definitorias de los momentos de inercia másicos y los momentos de inercia de superficies. En el caso de las placas planas existe una relación exacta entre ambas expresiones. Consideremos la placa de espesor uniforme de la figura B.4. Representando por t el espesor constante y por ρ la densidad cúbica, el momento de inercia másico I_{zz} de la placa respecto al eje z normal a ella es

$$I_{zz} = \int r^2\, dm = \rho t \int r^2\, dA = \rho t I_z \tag{B.5}$$

O sea, el momento de inercia másico respecto al eje z es igual a la masa por unidad de superficie, ρt, multiplicada por el momento de inercia polar I_z de la placa respecto al eje z. Si t es pequeño frente a las dimensiones de la placa en su plano, las expresiones de los momentos de inercia I_{xx} e I_{yy} de la placa respecto a los ejes x e y son, con gran aproximación,

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int y^2\, dm = \rho t \int y^2\, dA = \rho t I_x \\ I_{yy} &= \int x^2\, dm = \rho t \int x^2\, dA = \rho t I_y \end{aligned} \tag{B.6}$$

Luego los momentos de inercia másicos son iguales a la masa por unidad de superficie ρt multiplicada por los correspondientes momentos de inercia de superficie. El doble subíndice de los momentos de inercia másicos los distingue de los momentos de inercia de superficies.

Como para los momentos de inercia de las superficies se cumple $I_z = I_x + I_y$, se deduce que

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \tag{B.7}$$

que *solamente* se cumple para una placa delgada. Esta restricción puede observarse en las ecuaciones B.6, que no son válidas a menos que el espesor t o la coordenada z del elemento sea despreciable frente a su distancia al eje x o y. La ecuación B.7 es muy útil al tratar de un elemento de masa diferencial que se tome como rebanada plana de espesor infinitesimal dz. En tal caso, la ecuación B.7 se cumple exactamente y queda en la forma

$$dI_{zz} = dI_{xx} + dI_{yy} \tag{B.7a}$$

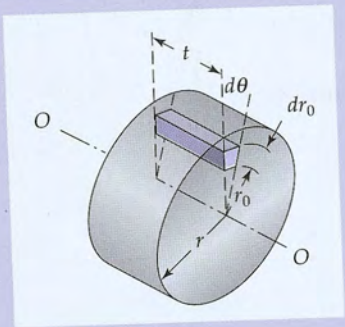
(c) Cuerpos compuestos. La integral de definición dada por la ecuación B.1 contiene el cuadrado de la distancia del elemento al eje, por lo que siempre será positiva. Así pues, como en el caso de los momentos de inercia de superficie, el momento de inercia másico de un cuerpo compuesto será la suma de los momentos de inercia respecto al mismo eje de las distintas partes que integran el cuerpo. Conviene a menudo considerar un cuerpo compuesto como definido por volúmenes positivos y volúmenes negativos. El momento de inercia de un elemento negativo, tal como un agujero, debe considerarse como cantidad negativa.

Antes de penetrar en el estudio de la Dinámica del movimiento plano es absolutamente necesario conocer perfectamente el cálculo de momentos de inercia másicos de cuerpos rígidos respecto a ejes normales al plano del movimiento.

http://gratislibrospdf.com/

En la tabla D.4 del apéndice D se ofrece un resumen de algunas de las fórmulas más útiles de momentos de inercia másicos correspondientes a diversas masas de formas comunes.

PROBLEMA TIPO B.1



Hallar el momento de inercia y el radio de giro de un cilindro recto de revolución homogéneo de masa m y radio r respecto a su eje O-O.

Solución. En coordenadas cilíndricas, un elemento de masa es $dm = \rho\, dV = \rho t r_0\, dr_0\, d\theta$, donde ρ es la densidad del cilindro. El momento de inercia del cilindro respecto a su eje es

(1)

$$I = \int {r_0}^2\, dm = \rho t \int_0^{2\pi} \int_0^r {r_0}^3\, dr_0\, d\theta = \rho t\, \frac{\pi r^4}{2} = \tfrac{1}{2} m r^2 \qquad \textit{Resp.}$$

(2)

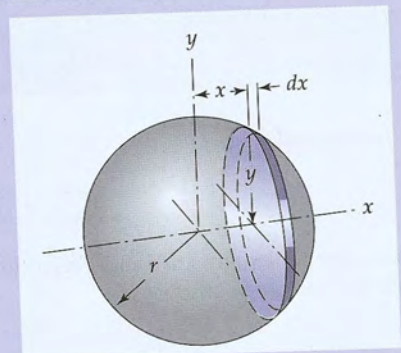
Y el radio de giro es

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \qquad \textit{Resp.}$$

(1) **Si hubiéramos empleado como elemento de masa una cáscara cilíndrica de radio r_0, longitud t, y masa dm, habríamos tenido directamente $dI = r_0^2\, dm$. El lector deberá calcular esta integral.**

(2) **El valor $I = \frac{1}{2} m r^2$ es válido *únicamente* para cilindros homogéneos macizos y no puede emplearse para cuerpos en forma de rueda.**

PROBLEMA TIPO B.2



Hallar el momento de inercia y el radio de giro de una esfera maciza homogénea de masa m y radio r respecto a uno de sus diámetros.

http://gratislibrospdf.com/

Solución. Como volumen elemental tomamos una rebanada circular de espesor dx y radio y. Según se ha visto en el problema tipo B.1, el momento de inercia respecto al eje x del cilindro elemental es

① Tenemos aquí un ejemplo de utilización de un resultado ya conocido para expresar el momento de inercia del elemento de masa elegido, que en este caso es un cilindro recto de longitud diferencial dx. Sería una tontería empezar con un elemento de tercer orden, como $\rho\, dx\, dy\, dz$, cuando el problema puede resolverse con mayor facilidad empleando un elemento de primer orden.

① $$dI_{xx} = \tfrac{1}{2}(dm)y^2 = \tfrac{1}{2}(\pi\rho y^2\, dx)y^2 = \left(\frac{\pi\rho}{2}\right)(r^2 - x^2)^2 dx$$

donde ρ es la densidad constante de la esfera. El momento de inercia total respecto al eje x es:

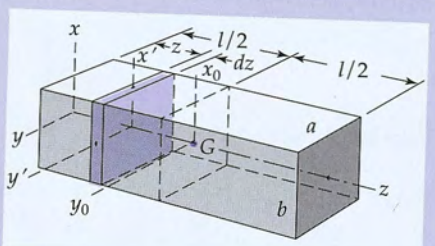
$$I_{xx} = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)^2\, dx = \tfrac{8}{15}\pi\rho r^5 = \tfrac{2}{5}mr^2 \qquad \textit{Resp.}$$

El radio de giro es

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{2}{5}}r \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA TIPO B.3

Hallar los momentos de inercia del paralelepípedo rectangular homogéneo de masa m respecto a sus ejes centroidales x_0 y z y respecto al eje x que pasa por una base.



Solución. Como elemento de volumen se toma una rebanada transversal de espesor dz. El momento de inercia de esa rebanada de grosor infinitesimal es igual al momento de inercia de la superficie de la sección multiplicado por la masa por unidad de superficie $\rho\, dz$. Luego el momento de inercia de la rebanada transversal respecto al eje y' es:

$$dI_{y'y'} = (\rho\, dz)(\tfrac{1}{12}ab^3)$$

y respecto al x' es

① Confrontar con las ecuaciones B.6 y recordar cuál es el momento de inercia de una superficie rectangular respecto a un eje paralelo a la base que pase por el centro.

① $$dI_{x'x'} = (\rho\, dz)(\tfrac{1}{12}a^3b)$$

Mientras el elemento sea una placa de espesor infinitesimal, podremos aplicar la relación B.7a y, entonces,

$$dI_{zz} = dI_{x'x'} + dI_{y'y'} = (\rho\, dz)\frac{ab}{12}(a^2 + b^2)$$

http://gratislibrospdf.com/

Ahora estas expresiones pueden integrarse para obtener los resultados deseados.

El momento de inercia respecto al eje z es

$$I_{zz} = \int dI_{zz} = \frac{\rho ab}{12}(a^2 + b^2)\int_0^t dz = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \qquad \textit{Resp.}$$

donde m es la masa del bloque. Intercambiando los símbolos, el momento de inercia respecto al eje x_0 resulta ser

$$I_{x_0x_0} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + l^2) \qquad \textit{Resp.}$$

El momento de inercia respecto al eje x puede hallarse mediante el teorema de Steiner (ec. B.3). Así,

$$I_{xx} = I_{x_0x_0} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{12}m(a^2 + 4l^2) \qquad \textit{Resp.}$$

Este último resultado puede obtenerse expresando el momento de inercia de la rebanada elemental respecto al eje x e integrando la expresión para toda la longitud de la barra. Nuevamente, por el teorema de Steiner,

$$dI_{xx} = dI_{x'x'} + z^2\, dm = (\rho\, dz)(\tfrac{1}{12}a^3b) + z^2\rho ab\, dz = \rho ab\left(\frac{a^2}{12} + z^2\right) dz$$

Integrando se obtiene el resultado anterior.

$$I_{xx} = \rho ab\int_0^l \left(\frac{a^2}{12} + z^2\right) dz = \frac{\rho abl}{3}\left(l^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \tfrac{1}{12}m(a^2 + 4l^2)$$

En el caso de una barra prismática larga o varilla esbelta cuyas dimensiones sean pequeñas frente a su longitud, puede simplificarse la expresión de I_{xx}. En este caso se puede despreciar a^2 frente a $4l^2$, y el momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular a ella y que pase por un extremo resulta ser $I = \frac{1}{3}\ ml^2$. En virtud de la misma aproximación, el momento de inercia respecto a un eje centroidal perpendicular a la barra es $I = \frac{1}{12}ml^2$.

PROBLEMAS

Problemas introductorios

B.1 Empleando un elemento de masa $dm = \rho\, dx$, donde ρ es la masa por unidad de longitud, calcular los momentos de inercia I_{yy} e $I_{y'y'}$ de la varilla delgada homogénea de masa m y longitud l.

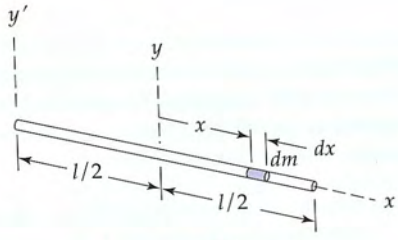


Figura problema B.1

Resp. $I_{yy} = \tfrac{1}{12}ml^2$

$I_{y'y'} = \tfrac{1}{3}ml^3$

http://gratislibrospdf.com/

B.2 Todas las barras "esbeltas" tienen un radio finito r. Consúltese la tabla D.4 y dedúzcase una expresión para el error porcentual e que se comete despreciando el radio r de una barra cilíndrica maciza y homogénea de longitud l al calcular su momento de inercia I_{zz}. Evaluar el resultado para los casos $\frac{r}{l} = 0{,}01,\ 0{,}1,\ \text{y}\ 0{,}5$.

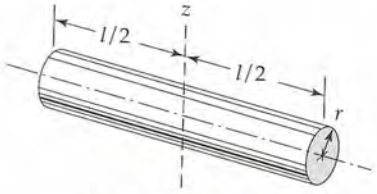


Figura problema B.2

B.3 Al objeto de apreciar mejor la simplificación que supone emplear infinitésimos de orden menor para integrar, calcular el momento de inercia I_{xx} de la placa delgada homogénea empleando el elemento cuadrado (a) y después el elemento rectangular (b). La masa de la placa es m. Seguidamente determinar I_{yy} por observación y, por último, hallar I_{zz}.

Resp. $I_{xx} = \frac{1}{12}ma^2$

$I_{yy} = \frac{1}{12}mb^2$

$I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

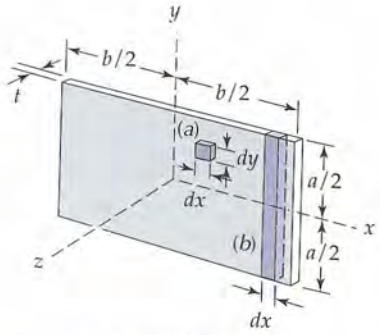


Figura problema B.3

B.4 El segmento en forma de cuña se ha cortado de una cáscara cilíndrica de radio r cuyo espesor es muy pequeño comparado con r. Por simple inspección escribir el momento de inercia del segmento respecto al eje de revolución O-O de la cáscara cilíndrica.

B.5 El momento de inercia de una esfera maciza homogénea de radio r respecto a cualquier eje x no centroidal puede obtenerse aproximadamente multiplicando la masa de la esfera por el cuadrado de la distancia d entre el eje x y el eje centroidal paralelo. ¿Qué error porcentual e se comete si (a) $d = 2r$ y (b) $d = 10r$?

Resp. (a) $e = -9{,}09\%$, (b) $e = -0{,}398\%$

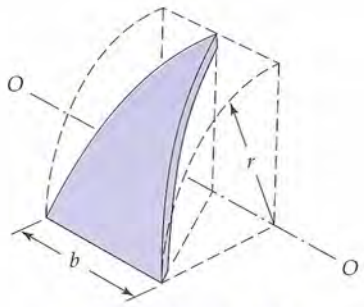


Figura problema B.4

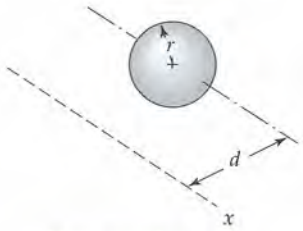


Figura problema B.5

B.6 Hallar el radio de giro de la placa triangular fina de masa m y respecto al eje x-x que pasa por su base.

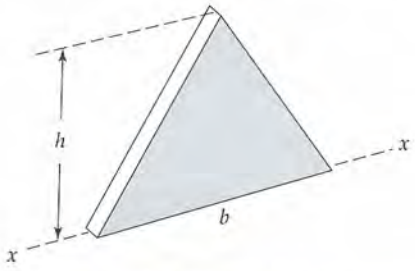


Figura problema B.6

B.7 Hallar el momento de inercia de la placa triangular equilátera fina de masa m respecto al eje z-z perpendicular a ella y que pasa por su centro de masa G. Aprovechar los resultados del problema B.6 y aplicar las relaciones obtenidas para las placas delgadas y el teorema de Steiner.

Resp. $I_{zz} = \frac{1}{12}mb^2$

http://gratislibrospdf.com/

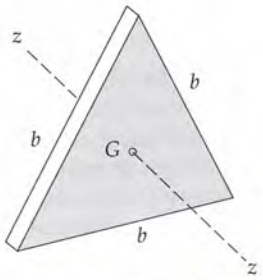


Figura problema B.7

B.8 Una plantilla está hecha de chapa fina de acero de masa 31,3 kg/m^2. Los momentos de inercia superficiales de la placa son $I_x = 25{,}2(10^6)$ mm^4 e $I_y = 76{,}6\ (10^6)$ mm^4. Calcular su momento de inercia másico respecto al eje z.

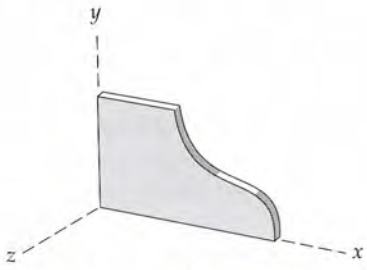


Figura problema B.8

B.9 La cuña cilíndrica maciza de masa m y radio r tiene una altura b. Empleando los resultados del problema tipo B.1, escribir su momento de inercia, por inspección, respecto al eje O-O. Deducir seguidamente su momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masa y es paralelo a O-O.

$$Resp.\ I_{OO} = \frac{1}{2}mr^2,\ I_{GG} = mr^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9}\frac{\text{sen}^2\theta/2}{\theta^2}\right)$$

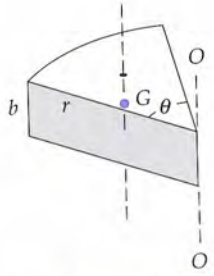


Figura problema B.9

B.10 Hallar I_{xx} para el cilindro con un orificio circular concéntrico. La masa del cuerpo es m.

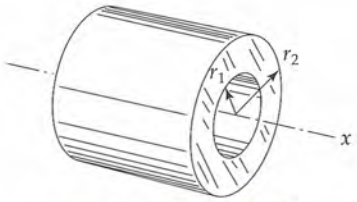


Figura problema B.10

B.11 Calcular el radio de giro, respecto al eje O-O, del disco de acero agujereado.

Resp. $k_O = 230$ mm

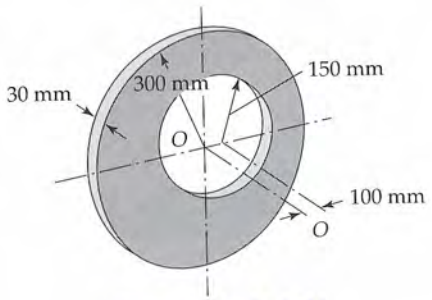


Figura problema B.11

Problemas representativos

B.12 La placa semicircular tiene una masa de 2 kg y su espesor puede despreciarse en comparación con su radio de 250 mm. Calcular sus momentos de inercia respecto a los ejes x, y, y' y z.

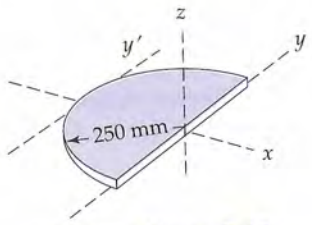


Figura problema B.12

B.13 Una raqueta de bádminton esta constituida por una varilla delgada doblada del modo que se muestra. Despreciar el cordaje y el mango de madera y estimar su momento de inercia respecto al eje y que pasa por O, punto en el que se supone aplicada la mano del jugador. La masa por unidad de longitud del material de la varilla es ρ.

$$Resp.\ I_{yy} = (\tfrac{43}{192} + \tfrac{83}{128}\pi)\rho L^3$$

http://gratislibrospdf.com/

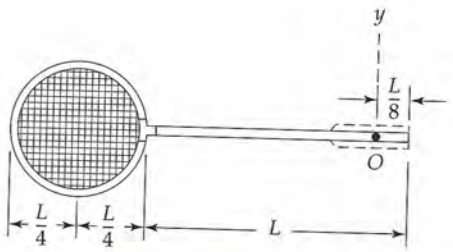


Figura problema B.13

B.14 Calcular el momento de inercia del volante de acero, que se representa seccionado, respecto a su eje geométrico. Tiene ocho rayos; todos ellos de sección transversal constante igual a 200 mm^2. ¿Qué porcentaje n del momento de inercia total hay que atribuir a la llanta?

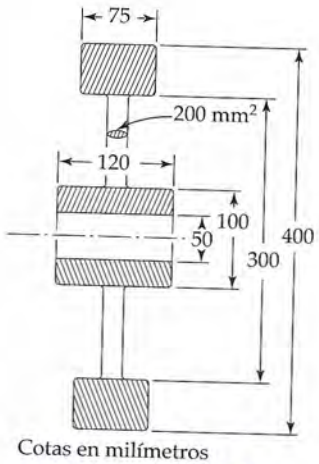


Figura problema B.14

B.15 El péndulo de reloj se compone de la varilla delgada de longitud l y masa m y la lenteja de masa $7m$. Se desprecian los efectos del radio de la lenteja. Hallar I_O en función de la posición x de la lenteja y el cociente R de los I_O calculados para $x = \frac{3}{4}l$ y $x = l$.

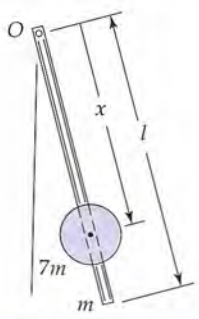


Figura problema B.15

Resp. $I_O = m(7x^2 + \frac{1}{3}l^2)$, $R = 0{,}582$

B.16 Una varilla delgada, de masa total m, se dobla en forma de dos semicírculos. Hallar su momento de inercia respecto al eje que pasa por O y es perpendicular al plano de la varilla. Resolver sin emplear la relación centroidal para un arco semicircular.

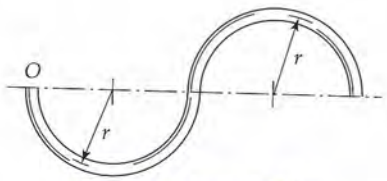


Figura problema B.16

B.17 El cilindro circular homogéneo tiene una masa m, un radio r y una longitud l. Deducir la expresión de su momento de inercia respecto al eje xx que pasa por una de sus bases.

Resp. $I_{xx} = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$

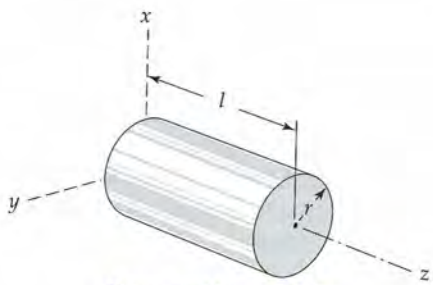


Figura problema B.17

B.18 Hallar el momento de inercia del mazo respecto al eje x. La densidad del mango de madera es 800 kg/m^3 y la del metal

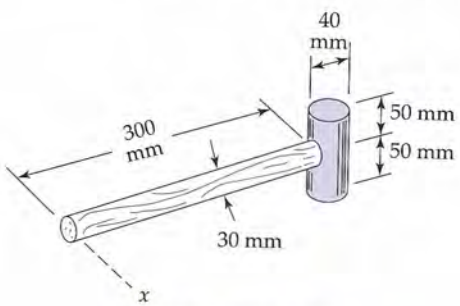


Figura problema B.18

http://gratislibrospdf.com/

dúctil de la cabeza es 9000 kg/m^3. El eje longitudinal de la cabeza es perpendicular al eje x.

B.19 Un cubo de acero de 150 mm de arista se corta por uno de sus planos diagonales. Calcular el momento de inercia del prisma resultante respecto a la arista x-x.

Resp. $I_{xx} = 0{,}1982$ kg·m^2

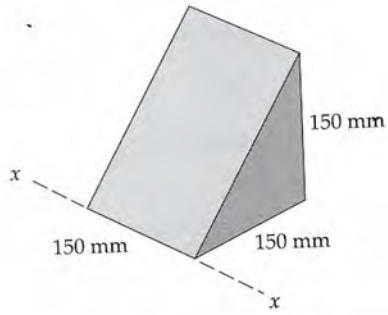


Figura problema B.19

B.20 Calcular el momento de inercia del semicilindro de acero macizo respecto al eje x-x y respecto al eje x_0-x_0 paralelo al anterior. (La densidad del acero puede encontrarse en la tabla D.1.)

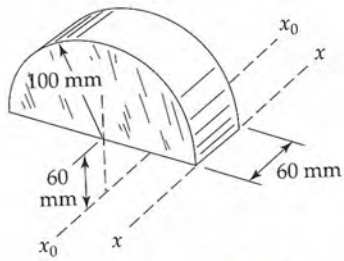


Figura problema B.20

B.21 Hallar el momento de inercia, respecto al eje tangencial x-x, del anillo entero de masa m_1 y del semianillo de masa m_2.

Resp. $I_{xx} = \frac{3}{2}m_1r^2$, $I_{xx} = m_2r^2\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right)$

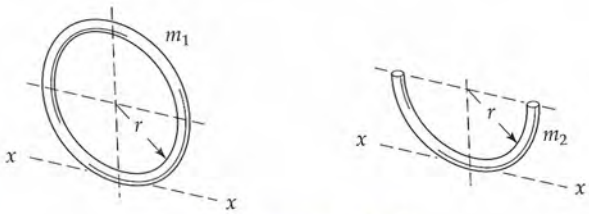


Figura problema B.21

B.22 Hallar el momento de inercia del semianillo de masa m respecto a su eje diametral a-a y respecto al eje b-b que pasa por el punto medio del arco y es normal al plano del anillo. El radio de la sección recta circular es pequeño frente a r.

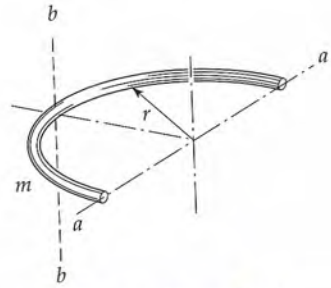


Figura problema B.22

B.23 El radio del sólido de revolución es proporcional al cuadrado de la coordenada x. Hallar I_{xx}, siendo m la masa del cuerpo.

Resp. $I_{xx} = \frac{5}{18}mr^2$

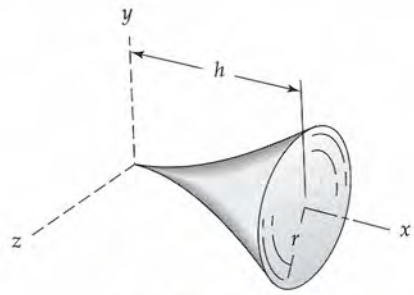


Figura problema B.23

B.24 Hallar el radio de giro respecto al eje z del paraboloide de revolución de la figura, que es un cuerpo homogéneo de masa m.

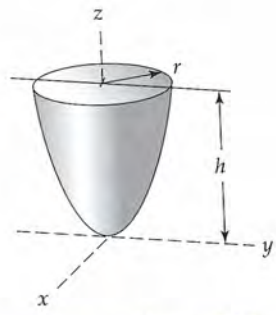


Figura problema B.24

http://gratislibrospdf.com/

B.25 Hallar el momento de inercia respecto al eje y del paraboloide de revolución del problema B.24.

Resp. $I_{yy} = \frac{1}{2}m\left(h^2 + \frac{r^2}{3}\right)$

B.26 Calcular el momento de inercia del cono de revolución recto, macizo y homogéneo de masa m, radio de la base r y altura h, respecto al eje x del cono y respecto al eje y que pasa por su vértice.

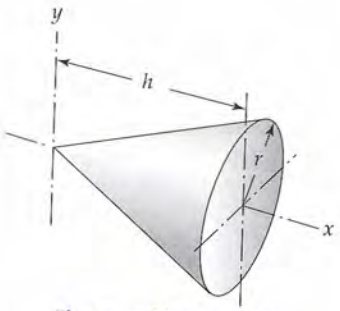


Figura problema B.26

B.27 La ojiva de la maqueta de un cohete cilíndrico tiene la forma que se muestra. En el primer cuadrante del plano x-y el contorno cumple la ecuación de la parábola $y = b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Si es m la masa de la ojiva, que es homogénea, hallar su momento de inercia respecto al eje x.

Resp. $I_{xx} = \frac{8}{21}mb^2$.

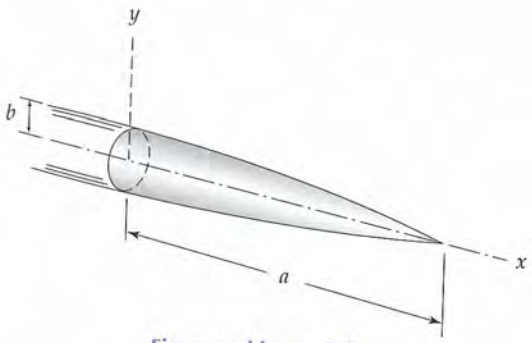


Figura problema B.27

B.28 Hallar el momento de inercia respecto al eje x del semielipsoide de revolución, macizo y homogéneo, de masa m.

B.29 Hallar el momento de inercia másico respecto al eje x de la placa elíptica delgada de masa m.

Resp. $I_{xx} = \frac{1}{4}mb^2$

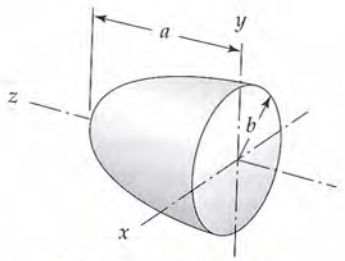


Figura problema B.28

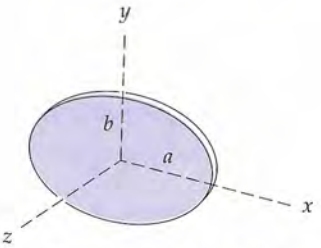


Figura problema B.29

B.30 El sólido macizo de masa m se genera haciendo girar en torno al eje z el triángulo rectángulo isósceles. Hallar su momento de inercia respecto al eje z.

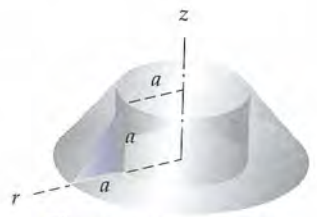


Figura problema B.30

B.31 Hallar el momento de inercia respecto al eje x del segmento esférico de masa m.

Resp. $I_{xx} = \frac{53}{200}mR^2$

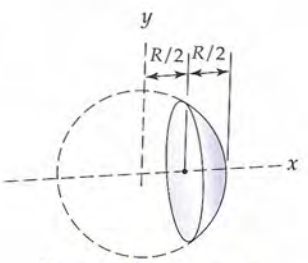


Figura problema B.31

http://gratislibrospdf.com/

B.32 Hallar el momento de inercia respecto al eje x del sector esférico homogéneo de masa m de la figura.

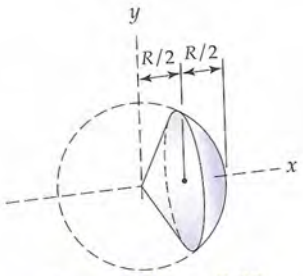


Figura problema B.32

B.33 En la figura se representa el modelo preliminar de una nave espacial, compuesto de una cáscara cilíndrica y dos planchas planas. La cáscara y las planchas tienen iguales espesor y densidad. Para que el vehículo tenga un giro estable en torno a su eje 1-1 puede demostrarse que el momento de inercia respecto a ese eje debe ser menor que el momento de inercia respecto al eje 2-2. Hallar el valor crítico de l que debe excederse para garantizar un giro estable en torno al eje 1-1.

Resp. $l > 4{,}89r$

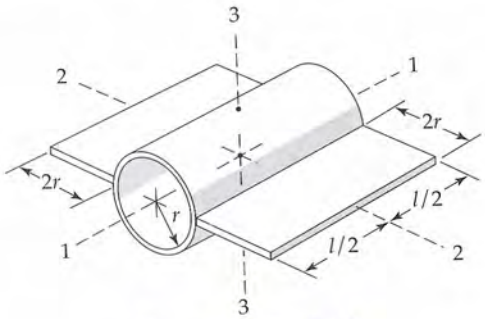
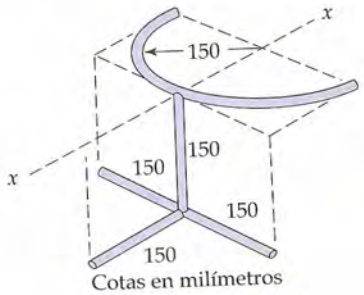


Figura problema B.33

B.34 El conjunto soldado de la figura está hecho con varilla de acero de 0,993 kg/m de masa por metro. Calcular su momento de inercia respecto al eje x-x.



Cotas en milímetros

Figura problema B.34

B.35 La sección recta de la barra homogénea, de masa m y longitud l, es cuadrada. Hallar su momento de inercia respecto al eje y-y que pasa por su centro de masa G y que coincide con una de las diagonales de la sección recta central.

Resp. $I_{yy} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

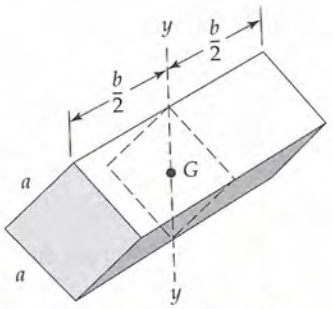


Figura problema B.35

B.36 Hallar los momentos de inercia de la cáscara semiesférica respecto a los ejes x y z. La masa del cuerpo es m y su espesor es despreciable frente al radio r.

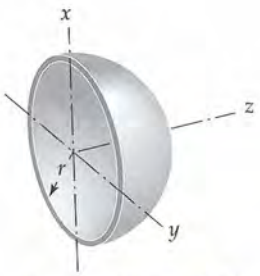


Figura problema B.36

B.37 Hallar el momento de inercia respecto al eje de revolución del toro macizo completo cuyas dimensiones son las indicadas en la sección de la figura.

Resp. $I = m(R^2 + \frac{3}{4}a^2)$

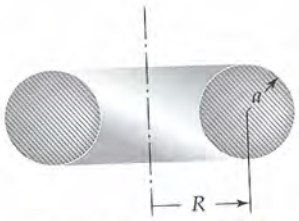


Figura problema B.37

http://gratislibrospdf.com/

B.38 Hallar el momento de inercia respecto al eje de revolución del toro hueco completo cuyas dimensiones son las indicadas en la sección de la figura.

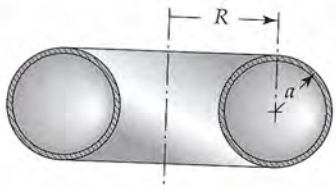


Figura problema B.38

B.39 Para el tronco de cono, de radios de las bases r_1 y r_2 y masa m, hallar I_{xx}.

$$Resp.\ I = \tfrac{3}{10} m \frac{r_2^5 - r_1^5}{r_2^3 - r_1^3}$$

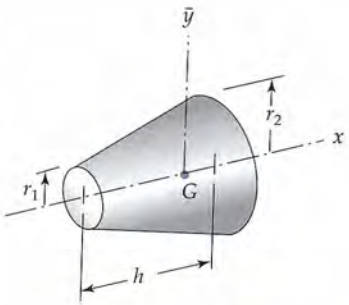


Figura problema B.39

B.40 Hallar el momento de inercia másico respecto al eje $\bar{y}$ del tronco de cono del problema B.39.

$$Resp.\ \bar{I}_{yy} = \frac{m}{2P_1P_2}\left\{\tfrac{3}{10}[P_2 + 4h^2](r_2^5 - r_1^5) - \tfrac{9}{8}h^2\frac{r_2^4 - r_1^4}{P_1}\right\}$$

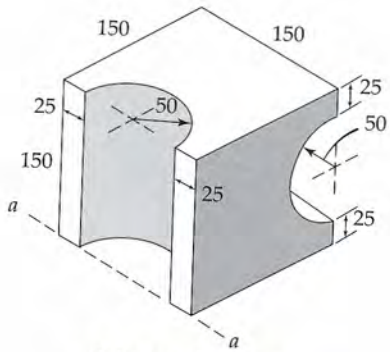
donde $P_1 = r_2^3 - r_1^3$, $P_2 = (r_2 - r_1)^2$

B.41 El cubo con los canales semicirculares practicados en dos caras opuestas es de plomo. Calcular su momento de inercia respecto al eje a-a.

$Resp.\ I_{aa} = 0{,}367\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

B.42 La cáscara de masa m se genera haciendo girar el sector circular alrededor del eje z. Si el espesor de la cáscara es pequeño comparado con a y si $r = a/3$, hallar su radio de giro respecto al eje z.

$Resp.\ k_z = 0{,}890a$



Cotas en milímetros

Figura problema B.41

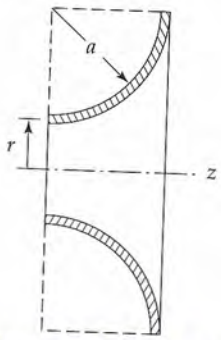


Figura problema B.42

B.43 Una varilla delgada de masa ρ por unidad de longitud se arrolla en torno al cilindro dando una vuelta de hélice completa. La coordenada z es proporcional a θ. Hallar sus momentos de inercia respecto a los ejes x y z.

$$Resp.\ I_{zz} = 2\rho r^3\sqrt{1+\pi^2},\ I_{xx} = \tfrac{11}{3}\rho r^3\sqrt{1+\pi^2}$$

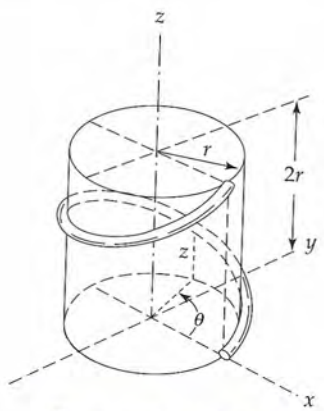


Figura problema B.43

http://gratislibrospdf.com/

▶ **B.44** Hallar, integrando directamente, el momento de inercia respecto al eje Z de la placa semicircular, de masa m y radio R, inclinado un ángulo θ respecto al plano X-y.

Resp. $I_{zz} = \frac{1}{4}mR^2(1 + \cos^2\theta)$

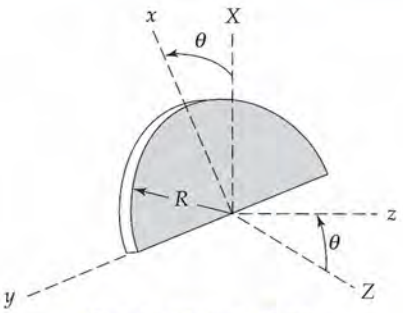


Figura problema B.44

B.2 *PRODUCTOS DE INERCIA*

En la expresión del momento cinético de los cuerpos rígidos en rotación tridimensional aparecen, además de los momentos de inercia, otros términos llamados *productos de inercia* que se definen como

$$I_{xy} = I_{yx} = \int xy\, dm$$
$$I_{xz} = I_{zx} = \int xz\, dm \qquad \text{(B.8)}$$
$$I_{yz} = I_{zy} = \int zy\, dm$$

Estas expresiones son las de las ecuaciones 7.10 que aparecieron al desarrollar la expresión 7.9 del momento cinético.

En el cálculo de productos de inercia intervienen los mismos procedimientos básicos que seguimos al calcular momentos de inercia y otras integrales de volumen en lo que concierne a la elección de los elementos de masa y a los límites de integración. La única precaución que es preciso observar es tener doble cuidado al manejar los signos algebraicos que aparecen en las expresiones. A diferencia de los momentos de inercia, que son cantidades esencialmente positivas, los productos de inercia pueden ser positivos o negativos. Las unidades en que se expresan los productos de inercia son las mismas que las de los momentos de inercia.

Ya hemos visto que el cálculo de momentos de inercia se simplifica muchas veces utilizando el teorema de Steiner y en el caso de los productos de inercia existe un teorema similar para transferir productos de inercia entre ejes (segundo teorema de Steiner). En la figura B.6 se ve en planta x-y un cuerpo rígido con unos ejes x_0-y_0 que pasan por el centro de masa G situado a las distancias d_x y d_y respecto a los ejes x-y. Por definición, el producto de inercia respecto a los ejes x-y es

http://gratislibrospdf.com/

$$I_{xy} = \int xy\, dm = \int (x_0 + d_x)(y_0 + d_y)\, dm$$
$$= \int x_0 y_0\, dm + d_x d_y \int dm + d_x \int y_0\, dm + d_y \int x_0\, dm$$
$$= I_{x_0 y_0} + m d_x d_y$$

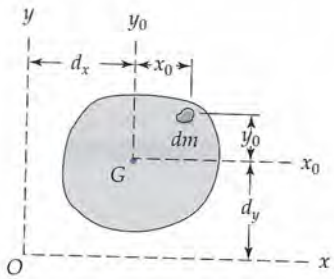


Figura B.6

Las dos últimas integrales desaparecen porque los momentos estáticos respecto al centro de masa son necesariamente nulos. Para los otros dos productos de inercia pueden escribirse unas relaciones similares y si prescindimos del subíndice cero y adoptamos la barra para designar cantidades referidas al centro de masa, podemos escribir

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{xy} + m d_x d_y \\ I_{xz} &= \bar{I}_{xz} + m d_x d_z \\ I_{yz} &= \bar{I}_{yz} + m d_y d_z \end{aligned} \qquad \text{(B.9)}$$

Estas relaciones de transferencia entre ejes son válidas *únicamente* para cambiar de un eje que pase por el centro de masa a otro *paralelo* a éste o viceversa.

Con ayuda de los productos de inercia podemos calcular el momento de inercia de un cuerpo rígido respecto a cualquier eje dado que pase por el origen de coordenadas. Supongamos que se desee calcular el momento de inercia del cuerpo rígido de la figura B.7 respecto al eje *OM*. Sean *l*, *m* y *n* los cosenos directores de *OM*, de forma que un vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ según *OM* podrá escribirse $\boldsymbol{\lambda} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$. El momento de inercia respecto a *OM* es

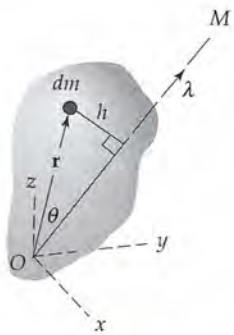


Figura B.7

$$I_M = \int h^2\, dm = \int (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda})\, dm$$

donde $|\mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda}| = r \operatorname{sen} \theta = h$. El producto vectorial es

$$(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda}) = (yn - zm)\mathbf{i} + (zl - xn)\mathbf{j} + (xm - yl)\mathbf{k}$$

y el producto escalar nos da, tras agrupar los términos,

$$(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda}) = h^2 = (y^2 + z^2)l^2 + (x^2 + z^2)m^2 + (x^2 + y^2)n^2 - 2xylm - 2xzln - 2yzmn$$

Entonces, sustituyendo aquí por las expresiones equivalentes de B.4 y B.8, resulta

$$I_M = I_{xx} l^2 + I_{yy} m^2 + I_{zz} n^2 - 2I_{xy} lm - 2I_{xz} ln - 2I_{yz} mn \qquad \text{(B.10)}$$

Esta expresión nos da el momento de inercia respecto a cualquier eje *OM* en función de los cosenos directores del eje y de los momentos y productos de inercia respecto a los ejes coordenados.

(a) Ejes principales de inercia. Desarrollando la expresión 7.11 del momento cinético de un cuerpo rígido se obtiene la matriz

http://gratislibrospdf.com/

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

conocida como *matriz de inercia* o *tensor de inercia*. Estudiando para un origen dado la variación de los momentos y productos de inercia con la orientación de los ejes respecto al cuerpo, se llega a la conclusión de que en el caso más general existe una única orientación x-y-z para la cual los productos de inercia son nulos y la matriz adopta la forma diagonal

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Los ejes x-y-z se llaman *ejes principales de inercia* e I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} se llaman *momentos principales de inercia* y son los valores máximo y mínimo y otro intermedio de los momentos de inercia para el origen concretamente elegido.

Puede demostrarse[1] que para una orientación dada de los ejes x-y-z la resolución de la ecuación de tercer grado

$$\begin{bmatrix} I_{xx}-I & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy}-I & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz}-I \end{bmatrix} \tag{B.11}$$

da tres raíces I_1, I_2 e I_3 que son los tres momentos principales de inercia. Además, los cosenos directores l, m y n de un eje principal de inercia están dados por

$$\begin{aligned} (I_{xx}-I)l - I_{xy}m - I_{xz}n &= 0 \\ -I_{yx}l + (I_{yy}-I)m - I_{yz}n &= 0 \\ -I_{zx}l - I_{zy}m + (I_{zz}-I)n &= 0 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Estas ecuaciones unidas a la condición $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ facilitan la obtención por separado de los cosenos directores correspondientes a cada uno de los momentos principales.

Para que se imagine mejor el significado de estas conclusiones, consideremos el bloque rectangular de la figura B.8, representado con una orientación cualquiera respecto a los ejes x-y-z. Para simplificar, el centro de masa G se ha situado en el origen de coordenadas. Si se conocen los momentos y los productos de inercia del bloque respecto a los ejes x-y-z, al resolver la ecuación B.11 se obtendrán tres raíces, I_1, I_2 e I_3, que son los momentos principales de inercia. Después, al resolver las ecuaciones B.12, sucesivamente sustituyendo en ellas los valores de las tres "I", junto con $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, se obtendrán los cosenos directores, l, m y n, de cada uno de los ejes principales. Según las proporciones con las que se ha dibujado el bloque, vemos que I_1 es el momento de inercia máximo, I_2 es el intermedio e I_3 es el momento de inercia mínimo.

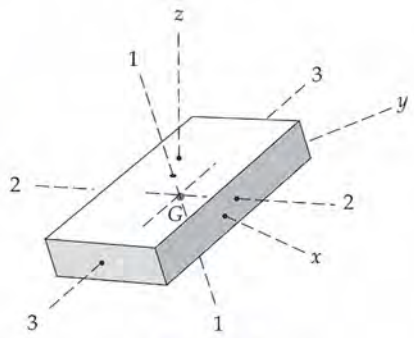
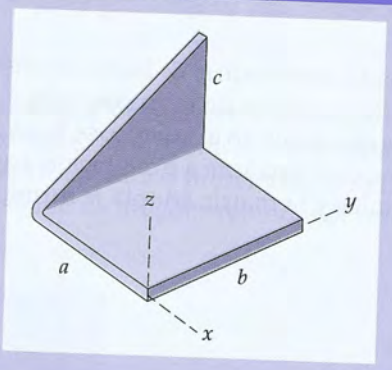


Figura B.8

[1] Vease *Dinámica*, del autor principal (Ed. Reverté, 1976)

http://gratislibrospdf.com/



En comparación con las demás dimensiones de la placa, el espesor t puede despreciarse. La densidad del material es ρ. Hallar los productos de inercia respecto a los ejes indicados.

Solución. Se estudian por separado cada una de las partes.

Parte rectangular. En el esquema de esta parte introducimos unos ejes paralelos $x_0 - y_0$ que pasan por el centro de masa G y aplicamos el segundo teorema de Steiner. Por simetría, $\bar{I}_{xy} = I_{x_0y_0} = 0$ y, por tanto,

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + md_xd_y] \qquad I_{xy} = 0 + \rho tab\left(-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{1}{4}\rho ta^2b^2$$

Como la coordenada z de todos los elementos de la placa es cero, resulta que $I_{xy} = I_{yz} = 0$.

Parte triangular. En el esquema de esta parte, localizamos el centro de masa G y colocamos en éste unos ejes x_0, y_0 y z_0. Como la coordenada x_0 de todos los elementos es cero, resulta que $\bar{I}_{xy} = I_{x_0y_0} = 0$ y que $\bar{I}_{xy} = I_{x_0y_0} = 0$. El segundo teorema de Steiner nos da

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + md_xd_y] \qquad I_{xy} = 0 + \rho t\frac{b}{2}c(-a)\left(\frac{2b}{3}\right) = -\frac{1}{3}\rho tab^2c$$

$$[I_{xz} = \bar{I}_{xz} + md_xd_z] \qquad I_{zx} = 0 + \rho t\frac{b}{2}c(-a)\left(\frac{c}{3}\right) = -\frac{1}{6}\rho tabc^2$$

Obtenemos I_{yz} por integración directa, teniendo en cuenta que la distancia a del plano del triángulo al plano y-z no afecta en absoluto a las coordenadas y y z. Con el elemento de masa $dm = \rho t\, dy\, dz$, tenemos

$$\left[I_{yz} = \int yz\, dm\right] \qquad I_{yz} = \rho t\int_0^b\int_0^{cy/b} yz\, dz\, dy = \rho t\int_0^b y\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{cy/b} dy$$

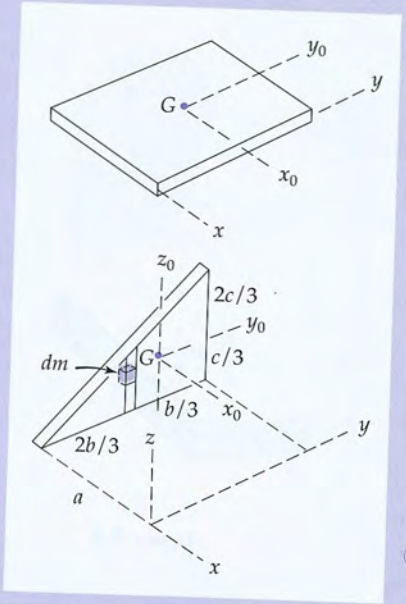
$$= \frac{\rho tc^2}{2b^2}\int_0^b y^3\, dy = \frac{1}{8}\rho tb^2c^2$$

Sumando las expresiones correspondientes a las dos porciones resulta

$$I_{xy} = -\tfrac{1}{4}\rho ta^2b^2 - \tfrac{1}{3}\rho tab^2c = -\tfrac{1}{12}\rho tab^2(3a + 4c) \qquad \textit{Resp.}$$

$$I_{xz} = 0 \qquad -\tfrac{1}{6}\rho tabc^2 = -\tfrac{1}{6}\rho tabc^2 \qquad \textit{Resp.}$$

$$I_{yz} = 0 \qquad +\tfrac{1}{8}\rho tab^2c^2 = +\tfrac{1}{8}\rho tab^2c^2 \qquad \textit{Resp.}$$

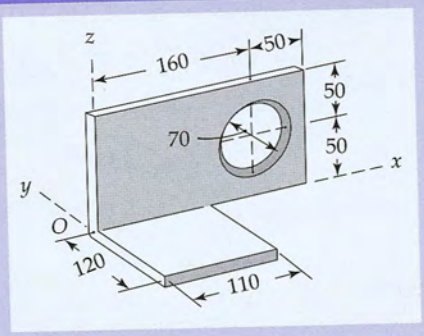


① Debemos tener cuidado para conservar el mismo sentido que las coordenadas. Así, más x_0 e y_0 deben concordar con más x e y.

② Hemos preferido integrar primero respecto a z, cuyo límite superior es la altura variable $z = cy/b$. Si hubiéramos de integrar primero respecto a y, los límites de la primera integral estarían comprendidos entre la variable $y = bz/c$ y b.

http://gratislibrospdf.com/

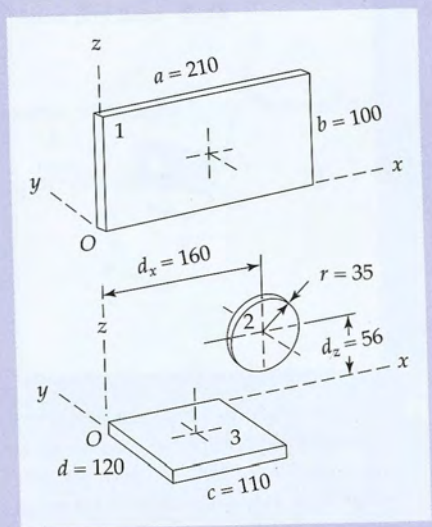
El soporte angular es de chapa de aluminio cuya masa es de 13,45 kg por metro cuadrado. Calcular los momentos principales de inercia respecto al origen O y los cosenos directores de los ejes principales de inercia. El espesor de la chapa es pequeño comparado con las otras medidas.



Solución. Las masas de las tres partes son

$$m_1 = 13{,}45(0{,}21)(0{,}1) = 0{,}282 \text{ kg}$$
$$m_2 = -13{,}45\pi(0{,}035)^2 = -0{,}0518 \text{ kg}$$
$$m_3 = 13{,}45(0{,}12)(0{,}11) = 0{,}1775 \text{ kg}$$

① Adviértase que la masa del orificio se trata como númsro negativo.



Parte 1

$$I_{xx} = \tfrac{1}{3}mb^2 = \tfrac{1}{3}(0{,}282)(0{,}1)^2 = 9{,}42(10^{-4}) \text{ kg·m}^2$$
$$I_{yy} = \tfrac{1}{3}m(a^2+b^2) = \tfrac{1}{3}(0{,}282)[(0{,}21)^2+(0{,}1)^2] = 50{,}9(10^{-4}) \text{ kg·m}^2$$
$$I_{zz} = \tfrac{1}{3}ma^2 = \tfrac{1}{3}(0{,}282)(0{,}21)^2 = 41{,}5(10^{-4}) \text{ kg·m}^2$$
$$I_{xy} = 0 \qquad I_{yz} = 0$$
$$I_{xz} = 0 + m\,\frac{a}{2}\,\frac{b}{2} = 0{,}282(0{,}105)(0{,}05) = 14{,}83(10^{-4}) \text{kg·m}^2$$

Parte 2

$$I_{xx} = \tfrac{1}{4}mr^2 + md_z^2 = -0{,}0518\left[\frac{(0{,}035)^2}{4} + (0{,}050)^2\right]$$
$$= -1{,}45(10^{-4}) \text{ kg·m}^2$$

$$I_{yy} = \tfrac{1}{2}mr^2 + m(d_x^2 + d_z^2) = -0{,}0518\left[\frac{(0{,}035)^2}{2} + (0{,}16)^2 + (0{,}050)^2\right]$$
$$= -14{,}86(10^{-4}) \text{ kg·m}^2$$

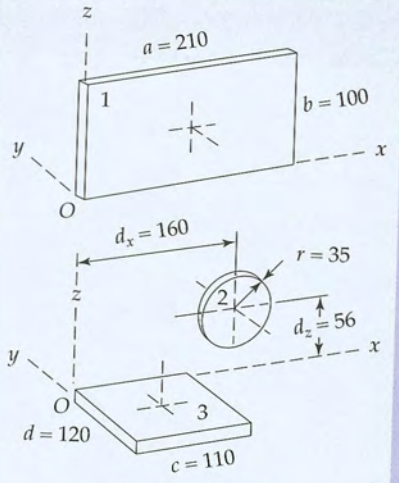
$$I_{zz} = \tfrac{1}{4}mr^2 + md_x^2 = -0{,}0518\left[\frac{(0{,}035)^2}{4} + (0{,}16)^2\right]$$
$$= -13{,}41(10^{-4}) \text{ kg·m}^2$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_{yz} = 0$$

$$I_{xz} = 0 + md_xd_z = -0{,}0518(0{,}16)(0{,}05) = -4{,}14(10^{-4}) \text{ kg·m}^2$$

② Esta fórmula se deduce sin dificultad. Consultar también la tabla D.4.

http://gratislibrospdf.com/



(Figura repetida)

Parte 3

$$I_{xx} = \tfrac{1}{3}md^2 = \tfrac{1}{3}(0{,}1775)(0{,}12)^2 = 8{,}52(10^{-4})\ \text{kg·m}^2$$

$$I_{yy} = \tfrac{1}{3}mc^2 = \tfrac{1}{3}(0{,}1775)(0{,}11)^2 = 7{,}16(10^{-4})\ \text{kg·m}^2$$

$$I_{zz} = \tfrac{1}{3}m(c^2 + d^2) = \tfrac{1}{3}(0{,}1175)[(0{,}11)^2 + (0{,}12)^2]$$
$$= 15{,}68(10^{-4})\ \text{kg·m}^2$$

$$I_{xy} = m\frac{c}{2}\left(\frac{-d}{2}\right) = 0{,}1175(0{,}055)(-0{,}06) = -5{,}86(10^{-4})\ \text{kg·m}^2$$

$$I_{yz} = 0 \qquad I_{xz} = 0$$

Totales

$$I_{xx} = 16{,}48(10^{-4})\ \text{kg·m}^2 \qquad I_{xy} = -5{,}86(10^{-4})\ \text{kg·m}^2$$
$$I_{yy} = 43{,}23(10^{-4})\ \text{kg·m}^2 \qquad I_{yz} = 0$$
$$I_{zz} = 43{,}79(10^{-4})\ \text{kg·m}^2 \qquad I_{xz} = 10{,}69(10^{-4})\ \text{kg·m}^2$$

Llevando estos valores a la ecuación B.11, desarrollando el determinante y simplificando queda (3)

$$I^3 - 103{,}51(10^{-4})I^2 + 3179(10^{-8})I - 24\,769(10^{-12}) = 0$$

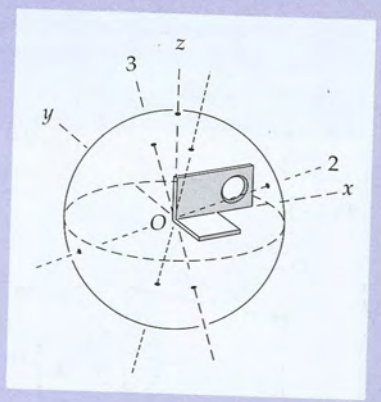
Resolviendo esta ecuación de tercer grado se obtienen las raíces siguientes, que son los momentos principales de inercia:

$$I_1 = 48{,}4(10^{-4})\ \text{kg·m}^2$$
$$I_2 = 11{,}82(10^{-4})\ \text{kg·m}^2$$
$$I_3 = 43{,}3(10^{-4})\ \text{kg·m}^2$$

Los cosenos directores de cada eje principal se obtienen aplicando cada una de estas raíces sucesivamente en las ecuaciones B.12 y combinando éstas con $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Los resultados son

$$l_1 = 0{,}363 \qquad l_2 = 0{,}934 \qquad l_3 = 0{,}0183$$
$$m_1 = 0{,}409 \qquad m_2 = -0{,}174 \qquad m_3 = 0{,}895$$
$$n_1 = -0{,}837 \qquad n_2 = -0{,}312 \qquad n_3 = -0{,}445$$

En la última figura se ilustra el soporte con sus ejes principales de inercia orientados de acuerdo con los resultados de los cálculos.



(3) Para resolver una ecuación de tercer grado puede recurrirse a un programa de ordenador, o bien pueden emplearse las fórmulas citadas en el punto 4 del apartado C/4 del apéndice C

http://gratislibrospdf.com/

PROBLEMAS

Problemas introductorios

B.45 Hallar los productos de inercia respecto a los ejes de coordenadas del conjunto formado por cuatro pequeñas partículas, de masa m cada una, unidas por barras ligeras, pero rígidas.

Resp. $I_{xy} = -2ml^2$, $I_{xz} = -4ml^2$, $I_{yz} = 0$

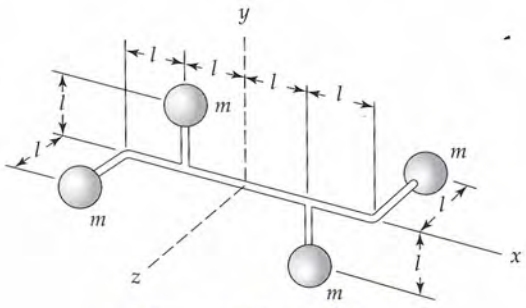


Figura problema B.45

B.46 Hallar los productos de inercia de la barra esbelta uniforme de masa m, respecto a los ejes de coordenadas indicados.

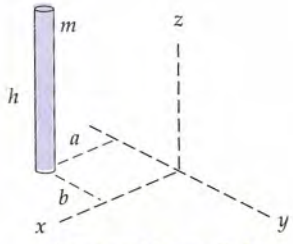


Figura problema B.46

B.47 Hallar los productos de inercia respecto a los ejes de coordenadas de la placa cuadrada con dos agujeros circulares. La masa del material de la placa por unidad de superficie es ρ.

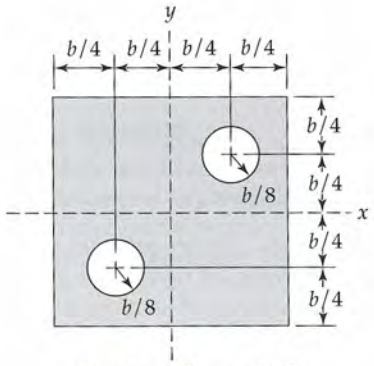


Figura problema B.47

Resp. $I_{xy} = \dfrac{\rho\pi b^4}{512}$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$

B.48 El bloque rectangular uniforme tiene una masa de 25 kg. Calcular sus productos de inercia respecto a los ejes de coordenadas indicados.

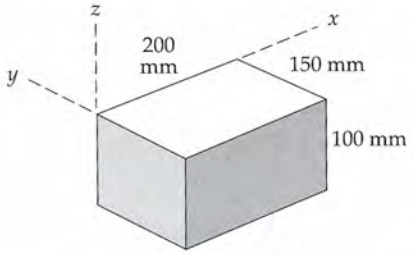


Figura problema B.48

B.49 Hallar el producto de inercia I_{xy} de la barra esbelta de masa m.

Resp. $I_{xy} = -\frac{1}{24}ml^2 \operatorname{sen} 2\theta$

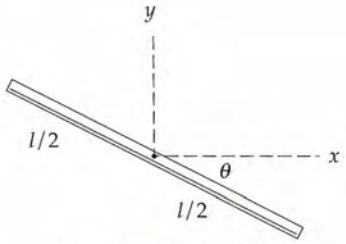


Figura problema B.49

B.50 Hallar los productos de inercia del semicilindro macizo homogéneo de masa m respecto a los ejes indicados.

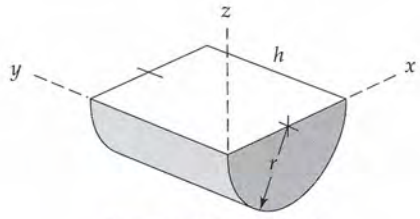


Figura problema B.50

http://gratislibrospdf.com/

Problemas representativos

B.51 Hallar los productos de inercia respecto a los ejes dados de la placa rectangular uniforme de masa m.

Resp. $I_{xy} = -\frac{1}{6}mb^2 \operatorname{sen} 2\theta$

$I_{xz} = \frac{1}{4}mbh \cos\theta$

$I_{yz} = \frac{1}{4}mbh \operatorname{sen}\theta$

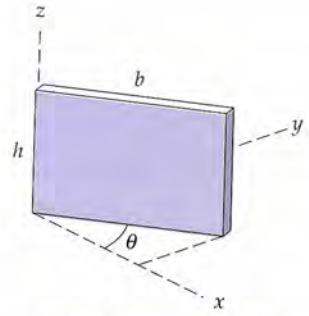


Figura problema B.51

B.52 Demostrar sin cálculo que $I_{x'y'} = 0$ para los ejes x' e y' que pasan por el centro del bloque cuadrado de caras paralelas.

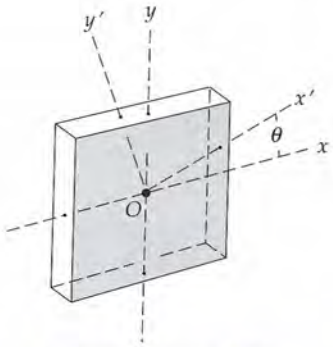


Figura problema B.52

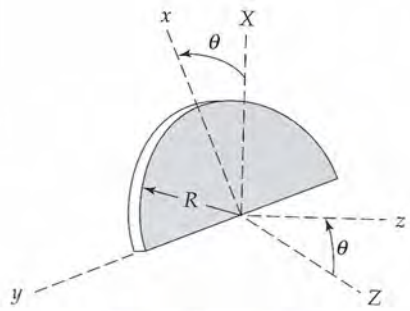


Figura problema B.53

B.53 Se repite aquí la placa semicircular de masa m y radio R, inclinada un ángulo θ con el plano X-y del problema B.44. Hallar por los métodos de este apartado el momento de inercia respecto al eje Z.

Resp. $I_{ZZ} = \frac{1}{4}mR^2(1 + \cos^2\theta)$

B.54 Demostrar que el momento de inercia del conjunto rígido formado por tres bolas idénticas, todas ellas de masa m y radio r es el mismo para todos los ejes que pasan por O. Se desprecia la masa de las varillas que unen las bolas.

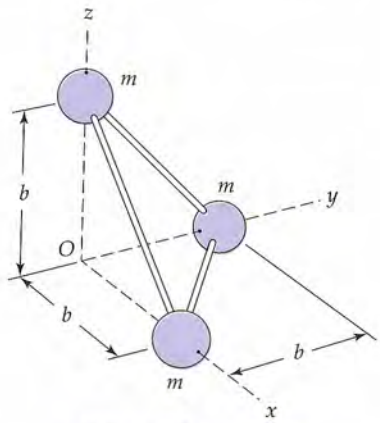


Figura problema B.54

B.55 Hallar los productos de inercia I_{xy}, I_{xz} e I_{yz} de la varilla delgada de masa m doblada en la forma que se indica.

Resp. $I_{xy} = \dfrac{mb^2}{4\sqrt{2}}$, $I_{xz} = -\dfrac{1}{12}mb^2$, $I_{yz} = -\dfrac{mb^2}{4\sqrt{2}}$

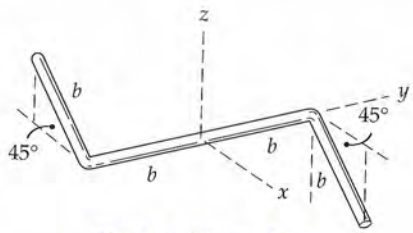


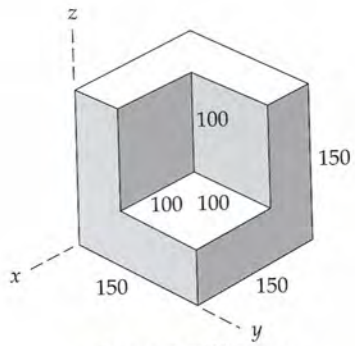
Figura problema B.55

B.56 La pieza vaciada de aluminio es un cubo de 150 mm con un hueco, también cúbico, de 100 mm. Calcular los productos de inercia de la pieza respecto a los ejes que se muestran.

B.57 La placa de acero, con dos pliegues a ángulo recto y un agujero en el centro, tiene un espesor de 15 mm. Calcular su momento de inercia respecto al eje diagonal que pasa por los vértices A y B.

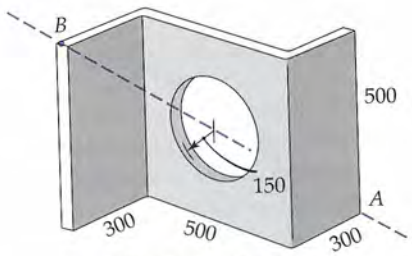
Resp. $I_{AB} = 2{,}58\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$

http://gratislibrospdf.com/



Cotas en milímetros

Figura problema B.56



Cotas en milímetros

Figura problema B.57

B.58 El plano del disco fino de masa m y radio r forma el ángulo β con el plano x-y. Hallar el producto de inercia del disco respecto al plano x-y.

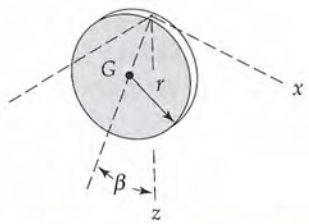


Figura problema B.58

* Problemas para ordenador

***B.59** Cada una de las esferas de masa m son de radio pequeño comparado con la cota b. Despreciar la masa de la armadura de varillas y determinar los momentos de inercia del conjunto respecto a las coordenadas indicadas. Hallar también los cosenos directores de los ejes de momentos de inercia máximo.

Resp. $I_1 = 7{,}525mb^2$, $l_1 = 0{,}521$
$I_2 = 6{,}631mb^2$, $m_1 = -0{,}756$
$I_3 = 1{,}844mb^2$, $n_1 = 0{,}397$

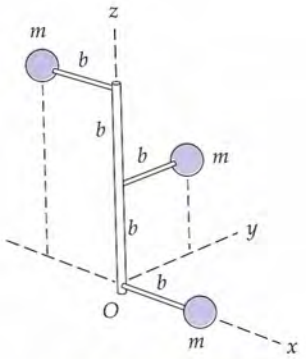


Figura problema B.59

***B.60** Hallar los momentos de inercia principales de la barra doblada cuya masa es ρ por unidad de longitud.

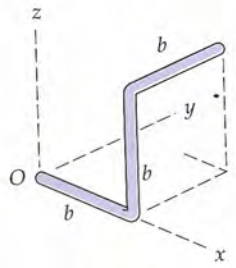


Figura problema B.60

***B.61** Se presenta aquí la varilla delgada del problema B.16 con el eje A-A que pasa por el centro de masa G y que está contenido en el plano de la varilla. Hallar el momento de inercia I de la varilla respecto al eje A-A en función de θ y dibujar una gráfica del mismo para valores de θ comprendidos entre $\theta = 0$ y aquél que de tanto I_{min} como I_{max}. Comprobar los resultados gráficos de I_{min} e I_{max} con los calculados con las ecuaciones A.11 del *volumen I Estática*.

Resp. $I_{min} = 0{,}1905mr^2$ con $\theta = 25{,}9°$
$I_{max} = 1{,}809mr^2$ con $\theta = 115{,}9°$

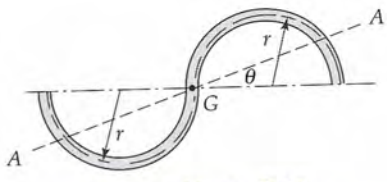


Figura problema B.61

http://gratislibrospdf.com/

*B.62 Hallar el momento de inercia I respecto al eje OM de la varilla delgada uniforme curvada como se indica y cuya masa por unidad de longitud es ρ. Representar gráficamente I en función de θ para valores de 0 a 90° y determinar al valor mínimo de I y el ángulo α que forma el eje con la dirección de x. (*Nota*. Puesto que el análisis no implica a la coordenada z, se pueden utilizar en este problema las fórmulas desarrolladas para momentos de inercia de superficies en las ecuaciones A.9, A.10 y A.11 del apéndice A del *volumen 1 Estática*.)

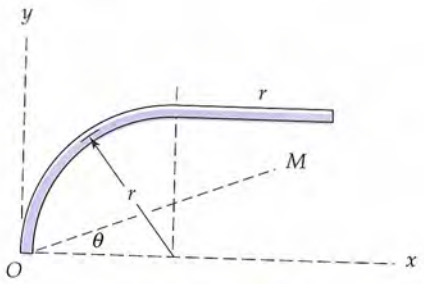


Figura problema B.62

*B.63 La placa delgada, de masa ρ por unidad de longitud, está conformada como se indica. Hallar sus momentos de inercia principales respecto a los ejes que pasan por O.

Resp. $I_1 = 3{,}779\rho b^4$
$I_2 = 0{,}612\rho b^4$
$I_3 = 3{,}608\rho b^4$

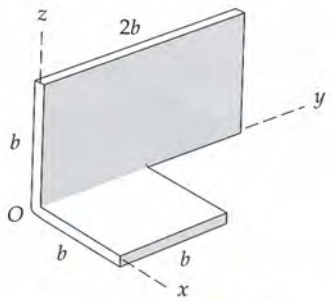


Figura problema B.63

*B.64 La varilla esbelta de masa ρ por unidad de longitud está conformada como se indica. Hallar los momentos de inercia principales respecto a los ejes que pasan por O y calcular los cosenos directores del eje de momento de inercia mínimo.

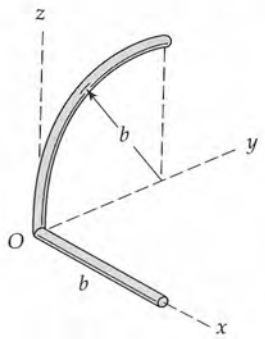


Figura problema B.64

http://gratislibrospdf.com/

Apéndice C: Temas escogidos de matemáticas

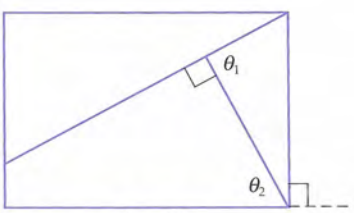
C.1 INTRODUCCIÓN

Este apéndice C contiene un resumen y formulario abreviado de temas fundamentales de matemáticas de aplicación frecuente en Mecánica. Las relaciones se trascriben sin demostración. Los estudiantes de Mecánica tendrán ocasiones frecuentes de utilizar muchas de estas relaciones y se encontrarán en desventaja si no las dominan perfectamente. Existen también otras materias que aquí no se incluyen que son asimismo necesarias de vez en cuando.

Cuando el lector repase y aplique sus conocimientos matemáticos, debe tener presente que la Mecánica es una ciencia aplicada que describe cuerpos materiales y movimientos reales. Por tanto, las interpretaciones geométrica y física de la matemática aplicada en cada caso deben tenerse presentes con toda claridad durante el desarrollo de la teoría y durante el planteo y resolución de los problemas.

C.2 GEOMETRÍA PLANA

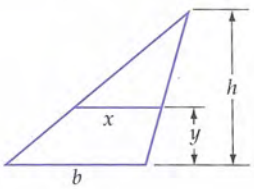
1. Cuando dos rectas que se cortan son respectivamente perpendiculares a otras dos rectas, los ángulos formados por cada pareja de rectas son iguales.



$\theta_1 = \theta_2$

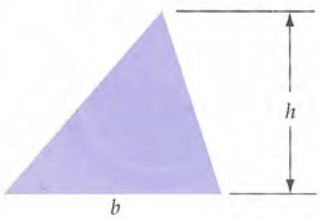
2. Triángulos semejantes

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$

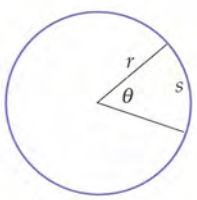


3 Para todo triángulo

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2}bh$$



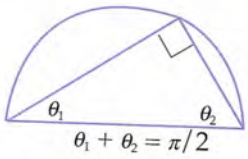
4. Círculo



http://gratislibrospdf.com/

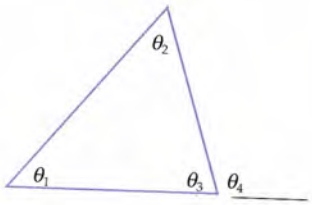
Perímetro $= 2\pi r$
Área $= \pi r^2$
Longitud de arco $s = r\theta$
Área del sector $= \frac{1}{2}r^2\theta$

5. Todo triángulo inscrito en un semicírculo es rectángulo.



6. Ángulos de un triángulo

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180°$$
$$\theta_4 = \theta_1 + \theta_2$$



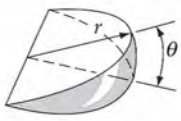
C.3 GEOMETRÍA DEL ESPACIO

1. Esfera

Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$
Área de la superficie $= 4\pi r^2$

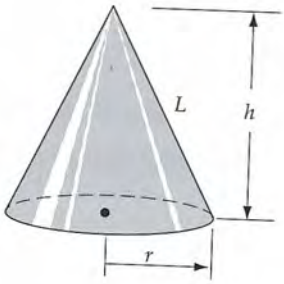
2. Cuña esférica

Volumen $= \frac{2}{3}r^3\theta$



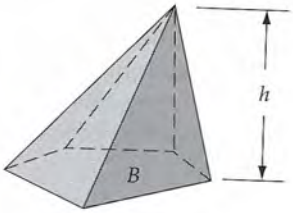
3. Cono circular recto

Volumen $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Área lateral $= \pi r L$
$L = \sqrt{r^2 + h^2}$



4. En toda pirámide o cono

Volumen $= \frac{1}{3}Bh$
donde B = área de la base



C.4 ÁLGEBRA

1. Ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad b^2 \geq 4ac \text{ si las raíces son reales}$$

2. Logaritmos

$b^x = y$, $x = \log_b y$

Logaritmos naturales
$b = e = 2{,}718282$
$e^x = y$, $x = \log_e y = \ln y$
$\log(ab) = \log a + \log b$
$\log(a/b) = \log a - \log b$
$\log(1/n) = -\log n$
$\log a^n = n \log a$
$\log 1 = 0$
$\log_{10} x = 0{,}4343 \ln x$

http://gratislibrospdf.com/

3. Determinantes

2° orden

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

3° orden

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

4. Ecuación de tercer grado

$x^3 = Ax + B$
Sea $p = A/3$, $q = B/2$

Caso I: $q^2 - p^3$ es negativo (tres raíces reales y distintas)

$$\cos u = q/(p\sqrt{p}),\ 0 < u < 180°$$
$$x_1 = 2\sqrt{p}\cos(u/3)$$
$$x_2 = 2\sqrt{p}\cos(u/3 + 120°)$$
$$x_3 = 2\sqrt{p}\cos(u/3 + 240°)$$

Caso II: $q^2 - p^3$ es positivo (una raíz real y dos imaginarias)

$$x_1 = (q + \sqrt{q^2 - p^3})^{1/3} + (q - \sqrt{q^2 - p^3})^{1/3}$$

Caso III: $q^2 - p^3 = 0$ (tres raíces reales, de las que dos son iguales)

$$x_1 = 2q^{1/3},\ x_2 = x_3 = -q^{1/3}$$

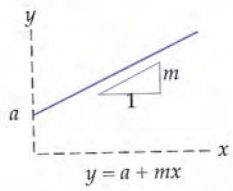
En el caso de una ecuación general de tercer grado

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

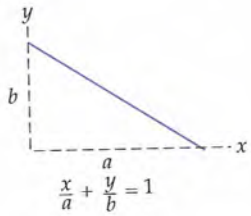
se hace el cambio $x = x_0 - a/3$ y se obtiene ${x_0}^3 = Ax_0 + B$. A continuación se procede como antes y se determina x_0 y después $x = x_0 - a/3$.

C.5 GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. Línea recta

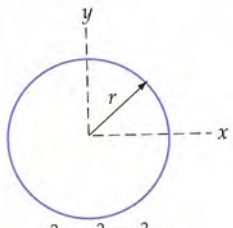


$y = a + mx$

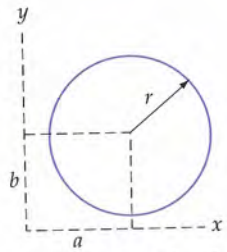


$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

2. Círculo

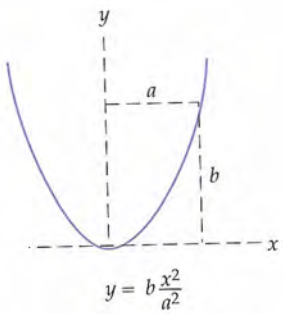


$x^2 + y^2 = r^2$

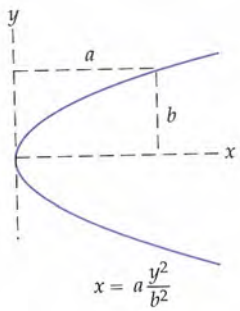


$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

3. Parábola

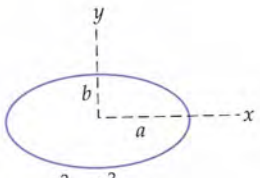


$y = b\frac{x^2}{a^2}$



$x = a\frac{y^2}{b^2}$

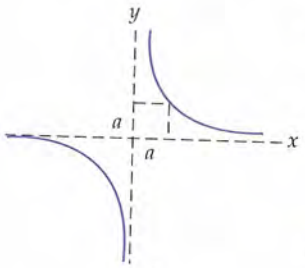
4. Elipse



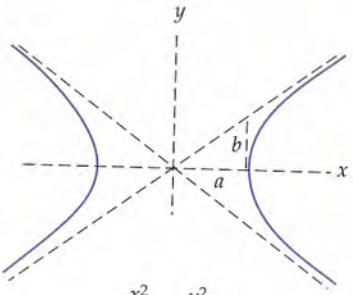
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

http://gratislibrospdf.com/

5. Hipérbola



$xy = a^2$

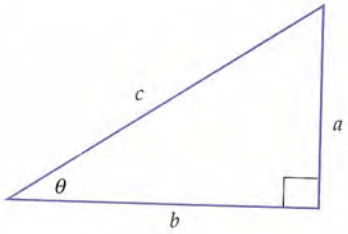


$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

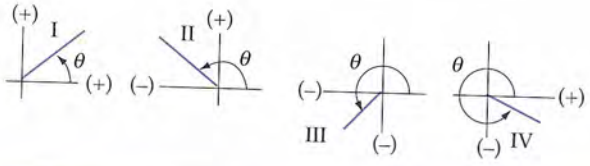
C.6 TRIGONOMETRÍA

1. Definiciones

$\operatorname{sen}\theta = a/c \qquad \csc\theta = c/a$
$\cos\theta = b/c \qquad \sec\theta = c/b$
$\operatorname{tg}\theta = a/b \qquad \cot\theta = b/a$



2. Signos en los cuatro cuadrantes



	I	II	III	IV
sen θ	+	+	−	−
cos θ	+	−	−	+
tg θ	+	−	+	−
csc θ	+	+	−	−
sec θ	+	−	−	+
cot θ	+	−	+	−

3. Fórmulas varias

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$
$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

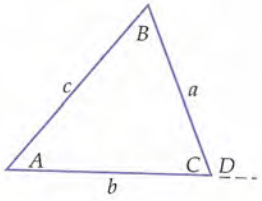
$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos\theta)}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos\theta)}$$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$
$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$
$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

4. Teorema del seno

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$



5. Teorema del coseno

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos D$

C.7 ÁLGEBRA VECTORIAL

1. ***Notación.*** Las magnitudes vectoriales se imprimen en negrita y las magnitudes escalares en cursiva común. Así, el módulo del vector **V** se escribe V. En la escritura ordinaria, las magnitudes vectoriales deben representarse por símbolos como $\underline{V}$ o $\vec{V}$ para distinguirlas de las escalares.

http://gratislibrospdf.com/

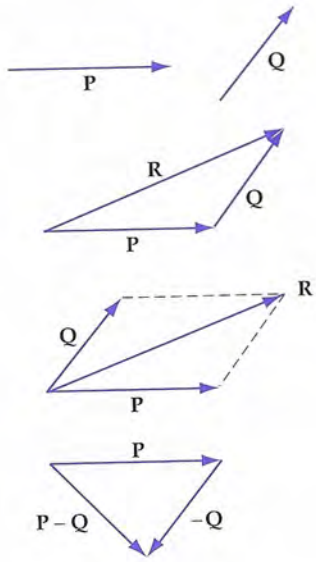
2. Adición

Triángulo de vectores $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{R}$

Paralelogramo de vectores $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{R}$

Conmutatividad $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}$

Asociatividad $\mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{R}$



3. Resta

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q})$$

4. *Vectores unitarios* i, j, k

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$$

donde $$|\mathbf{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

5. *Cosenos directores.*

l, m y n son los cosenos de los ángulos que forma $\mathbf{V}$ con los ejes x, y y z. Entonces

$$l = V_x/V \qquad m = V_y/V \qquad n = V_z/V$$

por lo que $$\mathbf{V} = V(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})$$

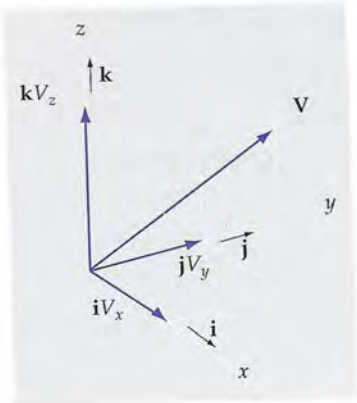
y $$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

6. *Producto escalar*

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ\cos\theta$$

Este producto puede considerarse como el producto del módulo de $\mathbf{P}$ por la componente $Q\cos\theta$ de $\mathbf{Q}$ según la dirección de $\mathbf{P}$ o como el módulo de $\mathbf{Q}$ por la componente $P\cos\theta$ de $\mathbf{P}$ según la dirección de $\mathbf{Q}$.

Propiedad conmutativa $\qquad \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$



De la definición de producto escalar

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \cdot (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

$$= P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$$

De la definición de producto escalar se deduce que dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ serán perpendiculares cuando se anule su producto escalar, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 0$.

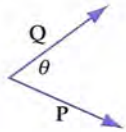
El ángulo θ que forman dos vectores $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ puede hallarse a partir de la expresión $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = P_1P_2\cos\theta$ de su producto escalar y se tiene

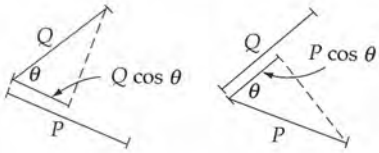
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2}{P_1P_2} = \frac{P_{1_x}P_{2_x} + P_{1_y}P_{2_y} + P_{1_z}P_{2_z}}{P_1P_2} = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$$

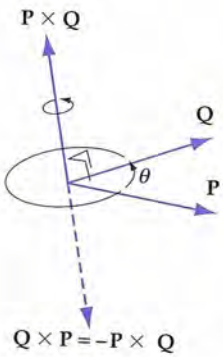
donde l, m y n son los respectivos cosenos directores de los vectores. Se observa también que dos vectores serán perpendiculares cuando sus cosenos directores cumplan la relación $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

Propiedad distributiva $\qquad \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$

http://gratislibrospdf.com/







7. *Producto vectorial.* El producto vectorial $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ de los dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ es, por definición, un vector de módulo

$$|\mathbf{P} \times \mathbf{Q}| = PQ \operatorname{sen} \theta$$

cuya dirección y sentido quedan definidos por la regla de la mano derecha tal como se indica en la figura. Invirtiendo el orden de los vectores y aplicando la regla de la mano derecha resulta $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = -\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$.

Propiedad distributiva $$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{R}$$

De la definición de producto vectorial resulta que para *todo sistema de coordenadas directo*

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Con ayuda de estas identidades y de la propiedad distributiva, el producto vectorial puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \times \mathbf{Q} &= (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \times (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}) \\ &= (P_yQ_z - P_zQ_y)\mathbf{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\mathbf{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\mathbf{k}\end{aligned}$$

El producto vectorial puede también escribirse en forma de determinante

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

8. *Otras relaciones*

Producto mixto $(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$. El punto y el aspa pueden intercambiarse mientras se conserve el orden de los vectores. El paréntesis es superfluo puesto que $\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R})$ carece de sentido ya que no es posible multiplicar vectorialmente un vector $\mathbf{P}$ por un escalar $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$. Así pues, la expresión puede escribirse

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$$

El producto mixto puede desarrollarse en forma de determinante

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

Doble producto vectorial $$\begin{aligned}(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{R} &= -\mathbf{R} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \\ &= \mathbf{R} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{P})\end{aligned}$$

http://gratislibrospdf.com/

En este caso es necesario el uso del paréntesis ya que la expresión $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ sería ambigua por no especificar qué vectores hay que multiplicar vectorialmente. Puede demostrarse que el doble producto vectorial equivale a

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}\mathbf{Q} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{P}$$

o bien

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}\mathbf{Q} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{R}$$

El primer término de la primera expresión, por ejemplo, es el producto escalar $\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$, que es un escalar, multiplicado por el vector $\mathbf{Q}$.

9. *Las derivadas de los vectores* cumplen las misma reglas que las de los escalares

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \dot{\mathbf{P}} = \dot{P}_x\mathbf{i} + \dot{P}_y\mathbf{j} + \dot{P}_z\mathbf{k}$$

$$\frac{d(\mathbf{P}u)}{dt} = \mathbf{P}\dot{u} + \dot{\mathbf{P}}u$$

$$\frac{d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})}{dt} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{Q}$$

$$\frac{d(\mathbf{P} \times \mathbf{Q})}{dt} = \mathbf{P} \times \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}} \times \mathbf{Q}$$

4. *Integración de vectores.* Si es $\mathbf{V}$ una función de x, y y z y es $d\tau = dx\,dy\,dz$ un elemento de volumen, la integral de $\mathbf{V}$ extendida a un volumen puede escribirse como suma vectorial de las tres integrales

$$\int \mathbf{V}\,d\tau = \mathbf{i}\int V_x\,d\tau + \mathbf{j}\int V_y\,d\tau + \mathbf{k}\int V_z\,d\tau$$

C.8 SERIES

(La expresión entre corchetes a continuación de la serie indica el dominio de convergencia.)

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad [x^2 < 1]$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad [x^2 < \infty]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad [x^2 < \infty]$$

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad [x^2 < \infty]$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad [x^2 < \infty]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

donde $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$, $\quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx$

[Desarrollo de Fourier para $-l < x < l$]

http://gratislibrospdf.com/

C.9 DERIVADAS

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \qquad \frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} \Delta x = \operatorname{sen} dx = \operatorname{tg} dx = dx$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos \Delta x = \cos dx = 1$$

$$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d \cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x, \qquad \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d \operatorname{senh} x}{dx} = \cosh x, \qquad \frac{d \cosh x}{dx} = \operatorname{senh} x, \qquad \frac{d \operatorname{tgh} x}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

C.10 INTEGRALES

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sqrt{a+bx} \, dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x\sqrt{a+bx} \, dx = \frac{2}{15b^2}(3bx - 2a)\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx} \, dx = \frac{2}{105b^3}(8a^2 - 12abx + 15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b}$$

$$\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b-x}} \, dx = -\sqrt{a+x}\sqrt{b-x} + (a+b)\operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{a+x}{a+b}}$$

$$\int \frac{x \, dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}[a + bx - a \ln(a+bx)]$$

$$\int \frac{x \, dx}{(a+bx)^n} = \frac{(a+bx)^{1-n}}{b^2}\left(\frac{a+bx}{2-n} - \frac{a}{1-n}\right)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{ab}}{b} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{1}{\sqrt{-ab}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{-ab}}{a}$$

$$\int \frac{x \, dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \ln(a+bx^2)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \tfrac{1}{2}[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})]$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2} \, dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2 - x^2)^3}$$

http://gratislibrospdf.com/

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+\frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{5}(x^2+\tfrac{2}{3}a^2)\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\sqrt{a+bx+cx^2}+x\sqrt{c}+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)$$

o bien $$= \frac{-1}{\sqrt{-c}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2\pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2\pm x^2}$$

$$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{3}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3}\mp\frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2\pm a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \sec x\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$$

$$\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$$

$$\int \operatorname{tgh} x\,dx = \ln\cosh x$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

http://gratislibrospdf.com/

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} px\,dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} px - p\cos px)}{a^2+p^2}$$

$$\int e^{ax}\cos px\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos px + p\operatorname{sen} px)}{a^2+p^2}$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{4+a^2}\left(a\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int e^{ax}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{4+a^2}\left(a\cos^2 x + \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} x\cos x\,dx = \frac{e^{ax}}{4+a^2}\left(\frac{a}{2}\operatorname{sen} 2x - \cos 2x\right)$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\frac{\cos x}{3}(2+\operatorname{sen}^2 x)$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x}{3}(2+\cos^2 x)$$

$$\int \cos^5 x\,dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x$$

$$\int x\operatorname{sen} x\,dx = \operatorname{sen} x - x\cos x$$

$$\int x\cos x\,dx = \cos x + x\operatorname{sen} x$$

$$\int x^2\operatorname{sen} x\,dx = 2x\operatorname{sen} x - (x^2-2)\cos x$$

$$\int x^2\cos x\,dx = 2x\cos x + (x^2-2)\operatorname{sen} x$$

Radio de curvatura

$$\rho_{xy} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

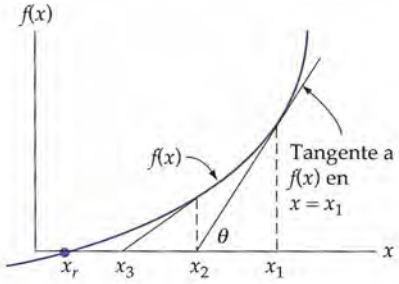
$$\rho_{r\theta} = \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

http://gratislibrospdf.com/

C.11 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POR EL MÉTODO NUMÉRICO DE NEWTON

Muchas veces, al aplicar las leyes fundamentales de la Mecánica se llega a una ecuación algebraica o transcendente no soluble (o no fácilmente soluble) en forma exacta. En estos casos, algún método iterativo, como el de Newton por ejemplo, puede ser una potente herramienta para obtener con buena aproximación la raíz o raíces de la ecuación.

La ecuación a resolver la ponemos en la forma $f(x) = 0$. En la parte (*a*) de la figura que se acompaña se representa una función cualquiera $f(x)$ en las proximidades de la raíz buscada x_r. Obsérvese que x_r es simplemente el valor de x al que la función cruza el eje x. Supongamos que se dispone (quizá mediante una representación gráfica hecha a mano) de un primer valor aproximado x_1 de esa raíz. Con tal que x_1 no esté cerca de un máximo o un mínimo de la función $f(x)$, podemos aproximarnos más a la raíz x_r prolongando la tangente a $f(x)$ en x_1 hasta que corte al eje en x_2. Observando la figura se ve que



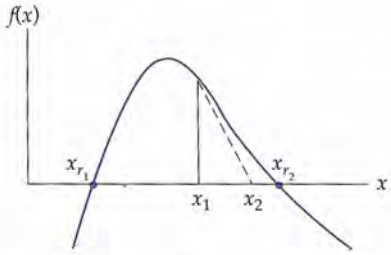
(*a*)

$$\text{tg}\ \theta = f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

donde $f'(x_1)$ es la derivada de $f(x)$ respecto a x particularizada en $x = x_1$. Despejando x_2 resulta

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

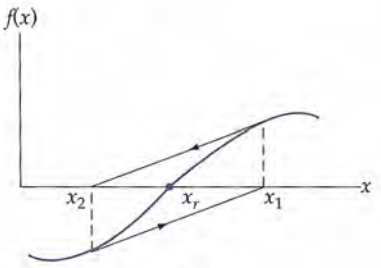
El término $-f(x_1)/f'(x_1)$ es una corrección al primer valor aproximado x_1. Una vez calculado el valor x_2, el proceso puede repetirse para obtener x_3, y así sucesivamente.



(*b*)

Por tanto, la expresión anterior puede generalizarse así

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



(*c*)

donde

x_{k+1} = $(k+1)$-ésima aproximación a la raíz buscada x_r

x_k = k-ésima aproximación a la raíz buscada

$f(x_k)$ = función $f(x)$ particularizada en $x = x_k$

$f'(x_k)$ = derivada de la función particularizada en $x = x_k$

La fórmula se aplica repetidamente hasta que $f(x_{k+1})$ se acerque suficientemente a cero y $x_{k+1} \cong x_k$. El lector deberá comprobar que la fórmula es válida para todas las posibles combinaciones de signos de x_k, $f(x_k)$ y $f'(x_k)$.

Proceden algunas advertencias:

1. Es evidente que $f'(x_k)$ no debe ser cero ni próxima a cero. Ello supondría, como se condicionó antes, que x_k corresponde exacta o aproximadamente a un mínimo o a un máximo de $f(x)$. Si la pendiente $f'(x_k)$ es nula, su prolongación no cortará nunca al eje x. Si la pendiente $f'(x_k)$ es pequeña, la corrección a x_k podría ser tan grande que x_{k+1} fuese una aproximación a la raíz

http://gratislibrospdf.com/

peor que x_k. Por esta razón, la experiencia aconseja limitar el valor del término correctivo; o sea, que si el valor absoluto de $f(x_k)/f'(x_k)$ es mayor que un valor máximo prefijado, se emplea ese valor máximo.

2. Si la ecuación $f(x) = 0$ posee varias raíces, debemos estar en las proximidades de la raíz buscada x_r para que el algoritmo converja realmente hacia esa raíz. En la parte (*b*) de la figura se representa una situación en la que la aproximación inicial x_1 produce la convergencia hacia x_{r_2} y no hacia x_{r_1}.
3. Puede tener lugar una oscilación de un lado a otro de la raíz si, por ejemplo, la función es antisimétrica respecto a una raíz que sea un punto de inflexión. Para evitar este efecto, que se representa en la parte (*c*) de la figura, suele bastar con emplear la mitad del término correctivo.

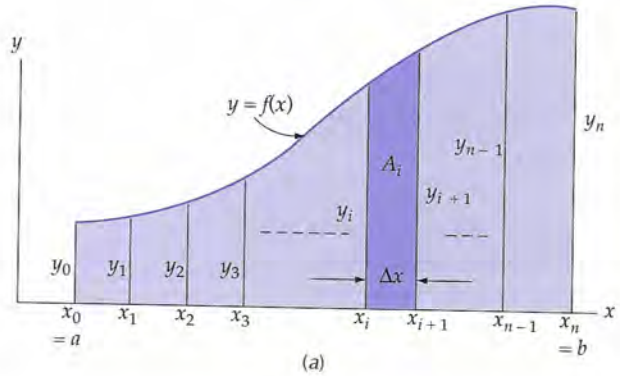
Ejemplo. Comenzando con un valor aproximado inicial $x_1 = 5$, aproximar la raíz única de la ecuación $e^x - 10\cos x - 100 = 0$.

En la tabla siguiente se resume la aplicación del método de Newton a la ecuación dada. El proceso iterativo se dio por terminado cuando el valor absoluto de la corrección $-f(x_k)/f'(x_k)$ se hizo inferior a 10^{-6}.

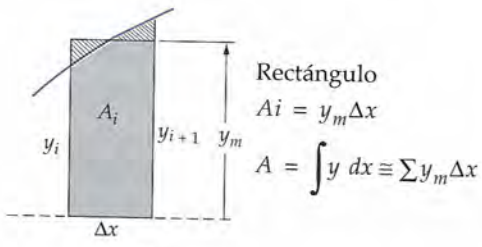
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1} - x_k = -\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
1	5,000 000	45,576 537	138,823 916	−0,328 305
2	4,671 695	7,285 610	96,887 065	−0,075 197
3	4,596 498	0,292 886	89,203 650	−0,003 283
4	4,593 215	0,000 527	88,882 536	−0,000 006
5	4,593 209	$-2(10^{-8})$	88,881 956	$2{,}25(10^{-10})$

C.12 ALGUNOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

1. Determinación de una área. Consideremos el problema de determinar el área de la superficie sombreada, que se indica en la parte (*a*) de la figura, limitada por la curva $y = f(x)$ y las abscisas $x = a$ y $x = b$, y que no sea factible la integración analítica. La función debe conocerse, bien en forma tabular por



(*a*)



(*b*)

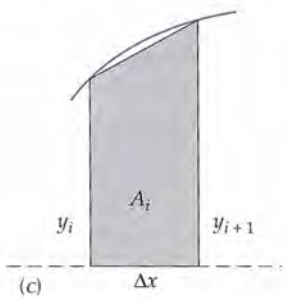
http://gratislibrospdf.com/

mediciones empíricas, bien en forma analítica; además, se supone que es continua en el intervalo $a < x < b$. La superficie podemos dividirla en n franjas verticales, de anchura $\Delta x = (b-a)/n$ cada una y luego sumar las áreas de todas las franjas para obtener $A = \int y\,dx$. En la figura se muestra con un sombreado más oscuro una franja representativa de área A_i. Se exponen brevemente tres procedimientos muy útiles de aproximación numérica. En todos ellos, cuanto mayor sea el número de franjas, mayor será la precisión que geométricamente proporcione la aproximación. Como regla general, puede comenzarse con un número de franjas relativamente pequeño y aumentar ese número hasta que las consiguientes variaciones en el valor aproximado del área ya no mejore la precisión deseada.

I. *Aproximación por rectángulos* [figura (*b*)] Se supone que las franjas son de superficie rectangular, tal como se muestra mediante la franja representativa, cuya altura y_m se toma a ojo de tal modo que las pequeñas superficies rayadas tengan unas áreas lo más iguales posible. Entonces, formamos la suma Σy_m de las alturas efectivas y multiplicamos por Δx. Si la función se conoce en forma analítica, para emplearla en la suma puede calcularse cada y_m como valor de la función en el punto medio $x_i + \Delta x/2$ de la base de cada rectángulo.

II. *Aproximación trapezoidal* [figura (*c*)] Se supone que las franjas son de superficie trapezoidal, tal como se muestra mediante la franja representativa. El área A_i de ésta es igual a la altura media $(y_i + y_{i+1})/2$ multiplicada por Δx. Sumando las áreas de todas las franjas se obtiene el valor aproximado del área tal como figura en la tabla. Para nuestro caso, si la curvatura es como se representa, la aproximación resultará por defecto. Si la curvatura fuese la contraria, la aproximación resultaría por exceso.

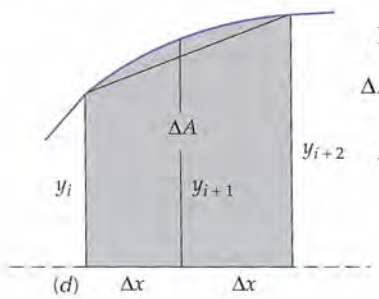
III. *Aproximación parabólica* [figura (*d*)] En este caso, la superficie comprendida entre la cuerda y la curva (que se desprecia en la aproximación trapezoidal)



Trapezoidal

$$A_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\Delta x$$

$$A = \int y\,dx \cong \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)\Delta x$$



Parabólica

$$\Delta A = \frac{1}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})\Delta x$$

$$A = \int y\,dx \cong \frac{1}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\Delta x$$

http://gratislibrospdf.com/

puede tenerse en cuenta aproximando la curva mediante una parábola definida por tres valores sucesivos de y. El área de esa superficie puede calcularse a partir de la geometría de la parábola y sumarse al área del trapezoide formado por la pareja de franjas, obteniéndose así el área ΔA de la pareja tal como se expone en la figura. Al sumar todas las áreas ΔA resulta la tabla que se muestra, conocida como regla de Simpson. Para aplicar la regla de Simpson, el número n de franjas ha de ser par.

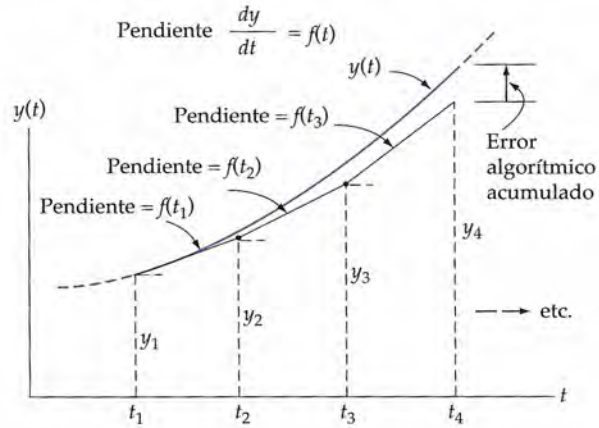
Ejemplo: Determinar el área de la superficie limitada por la curva $y = x\sqrt{1+x^2}$ entre $x = 0$ y $x = 2$. (Como ejemplo se toma una función integrable para que puedan compararse los tres valores aproximados con el valor exacto, que es

$$A = \int_0^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \tfrac{1}{3}(5\sqrt{5}-1) = 3{,}393\,447.)$$

NÚMERO DE SUBINTERVALOS	APROXIMACIÓN		
	POR RECTÁNGULOS	TRAPEZOIDAL	PARABÓLICA
4	3,361 704	3,456 731	3,392 214
10	3,388 399	3,403 536	3,393 420
50	3,393 245	3,393 850	3,393 447
100	3,393 396	3,393 547	3,393 447
1000	3,393 446	3,393 448	3,393 447
2500	3,393 447	3,393 447	3,393 447

Obsérvese que el error del peor valor aproximado es inferior al 2 por ciento incluso con sólo cuatro franjas.

2. Integración de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Es frecuente que la aplicación de las leyes fundamentales de la Mecánica dé por resultado relaciones diferenciales. Consideremos una de primer orden tal como $\frac{dy}{dt} = f(t)$, donde la función $f(t)$ no sea inmediatamente integrable o se conozca sólo en forma tabular. Podemos proceder a su integración numérica recurriendo a una técnica sencilla por proyección de pendientes, conocida como método de integración de Euler, que se ilustra en la figura.



http://gratislibrospdf.com/

A partir de t_1, donde conocemos el valor y_1, proyectamos la pendiente sobre un intervalo horizontal o incremento $(t_2 - t_1)$ y vemos que, $y_2 = y_1 + f(t_1)(t_2 - t_1)$. Este proceso podemos repetirlo en y_2 y luego sucesivamente hasta llegar al valor deseado de t. La expresión general será, pues,

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

Si y en función de t fuese lineal, es decir, si $f(t)$ fuese constante, el método daría un resultado exacto y no habría necesidad de la aproximación numérica en tal caso. Pero la variación de la pendiente dentro de cada intervalo introduce un error. Para el caso representado, el valor estimado y_2 es evidentemente inferior al valor de la función $y(t)$ para $t = t_2$. Hay técnicas de integración más precisas (como el método de Runge-Kutta) que tienen en cuenta la variación de la pendiente en los subintervalos y, por ello, dan unos resultados mejores.

Al tratar con funciones analíticas, al igual que al determinar áreas, la experiencia es muy valiosa para elegir la longitud de los intervalos o incrementos. Como regla muy general, se recomienda empezar con un intervalo relativamente grande y, luego, reducirlo paulatinamente hasta que la variación en el valor resultante de la integral sea muy inferior a la precisión deseada. Ahora bien, un intervalo demasiado pequeño puede producir un aumento en el error a causa de que el número de operaciones realizadas por el ordenador resulte muy elevado. Este tipo de error se conoce generalmente como "error de redondeo", mientras que el error debido a un intervalo grande se conoce como error algorítmico.

Ejemplo: Para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = 5t$, con la condición inicial $y(0) = 2$, hallar $y(4)$.

Aplicando el método de Euler se obtienen los resultados siguientes:

NÚMERO DE SUBINTERVALOS	LONGITUD DEL INTERVALO	y en $t = 4$	ERROR PORCENTUAL
10	0,4	38	9,5
100	0,04	41,6	0,95
500	0,008	41,92	0,19
1000	0,004	41,96	0,10

Este es un caso sencillo que es posible integrar analíticamente y cuyo resultado exacto es $y = 42$.

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

Apéndice D: Tablas útiles

TABLA D.1 PROPIEDADES FISICAS

Densidad (kg/m³)

	kg/m³		kg/m³
Aceite (med.)	900		
Acero	7830	Madera (blanda, pino)	480
Agua (dulce)	1000	(dura, roble)	800
(salada)	1030	Mercurio	13570
Aire*	1,2062	Oro	19300
Aluminio	2690	Plomo	11370
Cobre	8910	Tierra (húm. med.)	1760
Hielo	900	(seca. med.)	1280
Hierro (colado)	7210	Titanio	3080
Hormigón (med.)	2400	Vidrio	2590

*A 20 °C y presión atmosférica

Valores típicos del coeficiente de rozamiento[1]

Superficies en contacto	Estático, μ_e	Cinético μ_c
Acero sobre acero (seco)	0,6	0,4
Acero sobre acero (engrasado)	0,1	0,05
Acero sobre metal blanco (seco)	0,4	0,3
Acero sobre metal blanco (engrasado)	0,1	0,07
Cable sobre polea de hierro (seco)	0,2	0,15
Cuerda de cáñamo sobre metal	0,3	0,2
Forro de frenos sobre fundición	0,4	0,3
Latón sobre acero (seco)	0,5	0,4
Metal sobre hielo		0,02
Neumáticos de caucho sobre pavimento (seco)	0,9	0,8
Teflón sobre acero	0,04	0,04

[1] (Los coeficientes de la tabla representan valores típicos sólo en condiciones ordinarias de trabajo. Los verdaderos coeficientes correspondientes a una situación dada dependerán de la naturaleza exacta de las superficies en contacto. Puede esperarse una variación del 25% o más respecto a estos valores en las aplicaciones prácticas, según sean las condiciones de limpieza, pulido de la superficie, presión, lubricación y velocidad.)

http://gratislibrospdf.com/

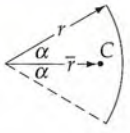
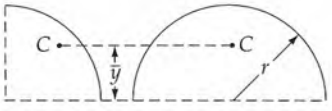
TABLA D.2 CONSTANTES DEL SISTEMA SOLAR

CUERPO	DISTANCIA MEDIA AL SOL, km	EXENTRICIDAD DE LA ÓRBITA, e	PERIODO DE LA ÓRBITA días solares	DIÁMETRO MEDIO, km	MASA RELATIVA A LA TIERRA	GRAVEDAD EN LA SUPERFICIE m/s^2	VELOCIDAD DE ESCAPE km/s
Sol	—	—	—	1 392 000	333 000	274	616
Luna	384 398 †	0,055	27,32	3 476	0,0123	1,62	2,37
Mercurio	$5{,}73 \times 10^6$	0,206	87,97	5 000	0,054	3,47	4,17
Venus	108×10^6	0,0068	224,70	12 400	0,815	8,44	10,24
Tierra	$149{,}6 \times 10^6$	0,0167	365,26	12 742 ††	1,000	9,821 †††	11,18 †††
Marte	$227{,}9 \times 10^6$	0,093	686,98	6 788	0,107	3,73	5,03

Constante de la Gravitación Universal	$G = 6{,}673(10^{-11})\ m^3/(kg \cdot s^2)$
Masa de la Tierra	$m_t = 5{,}976\ (10^{24})\ kg$
Periodo de rotación de la Tierra (1 día sidéreo)	$= 23\ h\ 56\ min\ 4\ s$
	$= 23{,}9344\ h$
Velocidad angular de la Tierra	$\omega = 0{,}7292(10^{-4})\ rad/s$
Velocidad angular del radio vector Tierra-Sol	$\omega' = 0{,}1991(10^{-6})\ rad/s$
Velocidad media del centro de la Tierra respecto al Sol	$= 107\ 200\ km/h$

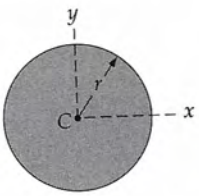
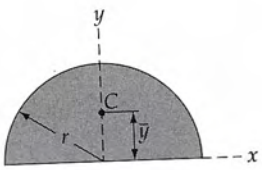
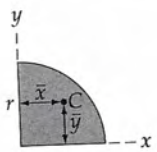
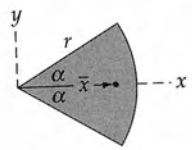
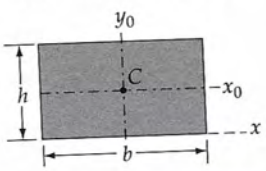
† Distancia media a la Tierra (entre centros)
†† Diámetro de la esfera de igual volumen, basado en una Tierra esferoidal con un diámetro polar de 12714 km y un diámetro ecuatorial de 12756 km
††† Para una Tierra esférica sin rotación, equivalente al valor absoluto al nivel del mar y una latitud de 37,5°

TABLA D.3 PROPIEDADES DE LAS FIGURAS PLANAS

FIGURA	CENTROIDE	MOMENTOS DE INERCIA
Arco de circunferencia 	$\bar{r} = \dfrac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	—
Cuadrante y semicircunferencia 	$\bar{y} = \dfrac{2r}{\pi}$	—

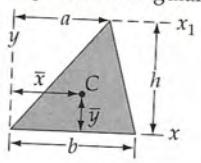
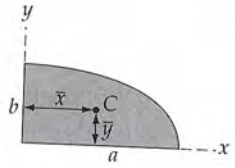
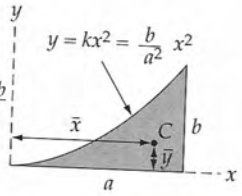
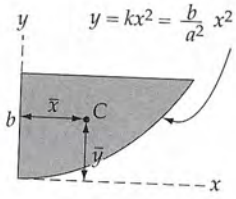
http://gratislibrospdf.com/

TABLA D.3 PROPIEDADES DE LAS FIGURAS PLANAS (continuación)

FIGURA	CENTROIDE	MOMENTOS DE INERCIA
Círculo 	—	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_z = \frac{\pi r^4}{4}$
Semicírculo 	$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{8}$ $\bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{8}$
Cuadrante circular 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{8}$
Sector circular 	$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	$I_x = \frac{r^4}{4}(\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha)$ $I_x = \frac{r^4}{4}(\alpha + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha)$ $I_z = \frac{1}{2} r^4 \alpha$
Superficie rectangular 	—	$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_z = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$

http://gratislibrospdf.com/

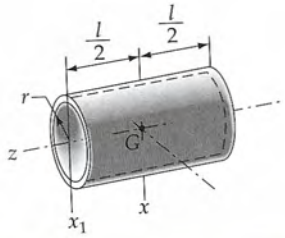
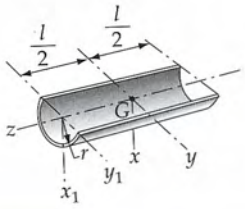
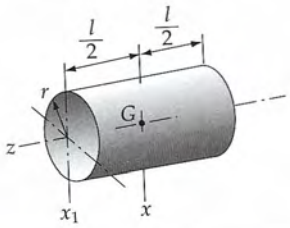
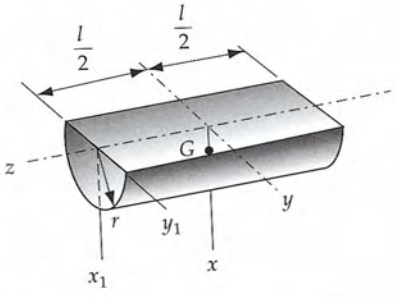
TABLA D.3 PROPIEDADES DE TAFIGURAS PLANAS (continuación)

FIGURA	CENTROIDE	MOMENTOS DE INERCIA
Superficie triangular 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{bh^3}{4}$
Superficie de cuadrante elíptico 	$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$	$I_x = \frac{\pi ab^3}{16}$, $\bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)ab^3$ $I_y = \frac{\pi a^3 b}{16}$, $\bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)a^3 b$ $I_z = \frac{\pi ab}{16}(a^2 + b^2)$
Superficie subparabólica Área $A = \frac{ab}{3}$ 	$\bar{x} = \frac{3a}{4}$ $\bar{y} = \frac{3b}{10}$	$I_x = \frac{ab^3}{21}$ $I_y = \frac{a^3 b}{5}$ $I_z = ab\left(\frac{a^2}{5} + \frac{b^2}{21}\right)$
Superficie parabólica Área $A = \frac{2ab}{3}$ 	$\bar{x} = \frac{3a}{8}$ $\bar{y} = \frac{3b}{5}$	$I_x = \frac{2ab^3}{7}$ $I_y = \frac{2a^3 b}{15}$ $I_z = 2ab\left(\frac{a^2}{15} + \frac{b^2}{7}\right)$

http://gratislibrospdf.com/

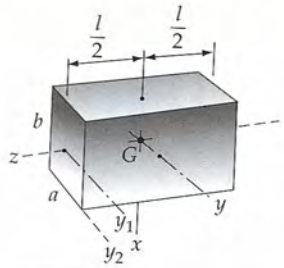
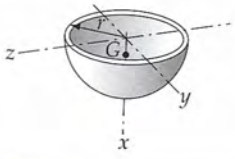
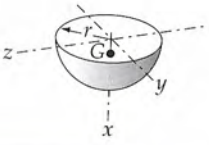
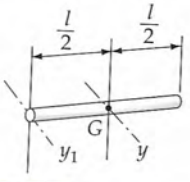
TABLA D.4 PROPIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÉNEOS

(m = masa del cuerpo representado)

CUERPO	CENTRO DE MASA	MOMENTOS DE INERCIA DE MASA
Cáscara cilíndrica de revolución 	—	$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$
Cáscara semicilíndrica de revolución 	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2$
Cilindro de revolución 	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$
Semicilindro 	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$

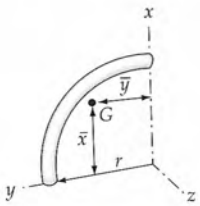
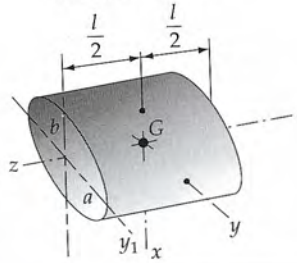
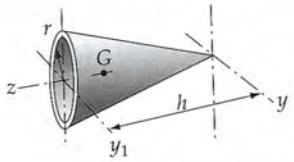
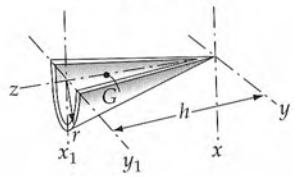
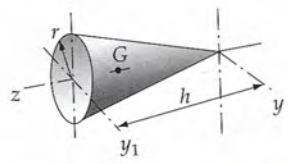
http://gratislibrospdf.com/

TABLA D.4 PROPIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÉNEOS (continuación)
(m = masa del cuerpo representado)

CUERPO	CENTROS DE MASA	MOMENTOS DE INERCIA DE MASA
Paralelepípedo rectangular 	—	$I_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{y_2y_2} = \frac{1}{3}m(b^2 + l^2)$
Cáscara esférica	—	$I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$
Cáscara hemisférica 	$\bar{x} = \frac{r}{2}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{5}{12}mr^2$
Esfera	—	$I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$
Semiesfera 	$\bar{x} = \frac{3r}{8}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{83}{320}mr^2$
Varilla delgada uniforme 	—	$I_{yy} = \frac{1}{12}ml^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{3}ml^2$

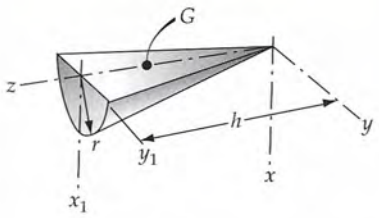
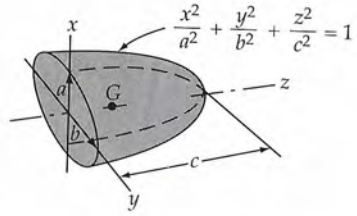
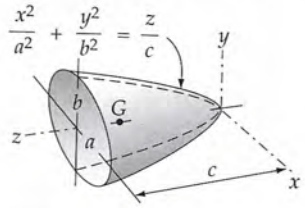
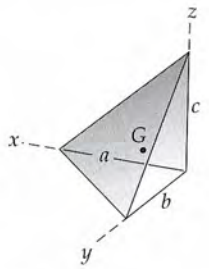
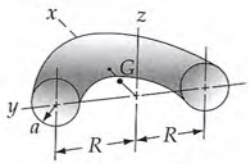
http://gratislibrospdf.com/

TABLA D.4 PROPIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÉNEOS (continuación)
(m = masa del cuerpo representado)

CUERPO	CENTROS DE MASA	MOMENTOS DE INERCIA DE MASA
Varilla cuarto circular 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}mr^2$ $I_{zz} = mr^2$
Cilindro elíptico 	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{yy} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$
Cáscara cónica 	$\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{2}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$
Cáscara semicónica 	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$ $\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{2}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$
Cono circular recto 	$\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$

http://gratislibrospdf.com/

TABLA D.4 PROPIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÉNEOS (continuación)
(m = masa del cuerpo representado)

CUERPO	CENTROS DE MASA	MOMENTOS DE INERCIA DE MASA
Semicono 	$\bar{x} = \frac{r}{\pi}$ $\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{\pi^2}\right)mr^2$
Semielipsoide 	$\bar{z} = \frac{3c}{8}$	$I_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + \frac{19}{64}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + \frac{19}{64}c^2)$
Paraboloide elíptico 	$\bar{z} = \frac{2c}{3}$	$I_{xx} = \frac{1}{6}mb^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{yy} = \frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{zz} = \frac{1}{6}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{6}m(b^2 + \frac{1}{3}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{6}m(a^2 + \frac{1}{3}c^2)$
Tetraedro rectangular 	$\bar{x} = \frac{a}{4}$ $\bar{y} = \frac{b}{4}$ $\bar{z} = \frac{c}{4}$	$I_{xx} = \frac{1}{10}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{10}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{10}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{3}{80}m(b^2 + c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{80}m(a^2 + c^2)$ $\bar{I}_{zz} = \frac{3}{80}m(a^2 + b^2)$
Semitoro 	$\bar{x} = \frac{a^2 + 4R^2}{2\pi R}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{5}{8}ma^2$ $I_{zz} = mR^2 + \frac{3}{4}ma^2$

http://gratislibrospdf.com/

CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS

Principios de capítulo

CAPÍTULO 1: Cortesía de McDonnell–Douglas Corp.
CAPÍTULO 2: PSSC Physics, 2e, 1965, D.C. Heath & Co. y de Education Development Center.
CAPÍTULO 3: Hank Morgan/Rainbow.
CAPÍTULO 4: NASA.
CAPÍTULO 5: Bob Daemmrich/The Image Works.
CAPÍTULO 6: Cortesía de Lufthansa Airlines.
CAPÍTULO 7: Runk/Schoenberger/Grant Heilman Photography.
CAPÍTULO 8: Cortesía de MTS Systems.

http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

Índice alfabético

Aceleración 100,359
  determinación por el teorema de las fuerzas vivas 419
Aceleración constante 19
Aceleración dada como función del tiempo 19
Aceleración instantánea 17
Aceleración relativa 323, 338
Acelerómetro 538
Álgebra 598
Álgebra vectorial 600
Amplitud 519
Aristóteles 4

Balística 37

Campos de fuerzas conservativos 154
Cantidad de movimiento 164, 165, 427
  sistema 235
Centro de percusión 375
Centro instantáneo de rotación 317
Centroide, tablas 614
Choque 187
Choque central frontal 188
Choque central oblicuo 189
Choque de cuerpos rígidos 431
Choque elástico 189
Choque inelástico 189
Choque plástico 189
Cinemática 16
Cinemática tridimensional 452
Cinética 475
Cinética del punto material 100
Coeficiente de amortiguamiento viscoso 519
Coeficiente de restitución 188
Coeficiente de rozamiento, valores 613
Cono del cuerpo 455
Cono del espacio 455
Conservación de la cantidad de movimiento 166, 239, 430
Conservación energía 239
Constante de gravitación 8
Constante de la Gravitación Universal 614
Constante del resorte 517
Constante recuperadora 517
Constantes del sistema solar 614
Coordenadas cilíndricas 69
Coordenadas esféricas 70
Coordenadas polares 57
Coordenadas rectangulares 36, 69
Coordenadas tangencial y normal 46
Coriolis, aceleración 338
Cosenos directores 601
Cuerpo rígido 5
Cuerpos rígidos interconectados 430

Decremento logarítmico 522
Densidad 613
Derivada temporal de un vector 34
Derivada temporal vector posición, transformación cambio ejes 337
Derivadas 604
Derivadas de vectores 603
Desaceleración 17
Desplazamiento 17
Diagrama cinético 359
Diagrama para sólido libre 13, 105
Dimensión 11
Dinámica
  aplicaciones 4
  historia 4
  planteo 11
  resolución problemas 11
  unidades 7
Dinámica tridimensional, cuerpos rígidos 452
Doble producto vectorial 602

http://gratislibrospdf.com/

Ecuación del movimiento 104
Ecuación del movimiento de m 233
Ecuación del movimiento relativo 211
Ecuaciones, resolución método Newton 607
Ecuaciones cinéticas generales 487
Ecuaciones de Euler 488
Ecuaciones energéticas 488
Eje instantáneo de rotación 317
Ejes de referencia en rotación 465
Ejes de referencia en traslación 464
Ejes principales de inercia 478
Elongación 517
Energía 234
Energía cinética 138
  rotación 404
Energía cinética tridimensional 478
Energía potencial 152
Energía potencial elástica 153
Energía potencial gravitatoria 152
Equilibrio dinámico 211
Espacio 5

Factor de amplificación 535, 536
Figuras geométricas, propiedades, tablas 614
Fórmula Internacional de la Gravedad 10
Frecuencia natural 519
Frecuencia propia 519
Fuerza 5, 100, 359
Fuerza centrífuga 212
Fuerza de inercia 211
Fuerza viva 138
Fuerzas activas 136
Fuerzas reactivas 136
Función conservativa 155

Galileo 4
Geometría analítica 599
Geometría del espacio 598
Geometría plana 597
Grados de libertad 85, 105
Gravitación 8

Hodógrafa 36
Huyghens 4

Impulso 164, 165
Impulso angular 178, 180
Indicador de desplazamiento 538
Índice de amortiguamiento 520
Índice de amplitud 535, 536
Inercia 101
Integración de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden 610
Integración de Euler 610
Integración de vectores 603
Integración numérica, técnicas 608
Integrales 604

Joule 136, 138

Kepler
  primera ley 201
  segunda ley 199
  tercera ley 201
kp 8

Leyes de Newton 6

Masa 5, 100, 359
Masa de la Tierra 614
Matriz de inercia 477, 589
Medida absoluta 5
Momento cinético 178, 428
  conservación 181
Momento cinético tridimensional 475
Momento cinético, sistema 236
Momento de inercia 359
  cuerpos compuestos 576
  radio de giro 574
  tablas 614
Momento de inercia másico 360
Momentos de inercia de masas 573
Momentos de inercia de superficies 571
Momentos principales de inercia 478, 589
Movimiento
  cuerpos interconectados 363
  ecuaciones generales 359
  proyectiles 37
Movimiento absoluto 292
Movimiento angular, fórmulas 284
Movimiento armónico simple 24, 517
Movimiento bajo fuerzas centrales 198
Movimiento circular 48
Movimiento críticamente amortiguado 521
Movimiento curvilíneo 120
Movimiento curvilíneo en el espacio 69
Movimiento curvilíneo plano 33
Movimiento estacionario de un medio continuo 249
Movimiento general, espacio 464
Movimiento giroscópico 495
Movimiento masa variable 264
Movimiento no vinculado 16, 105
Movimiento plano 17
  ecuaciones 360
Movimiento plano general 283, 387, 453, 489
Movimiento rectilíneo 17, 106
Movimiento relativo 210
Movimiento relativo (ejes en rotación) 75
Movimiento relativo a ejes en rotación 335
Movimiento relativo a sistemas en traslación uniforme 212
Movimiento sobreamortiguado 520
Movimiento subamortiguado 521
Movimiento vinculado 16, 105
  de puntos materiales conectados 84

http://gratislibrospdf.com/

Newton 4, 7
método resolución ecuaciones 607
segunda ley, generalización 232
Nutación 498

Oscilaciones, métodos energéticos 555
Oscilaciones cuerpo rígido 545
Oscilaciones forzadas amortiguadas 535
Oscilaciones forzadas de un punto material 532
Oscilaciones forzadas no amortiguadas 534
Oscilaciones libres 517
Oscilaciones libres amortiguadas 519
Oscilaciones libres no amortiguadas 517

Partícula 5
Período 519, 614
Periodo de rotación de la Tierra 614
Peso 8
Potencia 139, 405
Precesión directa 502
Precesión retrógrada 502
Precesión uniforme 495, 500
Precesión uniforme con momento nulo 501
Principio de conservación de la cantidad de movimiento 240
Principio de conservación de la energía 239
Principio de conservación de la energía dinámica 154
Principio de conservación del momento cinético 240
Principio de D'Alambert 211
Principio del movimiento del centro de masa 233
Problema de los dos cuerpos 203
Producto escalar 601
Producto mixto 602
Producto vectorial 602
Producto vectorial doble 602
Productos de inercia 476, 587
ejes principales 588
Pulsación crítica 535
Pulsación natural 519
Pulsación natural amortiguada 522
Pulsación propia 519
Pulsación propia amortiguada 522
Pulsación resonante 535
Punto material 5

Rendimiento 139
Rendimiento eléctrico 140
Rendimiento mecánico 139
Rendimiento térmico 140
Resolución ecuaciones método newton 607
Resonancia 535
Respuesta estacionaria 535, 536
Respuesta transitoria 535, 536
Rigidez 517
Rotación 283, 284
Rotación en torno a un eje fijo 285, 375, 453
Rotación en torno a un punto fijo 454

Segunda ley de Newton 100
Series 603
Sistema absoluto 7
Sistema astronómico de referencia 5
Sistema de referencia inercial 212
Sistema de referencia newtoniano 212
Sistema inercial 77, 101
Sistema inercial fundamental 75
Sistema inercial primario 5, 100
Solución estacionaria 535, 536
Solución transitoria 536
Steiner, teorema 575

Tensor de inercia 477, 589
Teorema de la cantidad de movimiento 166
Teorema de las fuerzas vivas 138, 153, 405
determinación de aceleraciones 419
Teorema de Steiner 575, 587
Tiempo 5, 102
Trabajo 135, 234
fuerzas 403
pares de fuerza 403
Trabajo virtual 419, 420
Trabajo y energía, relaciones 402
Transformación de derivadas temporales 337
Traslación 283, 365
Traslación curvilínea 283, 452
Traslación rectilínea 283, 452
Traslación tridimensional 452
Trigonometría 600

Unidades SI
cantidad de movimiento 165
de trabajo 136
energía cinética 138
impulso angular 180
momento cinético 179
potencia 139
Unidades sistema cinético 102

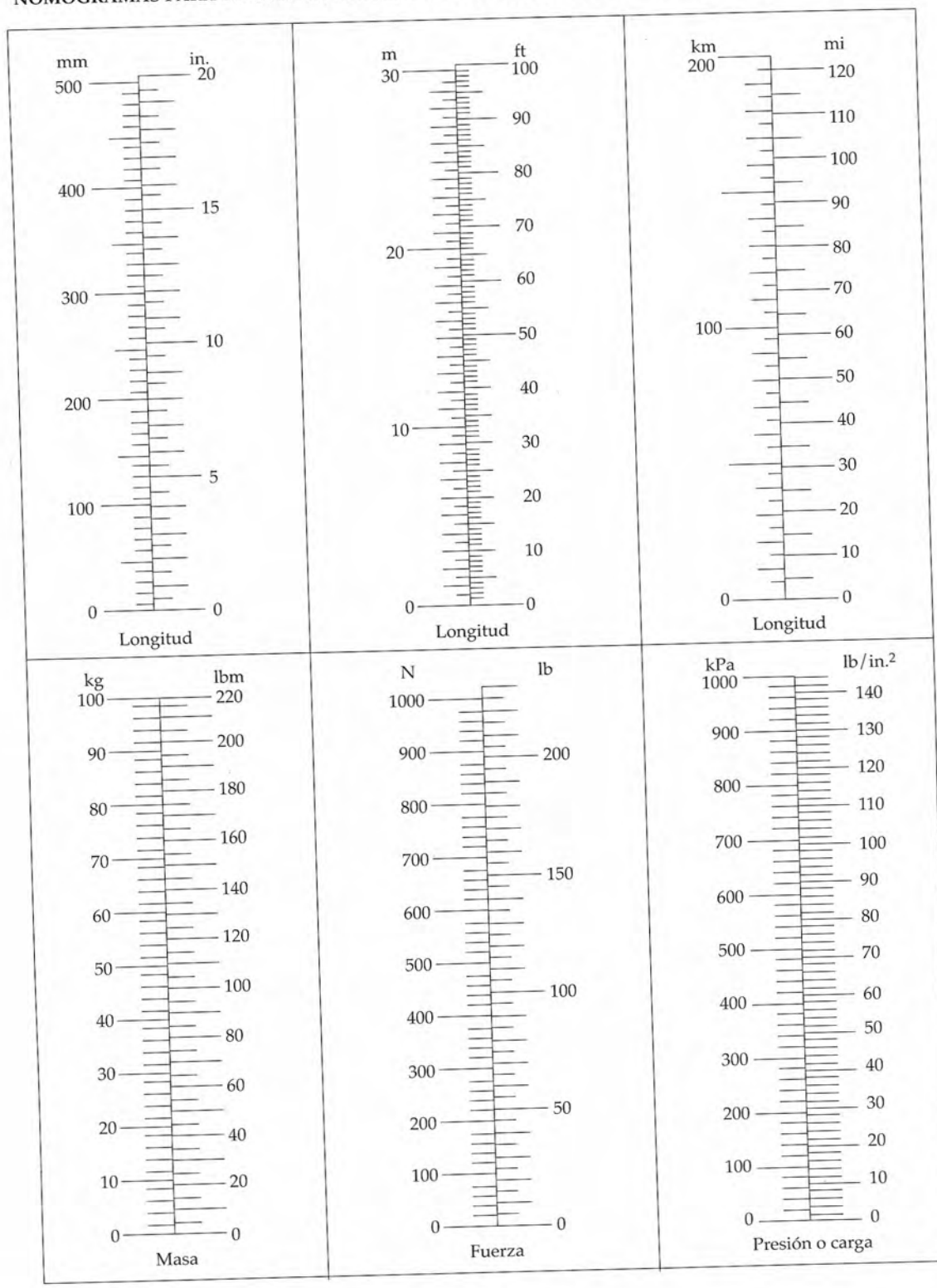
Vectores unitarios 601
Velocidad angular de la Tierra 614
Velocidad de precesión 496
Velocidad instantánea 17
Velocidad lineal absoluta 305
Velocidad relativa 303, 336W

Watt 139

http://gratislibrospdf.com/

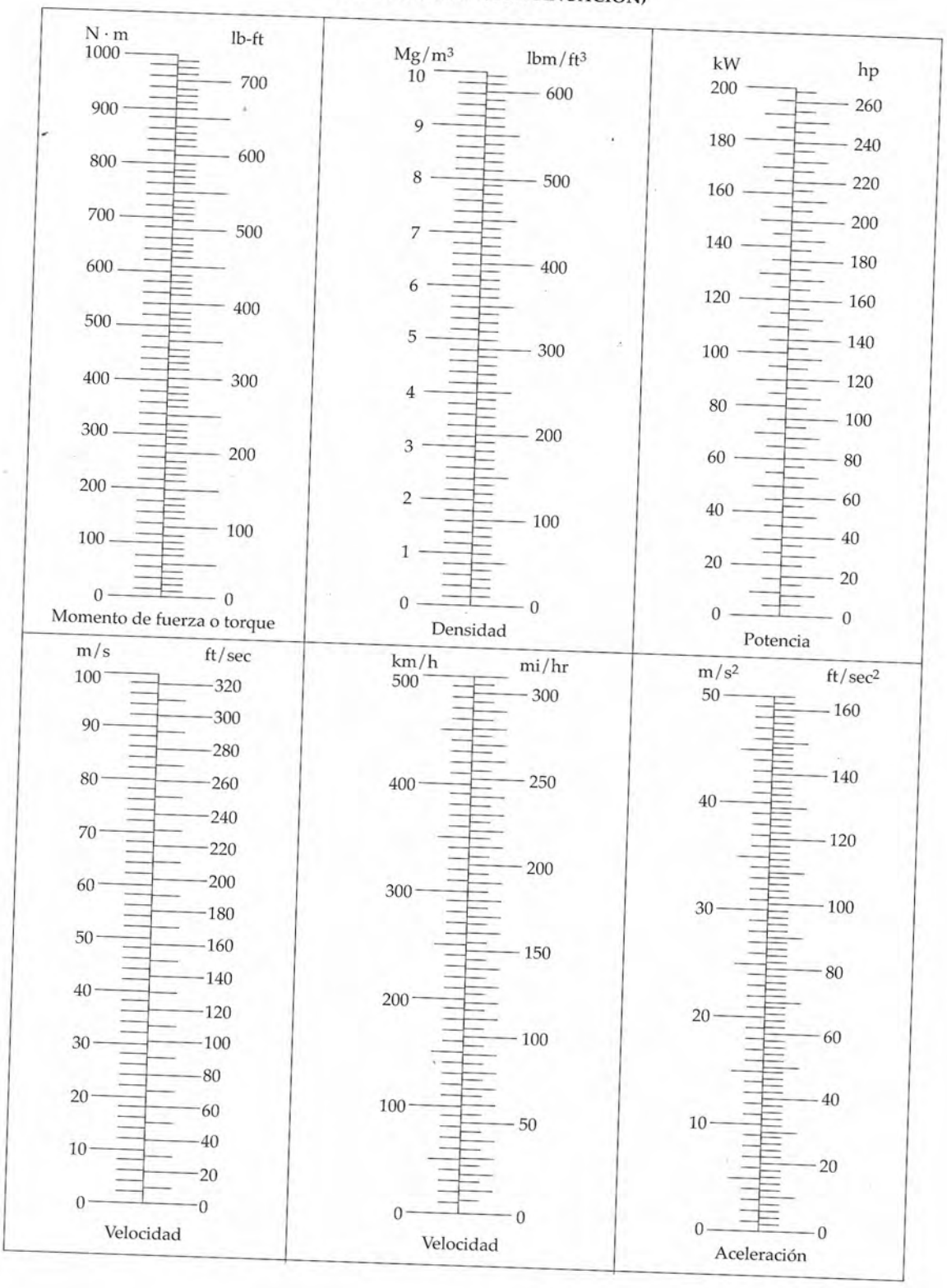
http://gratislibrospdf.com/

NOMOGRAMAS PARA LA CONVERSIÓN ENTRE LAS UNIDADES SI Y LAS U. S. CUSTOMARY UNITS



http://gratislibrospdf.com/

NOMOGRAMAS (CONTINUACIÓN)



http://gratislibrospdf.com/

http://gratislibrospdf.com/

ISBN 84-291-4259-2

http://gratislibrospdf.com/